

## МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 330.42+519.86

*А. В. Воронцовский, А. Л. Дмитриев*

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С УЧЕТОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ: ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР, ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ<sup>1</sup>

Статья содержит исторический обзор основных методов учета неопределенности в процессе макроэкономического моделирования экономического роста во второй половине XX — начале XXI в., анализ проблем и перспектив их развития в настоящее время. Выделены пять этапов разработки подходов к учету неопределенности в процессе моделирования экономического роста. Первый этап включает теорию адаптивных ожиданий, разработанную в первой половине 1950-х; второй — простейшие постановки стохастических моделей роста в начале 1970-х годов. Третий этап — середина 1980-х годов, в этот период были созданы модели реальных деловых циклов, в которых в числе случайных переменных рассматриваются шоки производительности. Четвертый этап: конец XX — начало XXI в., в течение которого были разработаны многопериодные стохастические модели экономического взаимодействия закрытой и малой открытой экономики. Пятый этап включает современные динамические стохастические модели общего равновесия, постановка которых опирается на развитие RBC-моделей и новую кейнсианскую теорию. Проанализирована гипотеза об аппроксимации неизвестных или неопределенных факторов в моделях экономического роста с помощью случайных процессов; показаны проблемы анализа и использования стохастических моделей экономического роста при прогнозировании развития экономики. Библиогр. 86 назв. Табл. 1.

*Ключевые слова:* теория адаптивных ожиданий, модели реальных деловых циклов, монетарные шоки и шоки производительности, малая открытая экономика, стохастические модели экономического роста, динамические модели общего равновесия.

*A. V. Vorontsovskiy, A. L. Dmitriev*

#### ECONOMIC GROWTH MODELING UNDER UNCERTAINTY OF MACROECONOMIC FACTORS: HISTORY REVIEW, PROBLEMS AND PROSPECTS

This article contains a historical overview of main methods dealing with uncertainty in macroeconomic modeling of economic growth in the second half of XX — beginning of XXI century as well as the prob-

---

**Алексей Владимирович ВОРОНЦОВСКИЙ** — доктор экономических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9; a.vorontsovskiy@econ.spbpu.ru

**Антон Леонидович ДМИТРИЕВ** — кандидат экономических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9; dmitr7171@mail.ru

**Aleksey V. VORONTSOVSKIY** — Doctor of Economics, Professor, St. Petersburg State University, 7/9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation; a.vorontsovskiy@econ.spbpu.ru

**Anton L. DMITRIEV** — Candidate of Economics, Associate Professor, St. Petersburg State University, 7/9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation; dmitr7171@mail.ru

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ 13.38.88.2012.

lems and prospects of its development at the moment. The article highlights five phases of approaches to modeling uncertainty of economic growth. The first stage involves the theory of adaptive expectations developed in the first half of 1950s, while second stage — the simplest formulation of stochastic growth models in the early 1970s. During the third stage (mid 1980s), the real business cycle models were elaborated, in which productivity shocks are considered as random variables; fourth stage covers end of XX — beginning of XXI century when multi-period stochastic models of economic interaction between the closed and the small open economies were developed. The fifth stage includes modern dynamic stochastic general equilibrium models, based on development of RBC-models and the new Keynesian theory. Hypothesis on approximation of unknown or uncertain factors in the economic growth models using stochastic processes is tested; problems of analysis and application of stochastic models for forecasting economic growth are distinguished. Refs 86. Table 1.

*Keywords:* theory of adaptive expectations, real business cycle models, monetary shocks and productivity shocks, small open economy, stochastic models of economic growth, dynamic stochastic general equilibrium models.

## 1. Введение

В условиях современной глобализации, преодоления последствий мирового финансового кризиса и возрастания влияния неопределенных или не известных заранее факторов на развитие экономики и экономический рост особое значение приобретает исследование возможностей моделирования макроэкономических параметров в форме случайных процессов в рамках различных классов стохастических моделей экономического роста.

Одно из первых направлений учета неопределенности в макромоделях связано с введением понятия «ожидания». Попытки учета ожиданий восходят к работам Ф. Найта (основная из них вышла в 1921 г. [Knight, 1921]) и Дж. М. Кейнса 1936 г. [Кейнс, 1993]. Затем подобные исследования были продолжены уже после Второй мировой войны в 1950–1960-е годы в работах Дж. Шекла [Shackle, 1955], Л. Койка [Koyck, 1954], П. Кейгана [Cagan, 1956], Г. Саймона [Simon, 1958], Дж. Мута [Muth, 1960].

