

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 330.4

А. В. Воронцовский, Л. Ф. Вьюненко

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С УЧЕТОМ ТОЧКИ ПОВОРОТА

В статье отмечается, что в современных условиях возрастает влияние факторов неопределенности и риска на экономическое развитие, и определенные возможности учета их воздействия связаны с использованием стохастических моделей экономического роста. Рассматриваются методы прогнозирования развития экономики на основе дискретной аппроксимации ограничений стохастической модели экономического роста для закрытой экономики по методу Эйлера—Маруямы, опирающиеся на учет текущего (начального) состояния экономики и построение средней расчетной траектории роста. Дана характеристика особенностей реализации предлагаемого подхода к прогнозированию в режиме имитации с учетом точки поворота, обусловленной мировым экономическим кризисом 2008 г. Выполнены расчеты ВВП и расходов на потребление по данным экономики Греции, Дании и Испании на двух временных периодах — до и после кризиса 2008 г. Определены параметры модели, обеспечивающие согласие фактических траекторий и построенных 50%-ных доверительных интервалов для указанных макроэкономических показателей. Особое внимание уделено проблеме калибровки условий стохастической модели экономического роста. Показано, что использование исходных данных в постоянных ценах 1970 г. для построения прогнозов в режиме имитации позволяет улучшить согласие. Библиогр. 36 назв. Ил. 12. Табл. 12.

Ключевые слова: экономическое развитие; методы прогнозирования; макроэкономические показатели; стохастическая модель; дискретная аппроксимация; имитационное моделирование; траектория роста; доверительный интервал; точка поворота.

Алексей Владимирович ВОРОНЦОВСКИЙ — доктор экономических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9; a.vorontsovskii@spbu.ru

Людмила Федоровна ВЬЮНЕНКО — канд. физ.-мат. наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9; vyunenko@spbu.ru

Aleksey V. VORONTSOVSKIY — Doctor of Economics, Professor, St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation; a.vorontsovskii@spbu.ru

Lyudmila F. VYUNENKO — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation; vyunenko@spbu.ru

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

FORECASTING THE ECONOMY DEVELOPMENT BASED ON A STOCHASTIC MODEL OF ECONOMIC GROWTH GIVEN A TURNING POINT

The article notes the increasing influence of uncertainty and risk factors on the economic development in modern conditions. Some opportunities to consider this impact are connected with the use of stochastic models for economic growth. The authors study the methods of forecasting the economic development based on a discrete stochastic approximation for the constraints of the economic growth model using the Euler-Maruyama method. The proposed approach permits constructing the mean calculated economic growth trajectory starting from the current (initial) state. The method implementation in the simulation mode is presented with regard to the turning point induced by the 2008 global economic crisis. Special attention is drawn to the characteristic features of the proposed method and the problem of the economic growth stochastic model calibration. The calculations of GDP and consumption expenditure trajectories are performed according to the data for Greece, Denmark, and Spain in two time periods — before and after the 2008 crisis. The sets of model parameters are found that provide the compliance of the actual trajectories with 50% confidence intervals of calculated values of the macroeconomic indicators under consideration. It is shown that the use of the baseline data defined in fixed 1970 prices for the forecast calculations can increase the compliance. Refs 36. Figs 12. Tables 12.

Keywords: economic development; forecast methods; macroeconomic indicators; stochastic model; discrete approximation; simulation; growth trajectory; confidence interval; turning point.

Введение

По мере развития современной экономики возникает необходимость по-новому рассматривать проблемы ее прогнозирования. Это связано с усилением влияния на экономику и результаты деятельности отдельных стран и регионов процессов глобализации и факторов неопределенности и риска. Существующие методы прогнозирования в значительной степени опираются на применение эконометрических моделей; особое значение имеет прогнозирование на основе случайных процессов, в том числе в рамках стохастических динамических моделей общего равновесия [Tkacz, 2013]. Важную роль играет применение метода Монте-Карло [Ермаков, 2009], при этом обращается внимание на особенности компьютерной генерации последовательностей псевдослучайных чисел [Niederreiter, 1992] и определенные преимущества учета числовых последовательностей Холтона и Форса [Лю, 2007, с. 337–341; Моделирование экономического роста..., 2011, с. 169–173]. Кроме того, в исследованиях подчеркивается, что средние траектории, построенные по результатам имитационного моделирования, не всегда дают лучшие результаты по сравнению с другими методами прогнозирования [Kim, Swanson, 2014]; обращается внимание на особенности учета условий стационарности применительно к случайным процессам [Loll, 2012].

Существующие современные постановки стохастических макроэкономических моделей, которые в принципе можно использовать для прогнозирования развития экономики, выполнены для стран с закрытой экономикой [Turnovsky, 2000, p. 547–558; Воронцовский, Вьюненко, 2014] или с малой открытой экономикой [Turnovsky, 2011; García-Peñalosa, Turnovsky, 2006; Turnovsky, Yu-chin Chen, 2010; Воронцовский, 2010; Воронцовский, Дикарев, 2013]. Выдвигаемые предложения по развитию макроэкономического моделирования с учетом случайных факторов связаны с разработкой динамических стохастических моделей общего экономического равновесия и их внедрения на уровне Европейского центрального банка

[Smets, Wouters, 2003] и центральных банков отдельных стран. Рассматриваемые стохастические модели экономического роста опираются на парадигму роста, что значительно снижает возможности их применения в условиях смены или перелома тенденции развития экономики. Поэтому существенная проблема прогнозирования связана с учетом возможных точек поворота, определяющих смену тенденции макроэкономических показателей.

В настоящей статье анализируются возможности прогнозирования экономического развития на основе аппроксимации ограничений стохастической модели экономического роста для закрытой экономики в форме рекуррентных соотношений, которые формируются с учетом свойств приращений винеровских случайных процессов. При этом учитывается только текущее или начальное состояние экономики. В качестве точки поворота рассматривается 2008 г., в течение которого начался мировой экономический кризис и произошла смена тенденции развития экономики практически для всех стран мира.

Основная гипотеза исследования состоит в том, что в процессе моделирования в режиме имитации можно, изменяя числовые параметры формируемых рекуррентных соотношений и учитывая только текущее состояние экономики, обеспечивать определенное соответствие прогнозов, формируемых на основе средних расчетных траекторий, и фактического развития экономики даже в условиях современного экономического кризиса с учетом точки поворота развития экономики в 2008 г.

1. Некоторые особенности современной экономики и проблемы их учета в процессе моделирования

В настоящее время во всем мире наблюдается усиление влияния текущих факторов риска на состояние макроэкономики, что порождает нарушение ее относительной стабильности и приводит к существенному снижению влияния факторов и условий прошлых лет на тенденции экономического развития в перспективе. Мировой экономический кризис 2008 г. еще раз наглядно подтвердил эту проблему, поскольку существующие методы прогнозирования не позволили его предсказать. Фактически это означает нарушение основного предположения, на котором основано использование эконометрических методов прогнозирования экономики: сохранение общей тенденции развития прошлых периодов и перенос ее на будущее. При расширении объема выборки или длительности рассматриваемого временного ряда, с одной стороны, повышается статистическая надежность получаемых параметров и качество прогноза, но с другой — постоянно появляются новые факторы и условия, которых в более ранние периоды просто не было. Подобный подход имеет смысл только в условиях устойчивого эволюционного развития. При прогнозировании современной экономики требуется обратить существенное внимание на ее текущее состояние как на важнейший фактор, определяющий перспективы макроэкономики и ее дальнейшие преобразования. Это предполагает перенос центра тяжести в процессе моделирования экономического роста с отчетных данных прошедших периодов на анализ влияния текущего состояния экономики на будущее и построение траекторий роста для различных макроэкономических показателей, принимая во внимание указанное состояние. Усиление влияния фак-

торов неопределенности и риска на макроэкономике предполагает моделирование их воздействия в форме случайных переменных, что требует специальных математических и имитационных методов анализа соответствующих моделей и построения траекторий роста.

Учитывая определенные свойства стохастических макроэкономических моделей, а также особенности моделирования случайных переменных в форме приращений винеровских случайных процессов, предлагается рассмотреть возможности построения траекторий макроэкономических показателей в режиме имитации на основе рекуррентных соотношений, аппроксимирующих исходные стохастические уравнения и формируемых по методу Эйлера—Маруямы [Wu, Mao, Kloeden, 2011; Кузнецов, 2007; Современная макроэкономика: избранные главы, 2013, с. 275–277]. Это позволяет строить траектории макроэкономического развития с учетом рассматриваемого начального состояния экономики в процессе проведения имитационных расчетов. Современные аспекты развития метода Эйлера—Маруямы рассмотрены в статье [Li, Xiao, Ye, 2013].

Применение методов Монте-Карло для анализа и построения траекторий роста макроэкономических показателей, которые моделируются с учетом тех или иных стохастических процессов, предполагает решение следующих задач. Во-первых, для каждого рассматриваемого случайного процесса необходимо построить его приближенную или аппроксимирующую форму в виде рекуррентного соотношения, применение которого позволяет строить и анализировать траектории экономического роста в процессе компьютерной имитации. При постановке стохастических макроэкономических моделей подобные рекуррентные соотношения можно строить с учетом свойств приращений винеровских процессов. Во-вторых, речь идет об обосновании числовых параметров уравнений модели в процессе экспериментальных расчетов; при этом можно использовать фиксированные начальные значения числовых параметров уравнений модели или рассматривать их как меняющиеся во времени. В последнем случае необходимо создать для них определенные соотношения. В-третьих, при формировании траекторий развития экономики на основе дискретной аппроксимации стохастических уравнений модели роста в режиме имитации применяется приближенная аппроксимирующая форма уравнений, степень соответствия которой реальному развитию экономики требует специального анализа.

2. Постановка стохастической модели роста для закрытой экономики и аппроксимирующая форма ограничений

Рассмотрим постановку некоторых условий стохастической динамической модели экономического роста для закрытой экономики, основанной на распределении выпуска продукции между потреблением и накоплением капитала. Для моделирования экономического роста вначале использовались подобные детерминированные соотношения [Cass, 1965; Коортманс, 1967]. Позднее постановки моделей экономического роста были связаны с введением различных шоковых переменных, учитываемых в форме случайных процессов. Первые постановки макроэкономических моделей с учетом случайных факторов появились еще в начале 1970-х годов. Среди них можно отметить работу У.Брока и Л.Мирмана, в которой случайный

фактор был введен при переменных производственной функции [Brock, Mirman, 1972], и статью С. Тарновского, использовавшего случайный фактор в ограничениях модели роста [Turnovsky, 1973].