Далее содержательные исследования возможностей использования случайных переменных при постановке макроэкономических моделей начались с 1970-х годов. В ряде работ предлагалось учитывать неопределенность в форме случайных переменных при моделировании инвестиций и издержек регулирования. Среди них можно отметить статью Р. Е. Лукаса и Е. К. Прескотта [Lucas, Prescott, 1971] и работу Р. К. Хартмана [Hartman, 1972], опубликованные в начале 1970-х годов; статьи П. К. Пиндайка [Pindyck, 1982] и А. Б. Абеля [Abel, 1983; 1985], появившиеся в 1980-е годы; статью А. Б. Абеля и Дж. Эберли [Abel, Eberly, 1994]. В этих работах речь шла лишь об учете шоковых переменных в отдельных ограничениях моделей, но не рассматривались постановки моделей экономического роста в целом. Определенный этап развития экономико-математического моделирования с учетом случайных факторов был связан с разработкой многопериодных моделей поведения потребителей, которые первоначально были положены в основу моделирования финансовых рынков. К наиболее значимым исследованиям относятся опубликованные во второй половине 1970-х годов работы М. Рубинштейна [Rubinstein, 1976], Р. Е. Лукаса [Lucas, 1978], а также Д. Бредена [Breedon, 1979]. Они заложили основы многопериодной потребительской модели ценообразования финансовых активов с учетом стохастического характера будущих доходов по ценным бумагам, которая может быть применена при моделировании поведения домашних хозяйств.

Первые постановки моделей макроэкономики с учетом случайных факторов появились еще в начале 1970-х годов. Это исследования У. Брока и Л. Мирмана [Brock, Mirman, 1972], С. Тарновского [Turnovsky, 1973], Тр. Бьюли [Bewley, 1977; 1980]. Дальнейшее развитие они получили при моделировании реальных деловых циклов. Среди авторов подхода следует отметить Ф. Кидлэнда и Е. Прескотта [Kydland, Prescott, 1982]. Развитию теории RBC-моделей посвящены работы испанского экономиста Х. Гали [Gali, 1999; 2008], а также совместная статья Х. Гали и Л. Рабанала [Gali, Rabanal, 2004].

В числе работ, опубликованных в конце 1990-х и начале 2000-х годов, в которых представлены различные варианты постановки стохастических моделей экономического роста для закрытой и малой открытой экономики, можно выделить исследования Е. Бенави, Е. Гринолса и С. Тарновского [Benavie, Grinols, Turnovsky, 1996]; Е. Гринолса и С. Тарновского [Grinols, Turnovsky, 1996], С. Тарновского и П. Чаттопадхайа [Turnovsky, Chattopadhyay, 2003], С. Тарновского [Turnovsky, 1999]. Современное направление стохастического моделирования экономического роста связано с постановкой и анализом динамических стохастических моделей общего равновесия (dynamic stochastic general equilibrium model, DSGE-model). Одними из первых использовали основные предпосылки неокейнсианской постановки DSGE-модели Ж. Ротемберг и М. Вудфорд [Rotemberg, Woodford, 1997]. Более развернутое изложение теории и особенностей применения DSGE-моделей дали Х. Гали [Galí, 2008] и М. Вудфорд [Woodford, 2003]. Современное изложение теории и практики применения моделей данного типа дано в 5-м издании учебника Д. Ромера [Romer, 2012]. В числе работ, посвященных в том числе и стохастическому моделированию экономического роста, можно отметить книгу М. Уикенса [Wickens, 2011].

Основное отличие от предыдущих исследований и определенная новизна результатов данной статьи обусловлены тем, что в ней, во-первых, на основе представленного исторического обзора существующих форм моделей макроэкономики выделены один предварительный и пять основных этапов развития теории моделирования экономического роста с учетом случайных факторов; во-вторых, проанализирована эволюция подходов к макроэкономическому прогнозированию с учетом различных гипотез относительно ожиданий экономических агентов; в-третьих, показано, что учет факторов неопределенности в форме случайных процессов для различных конкретных параметров моделей роста приводит к их существенному усложнению, затрудняет анализ и обоснование условий равновесия. В-четвертых, выдвинута гипотеза о том, что моделирование неопределенных однозначно или заранее не известных макроэкономических факторов в форме случайных процессов фактически означает аппроксимацию их влияния на макроэкономическое развитие без учета конкретного воздействия каждого из них; в-пятых, исследованы трудности прогнозирования экономического роста на базе подобных моделей и проблемы калибровки параметров моделей и тестирования соответствия их условий и выводов реальным экономическим процессам.

Задача исследования состоит в том, чтобы, принимая во внимание современное состояние научных достижений, выделить проблемы постановки моделей роста на предварительном и каждом из основных пяти этапов моделирования роста с учетом неопределенных макроэкономических факторов; проанализировать методологию учета неопределенных однозначно факторов в рассматриваемых моделях роста

в форме случайных процессов; обосновать возможности проверки выдвинутой гипотезы, показать специфику практического использования результатов и выводов анализа стохастических моделей экономического роста.

## 2. Подходы к моделированию неопределенности: становление и развитие

В данном разделе проанализируем предварительный этап моделирования неопределенных однозначно факторов, в процессе которого речь шла об уточнении понятий и определений, а также о формировании основных подходов. Один из подходов в макроэкономическом моделировании, связанный с учетом неопределенности, предусматривал учет ожиданий в поведении экономических агентов. До 1870 г. представители «чистой науки» не уделяли внимания этому вопросу, видимо, считая, что сама постановка вопроса бессодержательна, ибо анализировать можно то, что уже случилось или случится. Вера в автоматическое достижение равновесия приводила экономистов к мысли о том, что реакции, вызванные появлением неких нарушений в системе, оказывают моментальное воздействие. Отказ от такого представления привел бы к тому, что нужно было бы признать — периоды неравновесия могут продолжаться определенное время, укорачиваться или удлиняться. Следовательно, возникла бы необходимость объяснения процессов, происходящих в этих промежутках времени.

Время, рассматриваемое в больших промежутках, позволяет анализировать процесс изменения условий производства и потребления. В коротких периодах время необходимо для процесса приспособления, который не является немедленным. Продолжительность этого краткосрочного процесса создает условие для неравновесия. Такая логика рассуждения была свойственна еще представителям исторической школы в политической экономии в конце XIX — начале XX в., а также А. Маршаллу [Маршалл, 1993, с. 49–67]. Определенный интерес к оценке времени и его учету в экономических построениях в этот период проявлял О. Бём-Баверк еще в 1884 г., что нашло отражение в его работе [Бём-Баверк, 1909, с. 570]. В рассуждениях относительно неравновесия при рассмотрении теории кризисов в анализ вводился фактор времени. В начале XX в. Дж. Б. Кларк совершил попытку обновления экономической теории, объявив, что изучение динамики будет основным объектом исследований грядущих поколений [Clark, 1907]. По мнению Дж. Кларка, экономическая наука должна пойти по пути исследования динамических явлений, проявляющихся в росте населения, увеличении капитала, изменении технологии и форм организации процессов производства, расширении и повышении уровня потребностей индивида. С именем Кларка связана первая попытка разработки учения о динамике и статике. Статика имеет целью изучать результат «игры сил», которые приводят к равновесию (уровень цен, величина доходов, объем производства). Динамика же, по его мнению, должна изучать источники неравновесия и причины стихийного усиления неравновесия, а также силы, восстанавливающие равновесие в системе. Подчеркивалось, что одно из важнейших проявлений фактора времени и неопределенности выражается в ожиданиях экономических агентов. Дж. Б. Кларк в 1899 г. отмечал, что с помощью статической теории мы можем начать производить динамические исследования. Первым шагом должно стать изучение каждого из изменений в отдельности: как оно заставляет реальные ценности, заработную плату и процент

расходиться со статическими нормами и с колебаниями самих норм. Динамической теории остается показать, что происходит, когда эти изменения совершаются все вместе [Кларк, 1992, с. 389].