В настоящем исследовании приводятся ограничения простого варианта стохастической модели роста для закрытой экономики. При постановке модели роста будем учитывать следующие предпосылки: рассматривается модель экономического роста для закрытой экономики; валовой внутренний продукт (ВВП) представлен в форме АК-модели; основные показатели — ВВП, капитал и потребление описываются в форме стохастических дифференциальных уравнений, характеризующих зависимость прироста анализируемого показателя от прироста капитала и случайного фактора; влияние случайных факторов моделируется в форме приращений винеровских случайных процессов; при моделировании случайный фактор учитывается пропорционально объему используемого капитала; лаг запаздывания отсутствует, т.е. инвестиции мгновенно преобразуются в капитал и выпуск продукции; норма выбытия капитала фиксированна. При записи ограничений стохастической модели экономического роста используем подход, основанный на разложении продукции по назначению [Waelde, 2011].

Для описания объемов выпускаемой продукции или объемов производства, выражаемых производственной функцией в современных условиях, используется так называемая АК-модель. Ее построение существенно опирается на предположение о том, что каждая дополнительная единица капитала обеспечивает возрастающий прирост выпуска продукции и предполагает расширенное понимание капитала как фактора или переменной производственной функции. При этом подходе к определению капитала необходимо не только учитывать его материально-вещественную составляющую, но и включать в это понятие человеческий капитал, знания, общественную инфраструктуру и т.п. [Барро, Сала-и-Мартин, 2010, с. 270]. Одним из первых подобную модель рассматривал американский экономист М. Франкель [Frankel, 1962]. Определенное развитие моделирования производства с помощью АК-модели дано в работах Ц. Грилихеса [Griliches, 1979], П. Ромера [Romer, 1986] и Р. Лукаса [Lukas, 1988], который выделил человеческий капитал в рамках общего объема капитала как фактор экономического роста и форму передачи знаний.

Существенное возрастание роли и значения материального фактора производства в условиях современного научно-технического прогресса при одновременном усилении воздействия человеческого фактора на объемы производства и его эффективность привело к необходимости применения в процессе макроэкономического моделирования АК-модели. При этом, с одной стороны, трудовые ресурсы в условиях современных миграционных процессов, имеющих глобальный характер, перестают быть лимитирующим фактором и развитие производства упирается в возможности и наличие материальных ресурсов; но, с другой стороны, производственная деятельность невозможна без человеческого фактора. Поэтому проблемы постановки и анализа АК-модели, связанные с учетом и оценкой влияния человеческого капитала на развитие производства, выходят далеко за рамки данной статьи, в которой обратим внимание только на то, что использование рассматриваемой модели в определенном смысле облегчает формальный анализ и обеспечивает возможности построения траекторий роста макроэкономических показателей.

Анализ и использование АК-модели предполагает расширительную интерпретацию размера капитала, т. е. учет не только материального, но и человеческого капитала, знаний и т. п. Тем самым рост предельной производительности факторов может определяться указанными условиями, которые включаются в расширенное понятие капитала и могут трактоваться по-разному. В рамках АК-модели размер валового внутреннего продукта (ВВП), или некоторого конечного продукта, $Y(t)$, может быть рассчитан на основе следующего выражения:

$$Y(t) = A(t)K(t), \quad (1)$$

где $Y(t)$ — валовой внутренний продукт; $K(t)$ — запас капитала; $A(t)$ — технологический коэффициент в момент времени t .

Прирост ВВП в соответствии с уравнением (1) зависит от начального запаса капитала и случайной составляющей, пропорциональной его объему. Предполагается, что средний запас капитала за рассматриваемый период определяется с учетом его выбытия по фиксированной норме. Тогда уравнение прироста выпуска продукции можно записать в следующем виде:

$$dY(t) = (A(t) - \delta)K(t)dt + A(t)K(t)dw(t); \quad (2)$$

где $dY(t)$ — приращение валового выпуска продукции за период $[t, t + dt]$; δ — фиксированная норма выбытия капитала; $dw(t)$ — приращение винеровского случайного процесса со средним, равным нулю, и дисперсией $\sigma_k^2 dt$.

Учитывая, что прирост выпуска продукции расходуется на потребление и увеличение запаса капитала, легко показать, что выражение для накопления или прироста капитала, которое должно быть равно сумме инвестирования, можно записать так:

$$dK(t) = ((A(t) - \delta)K(t) - C(t))dt + A(t)K(t)dw(t), \quad (3)$$

где $dK(t)$ — приращение капитала за период $[t, t + dt]$; $C(t)$ — объем потребления в момент времени t .

При анализе и построении траектории потребления будем полагать, что прирост объема потребления за период $[t, t + dt]$ можно определить из условия (3) так:

$$dC(t) = A(t)K(t)dt - (1 - \delta)K(t)dt + A(t)K(t)dw(t). \quad (4)$$

Учитывая соотношения (1)–(4), можно записать ограничения рассматриваемой модели экономического роста для закрытой экономики, учитывающей макроэкономические показатели — ВВП, капитал и потребление:

$$\begin{aligned} Y(t) &= A(t)K(t); \\ dY(t) &= (A(t) - \delta)K(t)dt + A(t)K(t)dw(t); \\ dC(t) &= ((A(t) - \delta)K(t) - C(t))dt + A(t)K(t)dw(t); \\ dK(t) &= A(t)K(t)dt - (1 - \delta)K(t)dt + A(t)K(t)dw(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) содержит часть ограничений стохастической модели экономического роста для закрытой экономики, которая будет использована в процессе экспериментальных расчетов. В ней отсутствуют целевая функция и ряд других ма-

кросэкономических условий, которые должны быть учтены при полной постановке модели роста, но в процессе рассматриваемых экспериментов не принимаются во внимание.

Предлагаемая модель включает в себя стохастические ограничения, построенные на основе условий базовой динамической модели общего равновесия для закрытой экономики (см. [Уикенс, 2015, с. 42–44]) путем добавления случайной переменной. Другой подход к моделированию взаимосвязей между потреблением и инвестициями в условиях неопределенности предполагает выделение рисков активов и моделирование их доходности в форме случайной величины (см. [Бланшар, Фишер, 2014, с. 283–288]).

Случайные процессы, учитываемые в уравнениях системы (5), представляют собой приращения винеровских процессов, распределенные по нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией, пропорциональной длительности рассматриваемого временного интервала. Используя указанное свойство приращений винеровских случайных процессов и применяя метод Эйлера—Маруямы, можно построить дискретную аппроксимацию стохастических уравнений системы (5) в форме линейных рекуррентных соотношений [Моделирование экономического роста..., 2011, с. 163–169]. При этом соответствующие рекуррентные соотношения, представляющие собой дискретную аппроксимацию ограничений системы (5), запишутся так:

$$Y_{t+\Delta} = Y_t + (A_t - \delta)K_t\Delta + A_t K_t \sigma_k \sqrt{\Delta} \xi_t; \quad (6)$$

$$K_{t+\Delta} = K_t + ((A_t - \delta)K_t - C_t)\Delta + K_t \sigma_k \sqrt{\Delta} \xi_t; \quad (7)$$

$$\tilde{N}_{t+\Delta} = C_t + A_t K \Delta - (1 + \delta)K \Delta + A_t K \sigma_k \sqrt{\Delta} \xi_t, \quad (8)$$

где Δ — шаг временной решетки, по которой будем проводить расчеты в режиме имитации; ξ_t — реализация случайной величины, подчиняющейся стандартному нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице. В принципе можно рассматривать и экспоненциальную форму подобных соотношений.

В задаче (5) основным случайным фактором является размер капитала, который по условиям постановки АК-модели должен включать в себя и человеческий капитал. Поэтому в каждом из уравнений (6)–(8) учитывается стандартное отклонение капитала. Следует иметь в виду, что статистика не дает значений капитала в требуемом виде. Да и само определение размера капитала с учетом требований АК-модели предполагает учет человеческого капитала при определении размера единственного фактора этой модели. В настоящее время и проблемы определения размера национального человеческого капитала, и возможности оценки объемов капитала, учитываемого в рамках АК-модели, носят дискуссионный характер, но их обсуждение выходит за рамки данной статьи. Поэтому далее в процессе имитационных расчетов используются уравнения (6) и (8), для которых можно найти в текущей статистике исходные, или начальные, значения ВВП и размера расходов на потребление. В уравнениях (6) и (8) три вида основных числовых параметров — технологический коэффициент A_t , стандартное отклонение σ_k и норма выбытия капитала δ . Для определения подобных параметров обычно предлагается использовать выборочные значения, в том числе с учетом первых разностей. Возможна

оценка технологических коэффициентов производственной функции на основе теории диффузии техники, предполагающая применение регрессионных уравнений, которые характеризуют зависимость технологических коэффициентов производственной функции развивающихся стран от соответствующих коэффициентов производственных функций развитых стран [Воронцовский, Лебедев, 2015].

Использование для прогнозирования развития экономики уравнений (6)–(8) в режиме имитации опирается на учет только текущих или начальных значений макроэкономических показателей, что позволяет преодолеть ряд формальных трудностей, которые возникают в том случае, когда прогнозирование осуществляется на основе обработки динамических рядов данных с помощью эконометрических методов и предполагается построение уравнений регрессии [Дугерти, 2011; Сток, Уотсон, 2010]. Во-первых, при этом не учитывается предпосылка инерционности, которая означает сохранение прошлой тенденции в будущих периодах, поскольку в нашем случае важно только начальное или текущее значение. Во-вторых, в принципе становятся ненужными проверки статистических гипотез о стационарности ряда, автокорреляции, гипотез о равенстве нулю коэффициентов уравнений регрессии и др. В-третьих, появляется возможность гибко менять формируемые прогнозы макроэкономических показателей в зависимости от изменений их значений хотя бы в одном периоде, корректируя используемые числовые параметры. В-четвертых, существенную роль играют условия калибровки модели и определения тех моментов времени, точек поворота, когда возникает резкая смена тенденции развития рассматриваемых макроэкономических показателей и необходимо обеспечить в процессе расчетов определенное соответствие расчетных результатов и фактических траекторий развития экономики.

Наибольшие трудности применения предлагаемых моделей роста для прогнозирования связаны с ее калибровкой, которая включает в себя как обоснование значений числовых параметров модели, в том числе отсутствующих в статистике, так и обнаружение «точек поворота» — тех моментов или периодов времени, когда резко меняется тенденция развития рассматриваемых макроэкономических показателей. В настоящем исследовании значения числовых параметров уравнений системы (6)–(8) предлагается определить в процессе экспериментальных расчетов таким образом, чтобы обеспечить попадание рассматриваемых фактических траекторий в 50%-ный доверительный интервал и обеспечить соответствие 50%-ной доверительной области для среднего значения моделируемого случайного процесса и фактических траекторий макроэкономических показателей. Значения числовых параметров A_t рассчитывались на каждом шаге цикла имитационных расчетов по соотношению (1) с учетом полученных на этом шаге значений капитала и ВВП.

При определении точных дат каждой «точки поворота» принимались во внимание условия мирового экономического кризиса 2008 г. и макроэкономические показатели рассматриваемых стран. Соответствующие изменения были определены в процессе корректировки числовых параметров модели. В общем случае при этом можно использовать методы сценарного прогнозирования. При наличии необходимой информации могут быть применены другие подходы к калибровке модели, например, основанные на статистических методах анализа соответствия теоретических и расчетных траекторий макроэкономических показателей.

3. Обработка результатов моделирования значений макроэкономических показателей и построение доверительных интервалов

Ключевая задача обработки результатов имитационного моделирования — оценка границ доверительной области для значений макроэкономических характеристик. Под доверительной областью понимается множество в пространстве значений, в которое с заданной (доверительной) вероятностью попадает оцениваемая характеристика или рассматриваемый макроэкономический показатель. В том случае если такая оценка является конечной целью расчетов, для ее получения можно ограничиться нахождением выборочных квантилей заданного порядка для выбранных моментов времени. Однако, как правило, изучение динамики макроэкономических показателей не заканчивается оценкой границ доверительной области, такая оценка является промежуточной. В подобных ситуациях целесообразно строить гибридные численно-аналитические оценки границ доверительной области. Решение задачи предполагает следующие этапы: формулировка статистической гипотезы; оценка параметров гипотетического распределения; расчет границ доверительной области для значений оцениваемых параметров.

Наиболее популярная статистическая гипотеза в подобных исследованиях — гипотеза о нормальности сечений случайного процесса. Если есть достаточные основания принять такую гипотезу, то оценка границ доверительной области сведется к решению стандартной задачи — вычислению квантилей нормального распределения. Однако анализ результатов вычислительных экспериментов, проведенных на основе модели (6)–(8), описывающей изменение во времени значений валового выпуска продукции $Y(t)$, запаса капитала $K(t)$ и потребления $C(t)$, показал, что распределения случайных величин, отвечающих сечениям изучаемого случайного процесса, имеют устойчивую асимметрию. В тех случаях, когда были достаточные основания принять статистическую гипотезу о нормальности сечений моделируемого случайного процесса, оценку границ доверительной области сводили к вычислению квантилей нормального распределения. Если же распределения значений макроэкономических показателей, отвечающих сечениям изучаемого случайного процесса, имели устойчивую асимметрию, в качестве модельного закона распределения при построении доверительных интервалов использовали усеченное на конечный промежуток $[x_\alpha, x_\beta]$ распределение Вейбулла $W(x_0, a, c, x_\alpha, x_\beta)$ с функцией плотности [Вадзинский, 2001]:

$$f(x, x_0, a, c, x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0 & , x < x_\alpha, x > x_\beta \\ \frac{ac(x-x_0)^{a-1} e^{-(c(x-x_0))^a}}{e^{-(c(x_\alpha-x_0))^a} - e^{-(c(x_\beta-x_0))^a}} & , x_\alpha \leq x \leq x_\beta \end{cases} . \quad (9)$$

Параметры распределения найдены методом максимального правдоподобия, т. е. в качестве оценки искомых параметров использована совокупность значений $(x_0, a, c, x_\alpha, x_\beta)$, доставляющая максимум функции правдоподобия:

$$L(x, x_0, a, c, x_\alpha, x_\beta) = \prod_{i=1}^N \frac{ac(x-x_0)^{a-1} e^{-(c(x-x_0))^a}}{e^{-(c(x_\alpha-x_0))^a} - e^{-(c(x_\beta-x_0))^a}} , x_\alpha \leq x \leq x_\beta, \quad (10)$$

или, что удобнее в вычислительном отношении, логарифмической функции правдоподобия

$$\ln L(x, x_0, a, c, x_\alpha, x_\beta) = -N \ln \Theta + N \ln a + N \ln c + (a-1) \sum_{i=1}^N \ln(x_i - x_0) - c^a \sum_{i=1}^N (x_i - x_0)^a, \quad (11)$$

где $\Theta = \frac{1}{e^{-(c(x_\alpha - x_0))^a} - e^{-(c(x_\beta - x_0))^a}}, x_\alpha \leq x \leq x_\beta$.

Для численного решения этой задачи в качестве основы использован известный экономичный (по вычислительным затратам) алгоритм прямого поиска экстремума функции нескольких переменных по деформируемому многограннику — алгоритм Нелдера—Мида [Банди, 1988]. Идея метода заключается в сравнении значений функции в $(n + 1)$ вершинах симплекса и перемещении симплекса в направлении оптимальной точки с помощью итерационной процедуры, состоящей из трех основных операций: отражения, растяжения и сжатия. Применение метода Нелдера—Мида предполагает использование на каждом шаге только значений минимизируемой функции и не требует информации о ее производных.

В качестве стартовых значений параметров выбиралась совокупность значений x_0, a, c , найденная методом моментов для распределения Вейбулла (трехпараметрического), $x_\alpha = \min X_i$, $x_\beta = \max X_i$.

Полученные значения параметров распределения $W(x_0, a, c, x_\alpha, x_\beta)$ позволяют вычислять с учетом

$$F(x, x_0, a, c, x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0 & , x < x_\alpha \\ \frac{1 - e^{-(c(x-x_0))^a}}{e^{-(c(x_\alpha-x_0))^a} - e^{-(c(x_\beta-x_0))^a}} & , x_\alpha \leq x \leq x_\beta \\ 1 & , x > x_\beta \end{cases} \quad (12)$$

границы доверительной области при заданном значении p по формуле

$$x_p = \frac{1}{c} \left(-\ln(1 - \Theta p) \right)^{\frac{1}{a}} + x_0, \quad \Theta = \frac{1}{e^{-(c(x_\alpha-x_0))^a} - e^{-(c(x_\beta-x_0))^a}}. \quad (13)$$

Представленные формулы применялись при определении доверительных интервалов в процессе моделирования для средней расчетной траектории. Подобным образом были обработаны результаты имитационного моделирования макроэкономических показателей Греции, Дании и Испании.

Рекуррентные соотношения (6)–(8) были использованы для проведения вычислительных экспериментов, в которых строились и оценивались траектории роста макроэкономических показателей. Расчеты выполнялись средствами системы MATLAB. Для моделирования значений случайной величины ξ_t применялся встроенный датчик псевдослучайных чисел `randn`, генерирующий выборку из стандартного нормального распределения.

4. Экспериментальные расчеты

Рассмотрим возможности обоснования траекторий указанных выше макроэкономических показателей в режиме имитации, используя реальные данные развития экономики Греции, Дании и Испании в период до и после мирового экономического кризиса 2008 г., и проведем сравнительный анализ фактических и средних расчетных траекторий за период с 2004 по 2013 г.

Были выбраны два макроэкономических показателя: валовой внутренний продукт и размер расходов на потребление. На основе применения дискретной аппроксимации уравнений стохастической модели роста (соотношения (6)–(8)) было выполнено построение траекторий макроэкономических показателей в режиме имитации с учетом реальных данных развития экономики указанных стран в период как до, так и после мирового экономического кризиса 2008 г. Далее был проведен сравнительный анализ фактических и средних расчетных траекторий за период с 2004 по 2013 г. Были выделены два временных периода и показано, что если в период до 2008 г. экономика как Греции, так и Дании или Испании показывала определенный экономический рост, то после 2008 г. для Греции и для Испании наблюдался спад, а для экономики Дании — некоторый застой, наиболее четко выраженный начиная с 2011 г.

Как отмечено выше, в статистике нет значения капитала, определяемого в соответствии с требованиями АК-модели. Поэтому необходимое начальное значение объема рассматриваемого капитала было определено в соответствии с уравнением (1) с учетом исходного размера ВВП и выбранного начального значения технологического коэффициента. Используемые значения числовых параметров для модели Греции приведены в табл. 3, Дании — в табл. 5, Испании — в табл. 7.

В процессе экспериментальных расчетов в режиме имитации, которые были выполнены в среде MATLAB, для указанных показателей были построены 2500 траекторий для каждой страны на каждом выделенном интервале, а также выполнены расчеты средней расчетной траектории.

Для определения границ доверительной области численно решалась задача нахождения параметров распределения методом максимального правдоподобия в каждом сечении моделируемого процесса с учетом соотношений (9)–(13). Затем границы доверительной области вычислялись как соответствующие квантили распределения.

4.1. Прогнозирование макроэкономических показателей Греции

Экспериментальные расчеты траекторий рассматриваемых макроэкономических показателей были выполнены с учетом данных экономики Греции (табл. 1), которые показывают две четкие тенденции их изменения. Можно выделить предкризисный период с 2004 по 2008 г. и послекризисный период с 2008 по 2013 г.

В процессе расчетов в режиме имитации в качестве начальных значений ВВП и потребления использованы данные для макроэкономических показателей за 2004 и 2008 гг. (табл. 1). В табл. 2 приведены выбранные и использованные в процессе экспериментальных расчетов значения числовых параметров уравнений (6)–(8).

При выполнении экспериментальных расчетов в режиме имитации для определения ВВП было использовано рекуррентное соотношение (6), а для размера

Таблица 1. Данные о макроэкономических показателях Греции за 2004–2013 гг.

Год	ВВП, млрд долл.	Потребительские расходы	
		млрд долл.	доля в ВВП, %
2004	228,0	196,6	86,2
2005	240,1	211,0	87,9
2006	261,7	227,1	86,8
2007	305,4	267,0	87,4
2008	341,6	309,1	90,5
2009	321,0	298,2	92,9
2010	294,2	269,9	91,7
2011	289,9	266,6	92,0
2012	248,4	226,4	91,1
2013	241,7	216,7	89,6

Источник: URL: http://www.be5.biz/makroekonomika/gdp/gdp_greece.html#main (дата обращения: 16.06.2015); http://www.be5.biz/makroekonomika/consumption_expenditure/consumption_expenditure_greece.html#main (дата обращения: 16.06.2015).

Таблица 2. Числовые параметры для модели прогнозирования Греции

Начальный год	Числовые параметры		
	A_0	δ	σ
2004	6,67	-0,99	0,15
2008	0,5	0,92	0,15

потребления — рекуррентное соотношение (8). На рис. 1 представлены 80 траекторий каждого показателя, которые были получены в режиме имитации, за период с 2004 по 2008 г., траектория среднего значения, вычисленная по 2500 траекториям, а также показаны границы 50%-ной доверительной области. Очевидно, что наблюдаемой тенденции изменения фактического роста обоих показателей в каждом случае примерно соответствует тенденция изменения средней расчетной траектории.