Классической работой, где впервые на вербальном уровне был поставлен вопрос учета при моделировании неопределенности и как следствия — ожиданий, стала книга Ф. Найта «Риск, неопределенность и прибыль» [Knight, 1921]. Однако в этой работе содержались скорее основные направления учета риска и неопределенности в поведении экономических объектов, но не методология его учета в моделях. Именно Ф. Найт впервые предложил изучать три формы экономической активности: статику, кинетику и динамику. Статика, по его мнению, определяла условия равновесия между силами в данный момент времени, кинетика — как в определенных условиях в течение небольшого промежутка времени будут действовать силы, которые стремятся реализовать равновесие, динамика изучала длительный период, показывала, что произойдет, если будут изменяться сами условия.

Фактор времени в экономическую теорию активно внедрял и П. Розенштейн-Родан [Rosenstein-Rodan, 1934]. Для него время — экономическое благо. Но экономическая теория, за исключением исследований О. Бём-Баверка, не признавала этого факта. Неоклассики, по мнению П. Розенштейна-Родана, верили в приспособление производства к потребностям, но они не ставили вопрос: «В течение какого времени происходит это приспособление?». П. Розенштейн-Родан обращал внимание на тот факт, что теория предельной полезности, описывая механизм выбора потребителя, совершенно не затрагивала условия выбора в разные периоды времени. Он отмечал, что в работах экономистов математического направления все экономические объемы рассматривались в изменяющемся состоянии, но при этом ничего не говорилось о продолжительности данного состояния. По его мнению, включение фактора времени в экономические построения приводит к тому, что нельзя более утверждать, что возврат к равновесию, после его нарушения, является мгновенным. Общее постоянное равновесие, согласно Розенштейну-Родану, должно включать следующие положения: 1) все реакции начинаются одновременно; 2) они имеют одинаковую продолжительность; 3) они протекают с одинаковой скоростью независимо от их продолжительности. Между тем в реальной жизни эти положения далеко не всегда выполняются. В случае избытка предложения, для того чтобы повышение цены вызвало рост спроса, необходимо время; в случае недостатка товаров, для того чтобы повышение цены привело к росту выпуска продукции, также нужно время. Восстановление равновесия на рынке всегда происходит с определенным лагом — необходимо время, чтобы начались восстановительные реакции и стали заметными результаты их действий. Розенштейн-Родан отметил, что обычно реакции, вызванные движением цены, на одних рынках протекают быстрее, а на других в силу неэластичности спроса и предложения — с некоторым опозданием. По существу, в рассуждениях Розенштейна-Родана впервые ставился вопрос о причинах неравновесия и о формах, в которых они развиваются и могут быть исправлены. В работе 1936 г. Дж. М. Кейнс отмечал неопределенность, которая господствует в экономике, и трактовал ее как неподдающуюся вероятностным оценкам величину [Кейнс, 1993, с. 343]. Вследствие этого инвестиции, по мысли Кейнса, обеспечивают колебания результатов вместе с колебаниями доверия во всех сферах деловой активности. Причем это доверие не находится ни в какой предсказуемой зависимости от стандартных эконо-

мических параметров. В дальнейшем некоторые последователи Кейнса считали, что в констатации этой принципиальной непредсказуемости и состоит «кейнсианская революция».

### 3. Теории ожиданий с учетом неопределенности

Первый содержательный этап моделирования случайных факторов при анализе макроэкономики связан с развитием теории ожиданий. Он начался в середине 1950-х годов.

**Адаптивные ожидания.** Гипотеза адаптивных ожиданий в простейшей конструкции была впервые предложена Л. Койком [Koyck, 1954]. В работе П. Кейгана представлено исследование спроса на деньги в период гиперинфляции [Cagan, 1956]. Работа М. Фридмана посвящена изучению перманентного дохода [Friedman, 1957]. Рассмотрим более подробно модель адаптивных ожиданий. Если через  $y_{t-i}^e$  обозначить ожидания величины  $y$  в период  $t-i-1$  на основе информационного множества  $\Omega_{t-i-1}$ , то гипотеза адаптивных ожиданий первого порядка предполагает зависимость ожиданий соседних периодов в следующей форме:

$$y_t^e - y_{t-1}^e = \theta(y_{t-1} - y_{t-1}^e), \quad 0 < \theta < 1. \quad (1)$$

В уравнении (1) величина  $\theta$  — это коэффициент адаптации, который определяет значение пересмотра ожиданий. В соответствии с концепцией этих ожиданий их изменение предполагается пропорциональным значению последней ошибки ожиданий. Поэтому адаптивные ожидания иногда называются моделью коррекции ошибок первого порядка.