Особенность построения имитируемых траекторий ВВП и расходов на потребление Греции за период 2008–2013 гг. (рис. 2) состоит в том, что для учета спада экономики Греции за данный период оказалось достаточным преобразовать исходные числовые параметры полученных рекуррентных соотношений таким образом, чтобы имитируемые траектории отражали этот спад.

Необходимость такого преобразования исходных данных может быть установлена в тот период времени, когда происходит смена тенденции изменения рассматриваемого макроэкономического показателя, а возможность его практического осуществления определяется тем, что для построения прогноза в рамках предлагаемого метода используются только начальные значения этих показателей.

На рис. 2, аналогично рис. 1, представлены 80 траекторий каждого показателя за период с 2008 по 2013 г., а также траектория среднего значения обоих показателей, каждое из которых вычислено по 2500 траекториям, полученным в режиме имитации; приведены 50%-ные границы доверительной области. Очевидна наблюдаемая тенденция фактического спада экономики и сокращения значений обоих показателей. При этом тенденция их изменения соответствует тенденции измене-

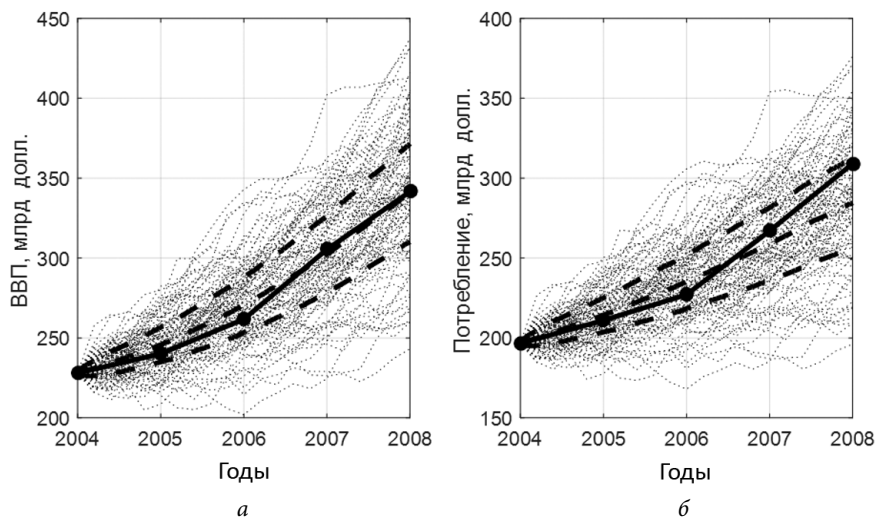


Рис. 1. Траектории ВВП (а) и потребления (б) для экономики Греции (2004–2008 гг.)

Обозначения:

--- результат моделирования; - - - среднее значение и границы 50%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); -●- статистические данные.

ния средней расчетной траектории для каждого показателя. При заданных значениях числовых параметров фактическая траектория каждого из них располагается в пределах 50%-ного доверительного интервала.

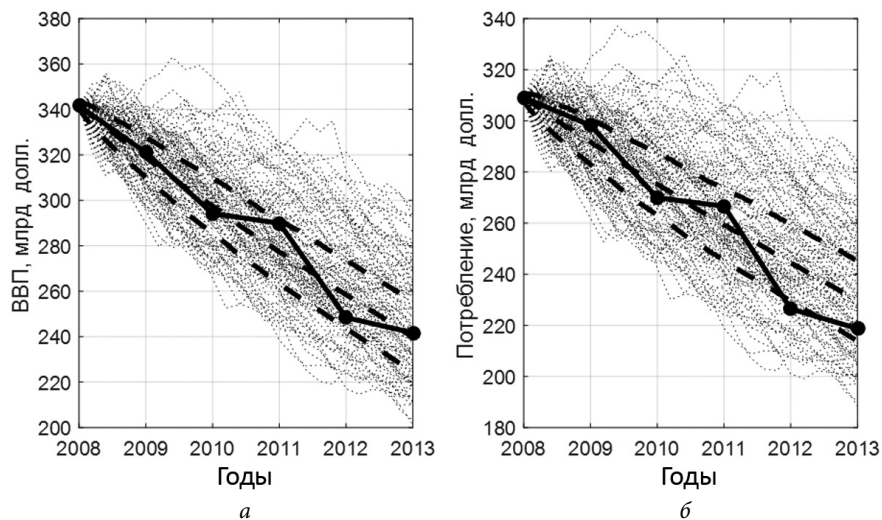


Рис. 2. Траектории ВВП (а) и расходов на потребление (б) для экономики Греции (2008–2013)

Обозначения:

--- результат моделирования; - - - среднее значение и границы 50%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); -●- статистические данные.

Использованные исходные значения макроэкономических показателей на начало рассматриваемого периода и выбранные значения числовых параметров уравнений (6) и (8) (см. табл. 2) позволили, во-первых, обеспечить определенное соответствие средней расчетной траектории ВВП и расходов на потребление Греции фактическим значениям этих показателей; во-вторых, показать, что прогноз рассматриваемых показателей экономики Греции, осуществляемый на основе средней расчетной траектории, которая формируется в режиме имитации, отражает фактическую динамику ВВП и расходов на потребление данной страны в течение каждого рассматриваемого периода; в-третьих, обеспечить попадание фактических траекторий ВВП и расходов на потребление Греции в 50%-ный доверительный интервал для каждого показателя.

4.2. Прогнозирование макроэкономических показателей Дании

При анализе экономики Дании за рассматриваемый период были учтены фактические данные, представленные в табл. 3. При проведении расчетов были выделены два периода: 2004–2008 гг. и 2009–2013 гг. Причем 2009 г. был выбран как год, в котором можно было наблюдать некоторое изменение динамики показателей, а 2011 г. — для иллюстрации возможностей построения прогноза с учетом наблюдаемого начала преобразования фактической траектории.

Таблица 3. Данные о макроэкономических показателях Дании за 2004–2013 гг.

Год	ВВП, млрд долл.	Потребительские расходы	
		млрд долл.	доля в ВВП, %
2004	251,2	182,6	72,7
2005	264,6	191,2	72,3
2006	283,0	202,6	71,6
2007	319,5	229,4	71,8
2008	352,6	256,1	72,6
2009	319,8	245,4	76,8
2010	319,8	241,4	75,5
2011	341,4	256,7	75,2
2012	321,7	244,2	75,9
2013	336,7	254,6	75,6

Источник: URL: http://www.be5.biz/makroekonomika/gdp/gdp_denmark.html#main (дата обращения: 16.06.2015); http://www.be5.biz/makroekonomika/consumption_expenditure/consumption_expenditure_denmark.html#main (дата обращения: 16.06.2015).

Исходные значения числовых параметров, использованные в процессе моделирования траекторий роста экономики Дании в режиме имитации, даны в табл. 4.

Таблица 4. Числовые параметры для модели прогнозирования Дании

Начальный год	Числовые параметры		
	A_0	δ	σ
2004	4,55	-0,35	0,15
2009	0,2	0,17	0,15

На рис. 3 представлены 80 траекторий рассматриваемых макроэкономических показателей из 2500 полученных в режиме имитации за предкризисный период (2004–2008 гг.).

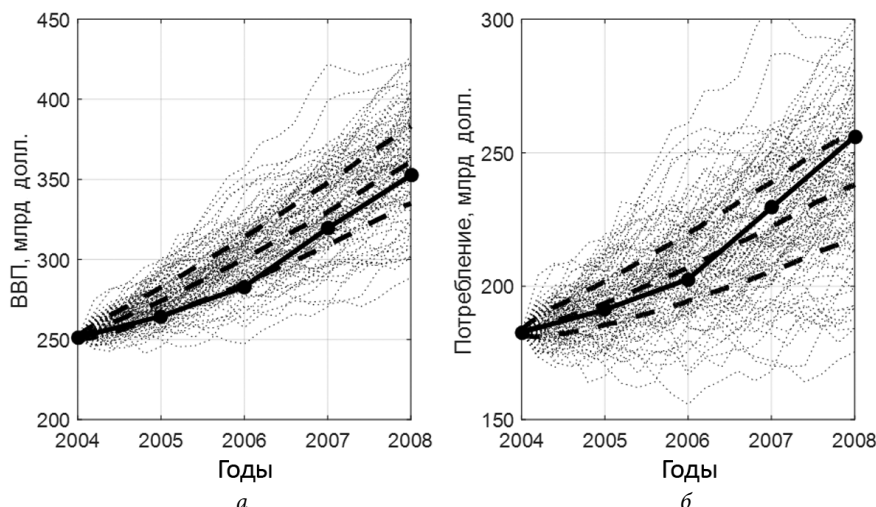


Рис. 3. Траектории ВВП (а) и расходов на потребление (б) для экономики Дании (2004–2008)

Обозначения:

- - - результат моделирования; - - - среднее значение и границы 50%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); -●- статистические данные.

Анализируя полученные графики (см. рис. 3), можно сделать вывод о том, что так же, как и для Греции, для макроэкономических показателей Дании наблюдался экономический рост в указанный период. Выбранные значения числовых параметров обеспечивают попадание фактической траектории ВВП и расходов на потребление в пределы 50%-ной границы доверительной области. Средние расчетные траектории, полученные по 2500 расчетным траекториям, отражают экономический рост и соответствуют тенденциям изменения ВВП и расходов на потребление в Дании за рассматриваемый период.

На рис. 4 показаны траектории ВВП и потребительских расходов Дании в период после кризиса (2009–2013 гг.). Принимая во внимание эти графики, можно отметить, что, в отличие от экономики Греции, для экономики Дании в течение 2009–2013 гг. четкого спада экономики не наблюдается. Для нее характерны колебания рассматриваемых показателей в обе стороны при сохранении тенденции очень незначительного экономического роста в указанный период.

По-прежнему выбор исходных значений числовых параметров выполнен так, чтобы обеспечить попадание фактических траекторий ВВП и расходов на потребление в пределы 50%-ной границы доверительной области. Средняя расчетная траектория, построенная по 2500 траекториям, полученным в режиме имитации, соответствует тенденции изменения ВВП и расходов на потребление Дании за 2009–2013 гг. Прогноз рассматриваемых показателей экономики Дании, осуществляемый на ее основе, в целом отражает общее направление развития экономики этой страны начиная с 2009 г.

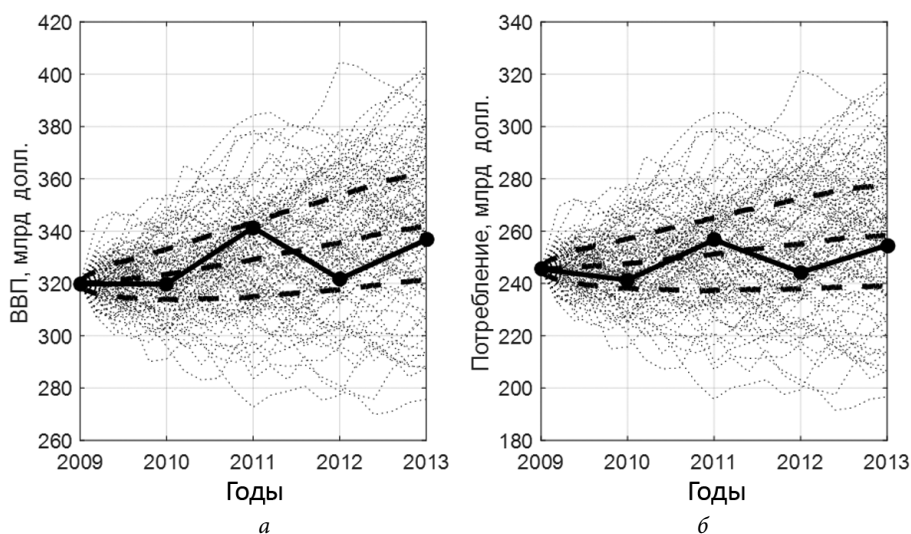


Рис. 4. Траектории ВВП (а) и потребления (б) для экономики Дании за 2009–2013 гг.

Обозначения:

--- результат моделирования; - - - среднее значение и границы 50%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); ● – статистические данные.

Теоретические проблемы анализа полученных результатов состоят в том, что в условиях данного примера для Греции и Дании значение нормы выбытия капитала отрицательное (см. табл. 2 и табл. 4). В рамках данного подхода к прогнозированию это свидетельствует о том, что какие-то факторы, оказывающие влияние на размер ВВП и расходов на потребление, в модели не учтены, что неудивительно, поскольку используется модель закрытой экономики. Отметим, что на качестве прогноза это условие никак не сказывается. Ниже для примера рассмотрим специфику построения подобных прогнозов (при условии, что макроэкономические показатели определены в постоянных ценах) и покажем возможности получения положительного значения этого параметра.

4.3. Прогнозирование макроэкономических показателей Испании

В данном разделе обратим внимание на особенности прогнозирования роста более крупной экономики Европы на примере Испании, достаточно развитой европейской страны. ВВП Испании в 2008 г. составлял 1593,4 млрд долл. США. По этому показателю Испания занимала 10-е место в мире и была примерно на таком же уровне, как следующие страны: Россия (1660,8 млрд долл.), Бразилия (1653,5 млрд долл.), Канада (1542,6 млрд долл.).

При анализе экономики Испании за рассматриваемый период были учтены фактические данные, представленные в табл. 5. При проведении расчетов были выделены два периода: 2004–2008 гг. и 2009–2012 гг. Причем 2009 г. был выбран как год, в котором можно было наблюдать некоторое изменение динамики ВВП и размера потребительских расходов в Испании.

Таблица 5. Данные о макроэкономических показателях Испании за 2004–2013 гг.

Год	ВВП, млрд долл.	Потребительские расходы	
		млрд долл.	доля в ВВП, %
2004	1044,6	790,7	75,69
2005	1130,8	856,4	75,73
2006	1236,4	932,4	75,41
2007	1441,4	1091,8	75,75
2008	1593,4	1222,2	76,70
2009	1454,3	1134,1	77,98
2010	1384,8	1098,8	79,35
2011	1454,5	1160,8	79,81
2012	1322,5	1051,4	79,50
2013	1358,3	1077,6	79,33

Источник: URL: http://www.be5.biz/makroekonomika/gdp/gdp_spain.html (дата обращения: 15.03.2016); http://www.be5.biz/makroekonomika/consumption_expenditure/consumption_expenditure_spain.html (дата обращения: 15.03.2016).

Исходные значения числовых параметров, использованные в процессе моделирования траекторий роста экономики Испании в режиме имитации, даны в табл. 6.

Таблица 6. Числовые параметры для модели прогнозирования Испании

Начальный год	Числовые параметры		
	A_0	δ	σ
2004	4,55	-0,81	0,15
2009	0,42	0,72	0,15

На рис. 5 представлены 80 траекторий рассматриваемых макроэкономических показателей из 2500 полученных в режиме имитации за предкризисный период 2004–2008 гг. В течение этого времени экономика Испании успешно развивалась, ее ВВП и объемы потребительских расходов возрастали, что наглядно показано на рис. 6. Так же как и при расчетах по данным Греции и Дании, выбранные значения числовых параметров обеспечивают попадание фактической траектории ВВП и расходов на потребление в пределы 50%-ной границы доверительной области. Средние расчетные траектории, полученные по 2500 расчетным траекториям, отражают экономический рост и соответствуют тенденциям изменения ВВП и расходов на потребление в Испании за рассматриваемый период.

Экономический кризис затронул экономику Испании так же, как и все остальные страны мира, но можно отметить, что падение рассматриваемых макроэкономических показателей для этой страны было относительно меньше, чем Греции, хотя устойчивая тенденция к сокращению указанных показателей в 2009–2012 гг. достаточно очевидна (рис. 6). В течение 2008–2013 гг. ВВП Испании сократился на 235,1 млрд долл., или на 14,8%, до значения 1358,3 млрд долл. Внешние кризисные воздействия и шоки, которые оказались наложенными на внутренние диспропорции, обусловленные, прежде всего, падением доходов от туризма, спровоцировали общее падение ВВП и других макроэкономических показателей.

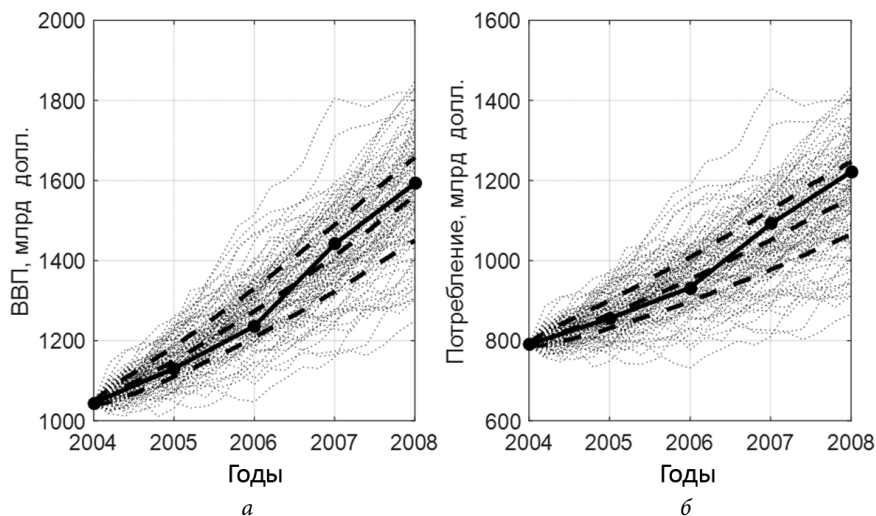


Рис. 5. Траектории ВВП (а) и расходов на потребление (б) для экономики Испании за 2004–2008 гг.

Обозначения:

--- результат моделирования; --- среднее значение и границы 50%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); ● – статистические данные.

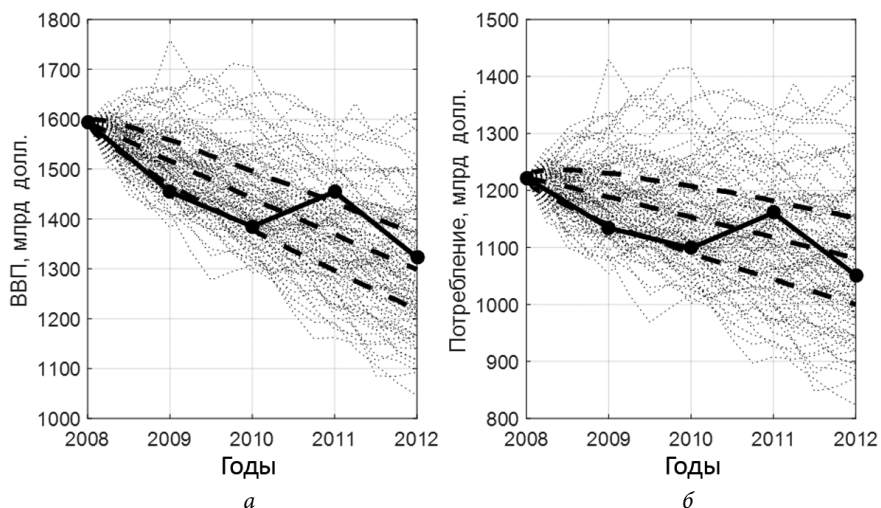


Рис. 6. Траектории ВВП (а) и потребления (б) для экономики Испании за 2009–2012 гг.

Обозначения:

--- результат моделирования; --- среднее значение и границы 50%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); ● – статистические данные.

На рис. 6 показаны 80 траекторий ВВП и потребительских расходов Испании, полученные в режиме имитации в период после кризиса (2009–2012 гг.), средняя расчетная траектория, определенная по 2500 траекториям, и фактические траектории обоих рассматриваемых показателей. Выбранные значения исходных пара-

метров модели (см. табл. 6) обеспечивают попадание фактических траекторий ВВП и потребительских расходов в пределы 50%-ного доверительного интервала, за исключением ВВП в 2011 г., значение которого немного выходит за пределы этого интервала.

4.4. Прогнозирование макроэкономических показателей, рассчитываемых в постоянных ценах

Перейдем к рассмотрению ВПП и расходов на потребление в постоянных ценах 1970 г. и проанализируем для примера данные экономики Греции. Очевидно, что в данном случае как размер обоих показателей, так и их колебания становятся относительно меньше (табл. 7). Но при этом сохраняются указанные выше тенденции рассматриваемых показателей Греции для экономики в предкризисном периоде с 2004 по 2008 г. и после кризисного — с 2008 по 2013 г.

Таблица 7. Данные о макроэкономических показателях Греции за 2004–2013 гг.

Год	ВВП, млрд долл. (постоянные цены 1970 г.)	Потребительские расходы	
		млрд долл. (постоянные цены 1970 г.)	доля в ВВП, %
2004	31,6	27,2	86,2
2005	32,3	28,4	87,9
2006	34,1	29,6	86,8
2007	35,3	30,8	87,4
2008	35,2	31,9	90,5
2009	34,1	31,7	92,9
2010	32,4	29,7	91,7
2011	30,1	27,7	92,0
2012	28,0	25,5	91,1
2013	26,9	24,1	89,6

Источник: URL: http://www.be5.biz/makroekonomika/gdp/gdp_greece.html#main (дата обращения: 16.06.2015); http://www.be5.biz/makroekonomika/consumption_expenditure/consumption_expenditure_greece.html#main (дата обращения: 16.06.2015).