Решение уравнения (1) позволяет получить экстраполяционный механизм ожиданий:

$$y_t^e = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i y_{t-i}, \quad (2)$$

причем веса геометрически уменьшаются:  $\omega_i = \theta(1-\theta)^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ .

Первоначально эта модель была предложена лишь в качестве корректирующей формулы. В 1960 г. Дж. Мут показал, что формула (1) позволяет строить статистически оптимальные предсказания в том случае, когда генерирующий процесс является интегрированным процессом первого порядка со скользящей средней [Muth, 1960]. Однако в самом общем случае модель адаптивных ожиданий не дает оптимальных прогнозов. Это связано с тем, что оптимальность процесса зависит от генерирования величины  $y_t$ .

Сам Дж. Мут задавался вопросом: почему ни одно правило, ни одна формула или математическая модель не могли успешно прогнозировать движение цен на финансовых рынках, т.е. описывать процесс, напоминающий случайные блуждания, на который накладывается эффект шума? Дж. Мут отмечал, что вся имеющаяся информация, которая способна увеличить точность ценовых прогнозов, очень быстро превращается в текущие решения спекулянтов, поэтому их предвидения являются рациональными. Традиционная кейнсианская политика управления спросом в 1970-х годах показала свою неэффективность в решении проблем американской экономики. Тогда ученым Р. Лукасу [Lucas, 1976] и Т. Сардженту [Lucas, Sargent, 1981; Sargent, 1987] пришла идея о том, что причина такой неэффективности скрывалась

в непредсказуемости: экономические агенты формируют свои ожидания на основе той же самой информации, которая имеется в распоряжении политических деятелей, и ведут себя так, чтобы нейтрализовать любую попытку систематического вмешательства в экономику. Экономические агенты, формируя ценовые ожидания, делают это почти так же, как рынок определяет сами цены. Нельзя сказать, что ожидания всегда безошибочны, поскольку экономика подвержена случайным шокам. Это означает, что вероятностное распределение субъективных ожиданий ценовых изменений всегда имеет то же среднее значение (математическое ожидание), что и «объективное» распределение. Рациональный прогноз, или ожидание, имеет важное свойство — его ожидаемая ошибка всегда равна нулю [Блауг, 1994, с. 637].

В 1970-е годы развитие этого направления привело к тому, что появились два подхода к проблеме: 1) с учетом временных рядов, в рамках которого ожидания формируются оптимально с помощью модели одномерных временных рядов; 2) на основе структурной модели. Первый подход обсуждался в литературе в работах П. Триведи [Trivedi, 1973] и М. Нерлова [Nerlove, 1983]. Подход с позиции временных рядов, по существу, предполагал, что ожидания формируются на основе обобщенной одномерной авторегрессионной интегрированной модели со скользящей средней (ARIMA). Этот подход тесно связан с экстраполяционным методом формирования ожиданий экономических агентов и учитывает возможность возврата к нормальному уровню.

В конце 1960-х — начале 1970-х годов были предложены более общие модели формирования экстраполяционных ожиданий, в частности в работах Д. Майзелмана [Meiselman, 1962], Дж. Минсера [Mincer, 1969], Дж. Френкеля [Frenkel, 1979]. Так, Майзелман разработал модель обучения на ошибках:

$${}_t y_{t+s}^e - {}_{t-1} y_{t+s}^e = \gamma_s (y_t - {}_{t-1} y_t^e), \quad (3)$$

где  ${}_t y_{t+s}^e$  — ожидание величины  $y$  в период  $t+s$ , сформированное в период  $t$ ;  $\gamma_s$  — числовой коэффициент (период ожидания в экономической литературе обычно указывается как символ перед величиной  $y_t$ ).

Согласно этой модели пересмотр ожиданий  $y_{t+s}$  за период  $t-1$  до  $t$  пропорционален текущей ошибке ожиданий. Типы уравнений, включающих ожидания указанного вида, могут быть получены с помощью различных предпосылок относительно пересмотра величины  $\gamma_s$ . Так, Дж. Минсер в 1969 г. показал, что в самом общем виде существует однозначное соответствие между моделью обучения на ошибках и спецификацией экстраполяционной модели. При этом коэффициенты пересмотра связаны с весами  $\omega_j$  через рекурсивные отношения:

$$y_s = \sum_{j=0}^{s-1} \omega_j \gamma_{s-1-j}, \quad s=1, 2, \dots, \quad (4)$$

где  $\gamma_0 \equiv 1$ .