В данном случае экспериментальный анализ показал, что можно выделить положительные значения нормы выбытия капитала (табл. 8), которые в каждом случае позволяют обеспечить попадание фактической траектории обоих показателей в 50%-ный доверительный интервал; там же приведены выбранные значения остальных числовых параметров уравнений (6)–(8).

Таблица 8. Значения числовых параметров для модели Греции при расчетах в постоянных ценах 1970 г.

Начальный год	Числовые параметры		
	A_0	δ	σ
2004	0,59	0,39	0,15
2008	0,41	0,64	0,15

С учетом значений ВВП и расходов на потребление Греции за 2004 и 2008 гг. были выполнены расчеты динамики ВВП в режиме имитации. При этом использовались рекуррентные соотношения (6) и (8).

На рис.7 представлены 80 траекторий каждого показателя, полученных в режиме имитации, за период с 2004 по 2008 г., траектория среднего значения, вычисленная по 2500 имитациям, а также показаны границы 50%-ной доверительной области. Наблюдаемой тенденции изменения фактического роста обоих показателей в каждом случае примерно соответствует тенденция изменения средней расчетной траектории. Значительно более динамичными оказались траектории ВВП и расходов на потребление за второй период (рис. 8), на котором по-прежнему показаны 50%-ные границы доверительной области, в пределах которых располагаются фактические значения рассматриваемых показателей.

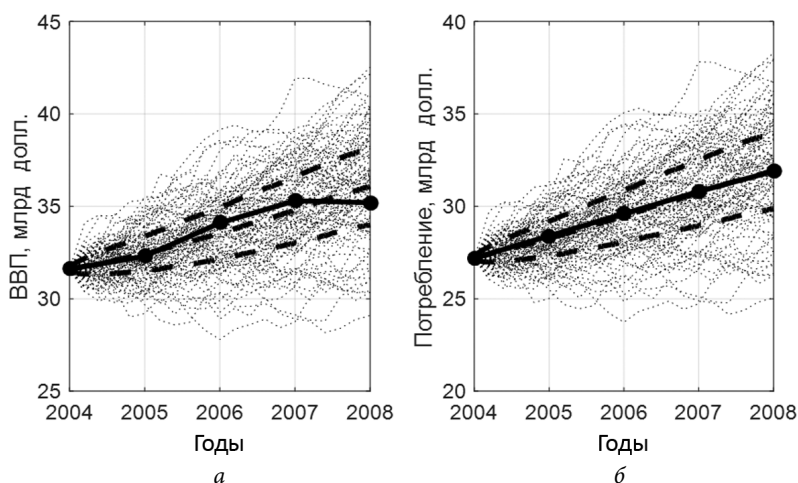


Рис. 7. Траектории ВВП (а) и потребления (б) для экономики Греции (2004–2008)

Обозначения:
 --- результат моделирования; --- среднее значение и границы 50%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); ●— статистические данные.

Использование фактических данных, определяемых на основе постоянных цен 1970 г., показало, что возможно обоснование положительной нормы выбытия капитала, позволяющей обеспечить в режиме имитации формирование 50%-ной границы доверительной области для фактических траекторий ВВП и расходов для потребления Греции за периоды 2004–2008 гг. и 2008–2013 гг.

Анализ динамики ВВП и потребительских расходов Испании в постоянных ценах 1970 г. также показал, что резко снижается интервал колебаний соответствующих макроэкономических показателей (табл. 9).

С учетом значений макроэкономических показателей (табл. 9) и выбранных значений параметров модели (табл. 10) при анализе и прогнозировании ВВП и потребительских расходов Испании в постоянных ценах за рассматриваемые периоды были получены следующие результаты.

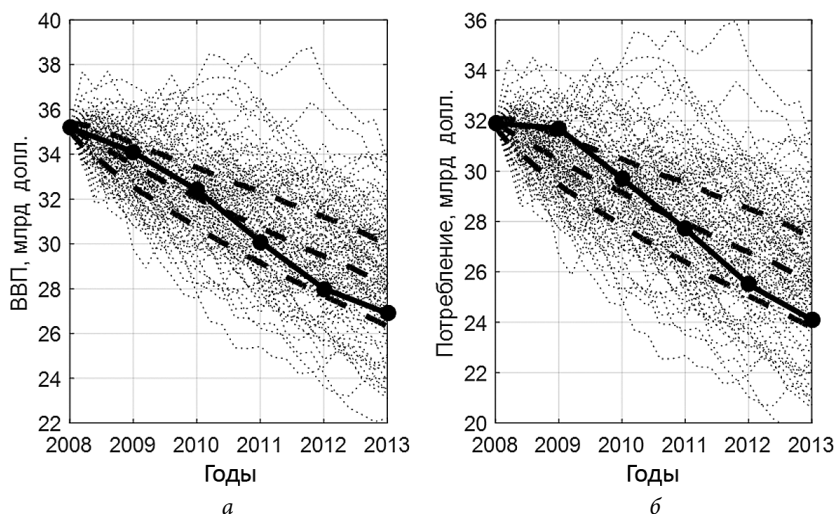


Рис. 8. Траектории ВВП (а) и расходов на потребление (б) для экономики Греции (2008–2013)

Обозначения:

--- результат моделирования; --- среднее значение и границы 50%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); -●- статистические данные.

Таблица 9. Макроэкономические показатели Испании за 2004–2013 гг. (постоянные цены 1970 г., млрд долл.)

Год	ВВП	Потребительские расходы	
		объем	доля в ВВП, %
2004	113,3	85,7	75,6
2005	117,3	88,9	75,8
2006	122,1	92,1	75,4
2007	126,4	95,7	75,7
2008	127,5	97,8	76,7
2009	122,6	95,6	78,0
2010	122,4	97,1	79,3
2011	122,4	97,7	79,8
2012	120,4	95,7	79,5
2013	118,9	94,4	79,4

Источник: URL: http://www.be5.biz/makroekonomika/gdp/gdp_spain.html (дата обращения: 16.06.2015); http://www.be5.biz/makroekonomika/consumption_expenditure/consumption_expenditure_spain.html (дата обращения: 16.06.2015).

Таблица 10. Значения числовых параметров для модели Испании при расчетах в постоянных ценах 1970 г.

Начальный год	Числовые параметры		
	A_0	δ	σ
2004	0,42	0,23	0,15
2008	0,33	0,435	0,15

На рис. 9 приведены определенные в режиме имитации в соответствии с уравнениями (6) и (8) 80 траекторий ВВП и расходов на потребление по данным экономики Испании за период 2004–2008 гг. Анализ графиков позволяет сделать вывод о том, что при использовании оценки ВВП и расходов на потребление в постоянных ценах 1970 г. средняя расчетная траектория, определенная по данным 2500 траекторий, полученных в режиме имитации, почти совпадает с фактической траекторией расходов на потребление и не очень значительно отличается от подобной траектории для ВВП.

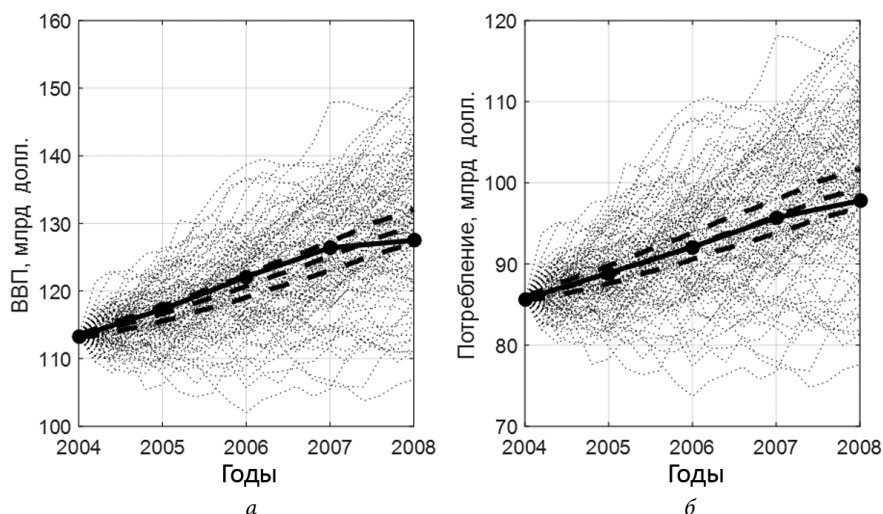


Рис. 9. Траектории ВВП (а) и потребления (б) для экономики Испании (2004–2008)

Обозначения:

--- результат моделирования; --- среднее значение и границы 20%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); ●— статистические данные.

При этом фактическая траектория ВВП и расходов на потребление располагается в пределах 20%-ного доверительного интервала. Приведенные на рис. 10 результаты расчетов в режиме имитации показывают, что в течение 2008–2012 гг. как ВВП, так и расходы на потребление Испании, выраженные в постоянных ценах, относительно стабилизируются при незначительной тенденции к их сокращению.

Так же, как для периода 2004–2008 гг., фактические траектории за период 2008–2012 гг. располагаются в пределах 20%-ного доверительного интервала, хотя и выходят на эту границу в определенные временные периоды (рис. 10).

Аналогично на основе исходных данных (табл. 11) и выбранных значений числовых параметров (табл. 12) было показано, что при расчетной положительной норме выбытия капитала и использовании постоянных цен 1970 г. для экономики Дании фактические траектории ВВП и расходов на потребление за оба рассматриваемых периода попали в пределы 25%-ной доверительной области (рис. 11 и 12).

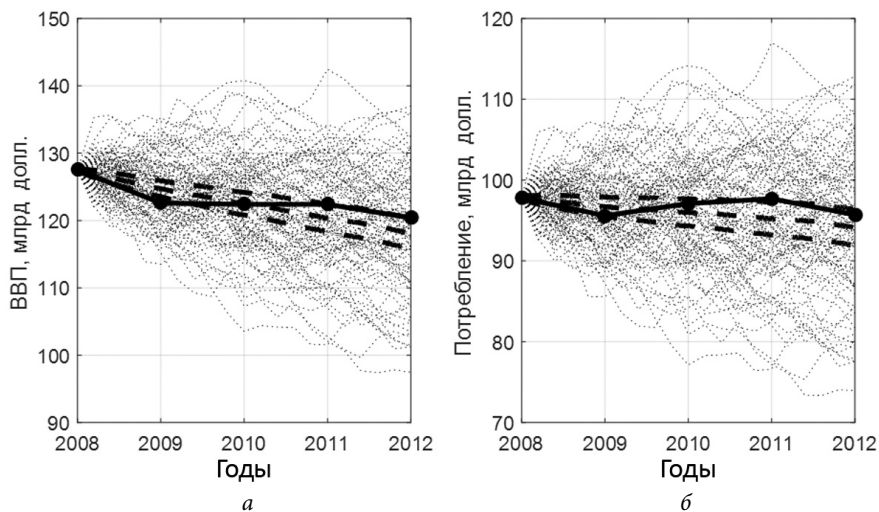


Рис. 10. Траектории ВВП (а) и расходов на потребление (б) для экономики Испании (2008–2012)

Обозначения:

--- результат моделирования; --- среднее значение и границы 25%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); ●— статистические данные.

Таблица 11. Данные о макроэкономических показателях Дании за 2004–2013 гг. (постоянные цены 1970 г., млрд долл.)

Год	ВВП, млрд долл.	Потребительские расходы	
		млрд долл.	доля в ВВП, %
2004	35,1	25,6	72,7
2005	36,0	26,0	72,3
2006	37,4	26,8	71,6
2007	37,7	27,1	71,8
2008	37,4	27,2	72,6
2009	35,5	27,3	76,8
2010	36,1	27,2	75,5
2011	36,5	27,5	75,2
2012	36,3	27,5	75,9
2013	36,2	27,4	75,6

Источник: URL: http://www.be5.biz/makroekonomika/gdp/gdp_denmark.html#main (дата обращения: 16.06.2015); http://www.be5.biz/makroekonomika/consumption_expenditure/consumption_expenditure_denmark.html#main (дата обращения: 16.06.2015).

Таблица 12. Значения числовых параметров для модели Дании при расчетах в постоянных ценах 1970 г.

Начальный год	Числовые параметры		
	A_0	δ	σ
2004	0,23	0,18	0,15
2008	0,32	0,33	0,15

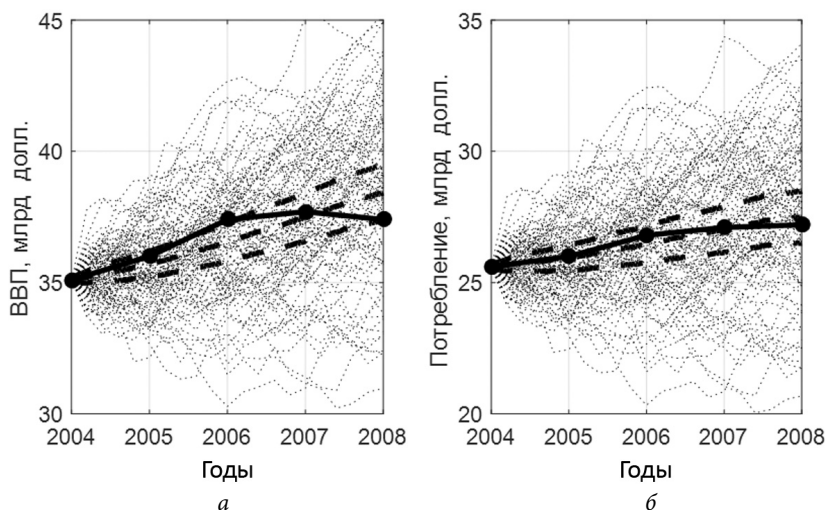


Рис. 11. Траектории ВВП (а) и расходов на потребление (б) для экономики Дании (2004–2008)

Обозначения:

--- результат моделирования; --- среднее значение и границы 25%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); ● – статистические данные.

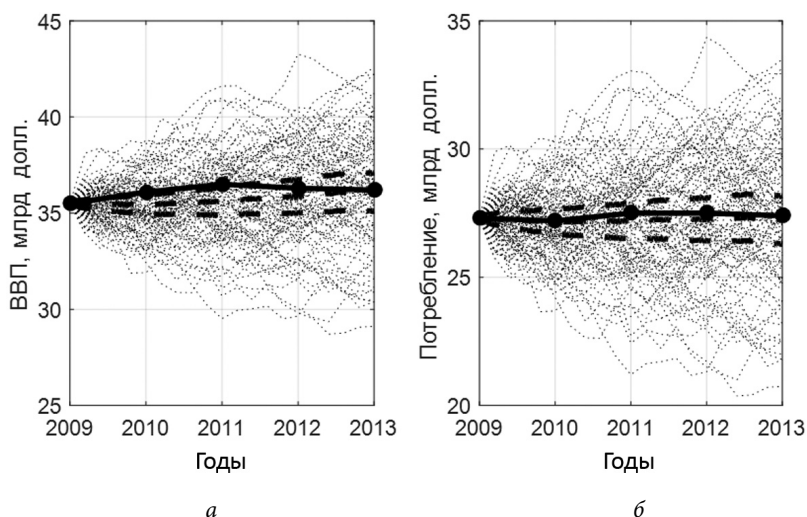


Рис. 12. Траектории ВВП (а) и расходов на потребление (б) для экономики Дании (2008–2013)

Обозначения:

--- результат моделирования; --- среднее значение и границы 25%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); ● – статистические данные.

Сокращение доверительных интервалов при использовании в расчетах постоянных цен, показанное на данных экономики Дании и Испании, позволяет существенно повысить качество прогноза анализируемых показателей в пределах рассматриваемых временных интервалов за счет выбора значений числовых па-

раметров модели. Но нужно иметь в виду, что это определяется относительным сужением границ изменений анализируемых макроэкономических показателей на данных интервалах. В принципе можно было бы говорить об удачной калибровке модели по отношению к анализируемому периоду, но результат в значительной степени определяется сокращением колебаний анализируемых макроэкономических показателей, учитываемых в постоянных ценах.

Заключение

В настоящее время в связи с усилением процессов глобализации возникает сомнение относительно правомерности использования данных прошлых периодов при обосновании текущих решений и прогнозировании экономики отдельных стран и регионов, и существенную роль при этом начинают играть методы, позволяющие строить прогнозы развития макроэкономики, опираясь на условия текущего состояния.

Современный подход к прогнозированию макроэкономического развития с учетом факторов неопределенности и риска состоит в использовании стохастических моделей экономического роста, предполагающих моделирование случайных переменных в форме приращений винеровских процессов и применении дискретной формы аппроксимации ограничений подобных моделей в форме рекуррентных соотношений.

Результаты экспериментальных расчетов в режиме имитации, учитывающие только начальные значения макроэкономических показателей, показали, что и для Греции, и для Дании и Испании в пределах выделенных временных интервалов возможно построение средней расчетной траектории, в принципе соответствующей фактической тенденции изменения рассматриваемого макроэкономического показателя. За счет подбора числовых параметров соотношений модели удалось обеспечить попадание фактических траекторий в пределы 50%-ного доверительного интервала. Получаемые результаты существенно зависят от выбираемых числовых параметров моделей и формы уравнений, применяемых для моделирования макроэкономических показателей. В определенном случае при использовании постоянных цен 1970 г. на примере экономики Испании и Дании удалось показать, что этот доверительный интервал может быть снижен даже до 20% и 25%.

Тем самым нашла свое подтверждение выдвинутая гипотеза о возможности обеспечения (путем изменения числовых параметров формируемых рекуррентных соотношений и принятия во внимание только текущего состояния экономики) определенного соответствия прогнозов, формируемых на основе средних расчетных траекторий, и фактического развития экономики с учетом точки поворота в условиях современного экономического кризиса.

Существенной проблемой применения предлагаемых методов прогнозирования является проблема калибровки модели, которая предполагает такой выбор числовых параметров модели, чтобы на заданном временном интервале обеспечить соответствие средней расчетной и фактической траекторий ВВП и других рассматриваемых макроэкономических показателей. Для этого были использованы экспериментальные методы обоснования параметров модели, которые позволили обеспечить попадание фактической траектории ВВП и расходов на потребление

в пределы 50%-ного доверительного интервала. Калибровка модели осуществлялась применительно к каждому рассматриваемому временному периоду. В принципе могут быть использованы и другие подходы к калибровке модели, например, основанные на статистических методах анализа соответствия теоретических и расчетных траекторий макроэкономических показателей.

Предлагаемый метод позволяет оперативно корректировать прогнозы в зависимости от первых же появлений той или иной смены тенденции развития макроэкономики. Используемый в данной статье метод выделения точки поворота основан на наблюдении за развитием экономики и корректировки прогноза при первых наблюдаемых изменениях тенденции развития макроэкономического показателя. В настоящей статье в качестве точки поворота рассматривался 2008 г., с которого начался мировой экономический кризис.

Совершенствование методов прогнозирования на основе дискретной аппроксимации стохастических процессов может быть связано с применением уточненного алгоритма Эйлера—Маруямы, опирающегося на применение более сложных разностных аппроксимаций стохастических уравнений, а также с анализом и других точек поворота, для обоснования которых можно использовать методы сценарного прогнозирования и т. п. Все это послужит предметом дальнейшего исследования авторов настоящей статьи.

Литература

- Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс / пер. с англ. М.: Радио и связь, 1988. 128 с.
- Барро Р., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост / пер. с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 824 с.
- Бланишар О., Фишер Ст. Лекции по макроэкономике / пер. с англ. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2014. 680 с.
- Вадзинский Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям. М.: Изд-во Наука, 2001. 296 с.
- Воронцовский А. В. Современные подходы к моделированию экономического роста // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 5. Экономика. 2010. Вып. 3. С. 105–119.
- Воронцовский А. В., Вьюненко Л. Ф. Построение траекторий развития экономики на основе аппроксимации условий стохастических моделей экономического роста // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 5. Экономика. 2014. Вып. 3. С. 123–147.
- Воронцовский А. В., Дикарев А. Ю. Прогнозирование макроэкономических показателей в режиме имитации на основе стохастических моделей экономического роста // Финансы и Бизнес. 2013. № 2. С. 33–51.
- Воронцовский А. В., Лебедев Т. А. Моделирование технического развития с учетом диффузии техники и технологии // Финансы и бизнес. 2015. Вып. 2. С. 6–21.
- Доугерти К. Введение в эконометрику: учебник. 2-е изд. / пер. с англ. М.: ИНФРА-М, 2004. 432 с.
- Ермаков С. М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике. СПб.: Невский Диалект, Бином. Лаборатория знаний, 2009. 192 с.
- Кузнецов Д. Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2007. 776 с.
- Люу Ю.-Д. Методы и алгоритмы финансовой математики / пер. с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 751 с.
- Моделирование экономического роста в условиях современной экономики / под ред. А. В. Воронцовского. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2011. 284 с.
- Современная макроэкономика: избранные главы: учебник / под ред. А. В. Воронцовского. М.: РГ-Пресс, 2013. 408 с.
- Сток Дж., Уотсон М. Введение в эконометрику / пер. с англ. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2015. 864 с.
- Уикенс М. Макроэкономическая теория: подход динамического общего равновесия / пер. с англ. М.: Издательский дом «Дело», 2015. 736 с.