Дж. Минсер в той же работе показал, что коэффициент пересмотра может расти или сокращаться, и это будет происходить, если веса  $\omega_j$  в правой части соотношения (4) уменьшаются или увеличиваются более чем экспоненциально. В результате модель коррекции ошибок и общая экстраполяционная модель ожиданий становятся алгебраически эквивалентными. Несмотря на значительную степень обобщенности экстраполяционной модели и модели «обучения на ошибках», обе они имеют

определенные недостатки, которые заключаются в том, что при акценте на исторических данных  $y_t$  происходит игнорирование возможного воздействия на ожидания переменных, отличающихся от предыдущих значений  $y_t$ . В подобных моделях предполагается, что веса фиксированы и инварианты по отношению к изменениям во внешней среде, что часто не соответствует окружающей действительности.

**Рациональные ожидания.** В начале 1960-х годов была предложена гипотеза рациональных ожиданий. Одной из первых работ стала статья Дж. Мута [Muth, 1961]. По существу, эта гипотеза противоположна модели адаптивных ожиданий. В соответствии с ней экономические агенты формируют свои ожидания оптимально на основе некоей истинной модели экономики, и субъективные ожидания, которые вынуждены придерживаться агенты, соответствуют объективным ожиданиям, полученным на основе модели. Тожественность объективных и субъективных ожиданий составляет суть теории рациональных ожиданий. Если предположить, что  $\Omega_t$  представляет собой информационное множество, которое известно агенту в момент  $t$ , и  $f(y_t | \Omega_{t-1})$  — распределение вероятностей случайных величин  $y_t$ , то в общем виде гипотеза рациональных ожиданий постулирует, что распределение субъективных вероятностей  $y_t$  для индивида совпадает с распределением вероятностей  $f(y_t | \Omega_{t-1})$ .

В самом общем виде гипотеза рациональных ожиданий в модели спроса и предложения была сформулирована следующим образом:

$$q_t^s = \beta_1 P_t^e + \alpha_1 x_{1t} + \varepsilon_{1t}, \beta_1 > 0, \quad (5)$$

$$q_t^d = \beta_2 P_t + \alpha_2 x_{2t} + \varepsilon_{2t}, \beta_2 > 0, \quad (6)$$

$$q_t^s = q_t^d, \quad (7)$$

где  $q_t^s$  — объем предложения сельскохозяйственной продукции за период  $t$ ,  $q_t^d$  — спрос на продукцию;  $x_{1t}$  и  $x_{2t}$  — параметры спроса и предложения (экзогенные переменные, определяющие расположение кривых спроса и предложения);  $P_t^e$  и  $P_t$  — цена продукции и ее ожидание, сформированное производителями в период  $t - 1$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  — числовые параметры. Считается, что спрос и предложение подвержены влиянию случайных шоков  $\varepsilon_{1t}$  и  $\varepsilon_{2t}$ . Условие «расчистки» рынков (7) предполагает, что продукция не может храниться. Если заменить  $q_t^s$  и  $q_t^d$  в (7), то для  $P_t$  получаем

$$P_t = \gamma P_t^e + z_t, \quad (8)$$

где  $\gamma = \beta_1 / \beta_2$  и  $z_t = \beta_2^{-1} (\alpha_1 x_{1t} - \alpha_2 x_{2t} - \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{2t})$ .

Согласно концепции рациональных ожиданий цены  $P_t^e$  выводятся из условия, что  $P_t^e = E(P_t | \Omega_{t-1})$ . Если взять условные ожидания обеих частей выражения (8), то с учетом  $\Omega_{t-1}$  получим

$$P_t^e = E(P_t | \Omega_{t-1}) = (1 - \gamma)^{-1} E(z_t | \Omega_{t-1}), \quad (9)$$

где  $E$  — оператор ожидания. Это позволяет свести первоначальную проблему оценки ожиданий цен к проблеме формирования ожиданий экзогенных или принуждающих переменных системы. Решение модели, основанной на рациональных ожида-

ниях, требует полной спецификации процесса, который генерирует принуждающие переменные.