- Brock W., Mirman L. Optimal Economic Growth under Uncertainty: Discounted Case // *Journal Economic Theory*. 1972. Vol. 4 (3). P. 479–513.
- Cass D. Optimal growth in an aggregate model of capital accumulation // *Review of Economic Studies*. 1965. Vol. 32. P. 233–240.
- Frankel M. The Production Function in Allocation and Growth: a Synthesis // *American Economic Review*. 1962. Vol. 52. P. 996–1022.
- García-Peñalosa C., Turnovsky S.J. Growth and Income Inequality: A Canonical Model // *Economic Theory*. 2006. Vol. 28. P. 25–49.
- Griliches Z. Issues in Assessing the Contribution of Research and Development to Productivity Growth // *Bell Journal of Economics*. 1979. Vol. 10. P. 92–116.
- Kim H.H., Swanson N.R. Forecasting financial and macroeconomic variables using data reduction methods: New empirical evidence // *Journal of Econometrics*. 2014. Vol. 178. P. 352–368.
- Koopmans T.J. Objectives, constraints and outcomes in optimal growth models // *Econometrica*. 1967. Vol. 46. P. 185–200.
- Li H., Xiao L., Ye J. Strong predictor-corrector Euler–Maruyama methods for stochastic differential equations with Markovian switching // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2013. Vol. 237, issue 1. P. 5–17.
- Loll T. Forecasting economic time series using locally stationary processes (a new approach with applications). Frankfurt am Main [u.a.], Lang, 2012. 138 p.
- Lukas R. On the Mechanism of Economics Development // *Journal of Monetary Economics*. 1988. Vol. 22. P. 3–42.
- Niederreiter H. Random number generation and quasi-Monte Carlo methods. Philadelphia, Pa: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 241 p.
- Romer P. Increasing Returns and Long-Run Growth // *Journal of Political Economy*. 1986. Vol. 94. P. 1002–1037.
- Smets F., Wouters R. An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area // *Journal of European Economic Association*. 2003. Vol. 1, no. 5. P. 1123–1175.
- Tkacz Gr. Macroeconomic forecasting. London: Routledge, 2013. 288 p.
- Turnovsky S. Optimal Stabilization Policies for Deterministic and Stochastic Linear System // *Review of Economic Studies*. 1973. Vol. 40, no. 121. P. 79–96.
- Turnovsky S.J. *Methods of Macroeconomic Dynamics*. Cambridge: MIT Press, 2000. 671 p.
- Turnovsky S.J. On the Role of Small Models in Macrodynamics // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2011. Vol. 35. P. 1605–1613.
- Turnovsky S.J., Yu-chin Chen. Growth and Inequality Tradeoffs in a Small Open Economy // *Journal of Macroeconomics*. 2010. Vol. 32. P. 497–514.
- Waelde K. Production technologies in stochastic continuous time models // *Journal of Economic Dynamics & Control*. 2011. Vol. 35. P. 616–622.
- Wu Fuke, Mao Xuerong, Kloeden P.E. Almost sure exponential stability of the Euler-Maruyama approximations for stochastic functional differential equations // *Random Operators and Stochastic Equations*. 2011. Vol. 19(2). P. 165–186.

Для цитирования: Воронцовский А. В., Вьюненко Л. Ф. Прогнозирование развития экономики на основе стохастической модели экономического роста с учетом точки поворота // *Вестник СПбГУ. Серия 5. Экономика*. 2016. Вып. 4. С. 4–32. DOI: 10.21638/11701/spbu05.2016.401.

References

- Bandi B. *Metody optimizatsii. Vvodnyi kurs [Optimization methods. Introductory course]*. Transl. from engl. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1988. 128 p. (In Russian)
- Barro R., Sala-i-Martin Kh. *Ekonomicheskii rost [Economic Growth]*. Transl. from engl. Moscow, BINOM. Laboratoriia znanii Publ., 2010. 824 p. (In Russian)
- Blanshar O., Fisher St. *Lektsii po makroekonomike [Lectures on Macroeconomics]*. Transl. from engl. Moscow, Publ. House "Delo" RANKhiGS, 2014. 680 p. (In Russian)
- Vadzinskii R. N. *Spravochnik po veroiatnostnym raspredeleniiam [Handbook of probability distributions]*. Moscow, Nauka Publ., 2001. 296 p. (In Russian)
- Vorontsovskii A. V. *Sovremennyye podkhody k modelirovaniuu ekonomicheskogo rosta [Modern approaches to the modeling of economic growth]*. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 5. Economics*, 2010, issue 3, pp. 105–119. (In Russian)

- Vorontsovskii A. V., V'iunenko L. F. Postroenie traektorii razvitiia ekonomiki na osnove approksimatsii uslovii stokhasticheskikh modeli ekonomicheskogo rosta [Construction of Economic Development Trajectories by Approximating of Conditions of Stochastic models of Economic Growth]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 5. Economics*, 2014, issue 3, pp. 123–147. (In Russian)
- Vorontsovskii A. V., Dikarev A. Iu. Prognozirovaniie makroekonomicheskikh pokazatelei v rezhime imitatsii na osnove stokhasticheskikh modeli ekonomicheskogo rosta [Forecasting macroeconomic indicators in simulation mode based on stochastic models of economic growth]. *Finansy i Biznes*, 2013, no. 2, pp. 33–51. (In Russian)
- Vorontsovskii A. V., Lebedev T. A. Modelirovaniie tekhnicheskogo razvitiia s uchedom diffuzii tekhniki i tekhnologii [Modeling of technological development based on the diffusion techniques and technology]. *Finansy i biznes*, 2015, issue 2, pp. 6–21. (In Russian)
- Dougerti K. *Vvedenie v ekonometriku: uchebnik [Introduction to Econometrics]*. 2nd ed. Transl. from engl. Moscow, INFRA-M Publ., 2004. 432 p. (In Russian)
- Ermakov S. M. *Metod Monte-Karlo v vychislitel'noi matematike [The Monte Carlo method in computational mathematics]*. St. Petersburg, Nevskii Dialekt, Binom. Laboratoriia znanii Publ., 2009. 192 p. (In Russian)
- Kuznetsov D. F. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniia: teoriia i praktika chislennogo resheniia [Stochastic differential equations: theory and practice of numerical solution]*. St. Petersburg, Publ. Politekhnikeskiiy univ., 2007. 776 p. (In Russian)
- Liuu Iu.-D. *Metody i algoritmy finansovoi matematiki [Financial Engineering and Computation]*. Transl. from engl. Moscow, BINOM. Laboratoriia znanii Publ., 2007. 751 p. (In Russian)
- Modelirovaniie ekonomicheskogo rosta v usloviakh sovremennoi ekonomiki [Modeling economic growth in the modern economy]*. Ed. by A. V. Vorontsovskii. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press, 2011. 284 p. (In Russian)
- Sovremennaiia makroekonomika: izbrannye glavy: uchebnik [Modern macroeconomics: selected chapters]*. Ed. by A. V. Vorontsovskii. Moscow, RG-Press, 2013. 408 p. (In Russian)
- Stok Dzh., Uotson M. *Vvedenie v ekonometriku [Introduction to Econometrics]*. Transl. from engl. Moscow, Publ. House "Delo" RANKhiGS, 2015. 864 p. (In Russian)
- Uikens M. *Makroekonomicheskaiia teoriia: podkhod dinamicheskogo obshchego ravnovesiia [Macroeconomic Theory: A Dynamic General Equilibrium Approach]*. Transl. from engl. Moscow, Publ. House "Delo", 2015. 736 p. (In Russian)
- Brock W., Mirman L. Optimal Economic Growth under Uncertainty: Discounted Case. *Journal Economic Theory*, 1972, vol. 4 (3), pp. 479–513.
- Cass D. Optimal growth in an aggregate model of capital accumulation. *Review of Economic Studies*, 1965, vol. 32, pp. 233–240.
- Frankel M. The Production Function in Allocation and Growth: a Synthesis. *American Economic Review*, 1962, vol. 52, pp. 996–1022.
- García-Peñalosa C., Turnovsky S. J. Growth and Income Inequality: A Canonical Model. *Economic Theory*, 2006, vol. 28, pp. 25–49.
- Griliches Z. Issues in Assessing the Contribution of Research and Development to Productivity Growth. *Bell Journal of Economics*, 1979, vol. 10, pp. 92–116.
- Kim H. H., Swanson N. R. Forecasting financial and macroeconomic variables using data reduction methods: New empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 2014, vol. 178, pp. 352–368.
- Koopmans T. J. Objectives, constraints and outcomes in optimal growth models. *Econometrica*, 1967, vol. 46, pp. 185–200.
- Li H., Xiao L., Ye J. Strong predictor-corrector Euler-Maruyama methods for stochastic differential equations with Markovian switching. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2013, vol. 237, issue 1, pp. 5–17.
- Loll T. *Forecasting economic time series using locally stationary processes (a new approach with applications)*. Frankfurt am Main [u.a.], Lang, 2012. 138 p.
- Lukas R. On the Mechanism of Economics Development. *Journal of Monetary Economics*, 1988, vol. 22, pp. 3–42.
- Niederreiter H. *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*. Philadelphia, Pa, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 241 p.
- Romer P. Increasing Returns and Long-Run Growth. *Journal of Political Economy*, 1986, vol. 94, pp. 1002–1037.
- Smets F., Wouters R. An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area. *Journal of European Economic Association*, 2003, vol. 1, no. 5, pp. 1123–1175.
- Tkacz Gr. *Macroeconomic forecasting*. London, Routledge, 2013. 288 p.
- Turnovsky S. Optimal Stabilization Policies for Deterministic and Stochastic Linear System. *Review of Economic Studies*, 1973, vol. 40, no. 121, pp. 79–96.

- Turnovsky S. J. *Methods of Macroeconomic Dynamics*. Cambridge, MIT Press, 2000. 671 p.
- Turnovsky S. J. On the Role of Small Models in Macrodynamics. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2011, vol. 35, pp. 1605–1613.
- Turnovsky S. J., Yu-chin Chen. Growth and Inequality Tradeoffs in a Small Open Economy. *Journal of Macroeconomics*, 2010, vol. 32, pp. 497–514.
- Waelde K. Production technologies in stochastic continuous time models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2011, vol. 35, pp. 616–622.
- Wu Fuke, Mao Xuerong, Kloeden P. E. Almost sure exponential stability of the Euler-Maruyama approximations for stochastic functional differential equations. *Random Operators and Stochastic Equations*, 2011, vol. 19(2), pp. 165–186.
- For citation:** Vorontsovskiy A. V., Vyunenko L. F. Forecasting the economy development based on a stochastic model of economic growth given a turning point. *Vestnik SPbSU. Series 5. Economics*, 2016, issue 4, pp. 4–32. DOI: 10.21638/11701/spbu05.2016.401.

Статья поступила в редакцию 27 сентября 2016 г.
Статья рекомендована в печать 13 октября 2016 г.