Если шоки предложения и спроса обозначить через  $\varepsilon_{1t}$  и  $\varepsilon_{2t}$  и предположить, что они не коррелированы и имеют нулевые средние значения, а также, что экзогенные переменные  $x_{1t}$  и  $x_{2t}$  следуют авторегрессионным процессам, то можно записать:

$$\begin{aligned}x_{1t} &= \rho_1 x_{1,t-1} + v_{1t}, \\x_{2t} &= \rho_2 x_{2,t-1} + v_{2t},\end{aligned}\tag{10}$$

где  $\rho$  — параметр в авторегрессионном уравнении.

Если подставить правые части выражения (10) в правую часть соотношения

$$z_t = \beta_2^{-1} (\alpha_1 x_{1t} - \alpha_2 x_{2t} - \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{2t})$$

и взять условные ожидания каждой части полученного уравнения, то можно записать:

$$E(z_t | \Omega_{t-1}) = \beta_2^{-1} (\alpha_1 \rho_1 x_{1,t-1} - \alpha_2 \rho_2 x_{2,t-1}).$$

Если подставить в формулу (9) полученное выражение, то можно записать уравнение для ценовых ожиданий в следующем виде:

$$P_t^e = (\beta_2 - \beta_1)^{-1} (\alpha_1 \rho_1 x_{1,t-1} - \alpha_2 \rho_2 x_{2,t-1}).\tag{11}$$

Уравнение (11) показывает разницу между гипотезой рациональных ожиданий и гипотезой экстраполяционных ожиданий. Рациональные ожидания зависят от прошлой истории переменных помимо цен, и к тому же веса, приписанные прошлыми наблюдениями  $(\alpha_1 \rho_1 / (\beta_2 - \beta_1))$  и  $(\alpha_2 \rho_2 / (\beta_2 - \beta_1))$ , не инвариантны по отношению к изменениям процессов, которые генерируют экзогенные переменные. Согласно гипотезе рациональных ожиданий сдвиг в параметрах процессов  $x_{1t}$  и  $x_{2t}$  из-за изменений в государственной экономической политике, каких-либо институциональных соглашений, введения ноу-хау и т. п. полностью воспринимается производителями, которые начинают корректировать свои ценовые ожидания в соответствии с формулой (11).

Зависимость рациональных ожиданий от параметров экзогенных переменных составила основу критики Р. Лукасом макроэкономических оценок политики. Он показал, что в моделях с рациональными ожиданиями параметры правил принятия решения обычно представляют собой смесь параметров целевых функций агентов и стохастических процессов [Lucas, 1976].

**Неоклассическая оптимизация и рациональные ожидания.** В неоклассической теории полезности предполагается, что индивиды максимизируют ожидаемую полезность. Проблема формирования ожиданий появляется как часть проблемы принятия решения. Ожидаемая полезность отдельного экономического (репрезентативного) агента максимизируется на информационном множестве, которое доступно агенту во время принятия решения. Такая задача была решена с помощью методов динамического программирования и описана Т. Сарджентом [Sargent, 1987].

Предположим, что монополист характеризуется нейтральностью к риску, а функция спроса на его продукцию линейна:

$$p_t = \theta_0 - \theta_1 q_t + \varepsilon_t, \quad \theta_0, \theta_1 > 0, \quad (12)$$

где  $q_t$  — объем выпуска,  $p_t$  — цена «расчистки» рынка,  $\varepsilon_t$  — некоррелированные шоки спроса. Функция прибыли фирмы в период  $t$  имеет вид:

$$\pi_t = p_t q_t - w_t l_t - \frac{\phi}{2} (l_t - l_{t-1})^2, \quad (13)$$

где  $w_t$  — ставка заработной платы,  $l_t$  — занятость в человеко-часах. В уравнении (13)  $l_t$  возводится в квадрат для того, чтобы учесть издержки корректировки, которые являются результатом издержек найма и увольнения сотрудников. Предполагается, что однофакторная производственная функция фирмы задана так:

$$q_t = f(l_t), \quad f' > 0, \quad f'' < 0. \quad (14)$$

Задача оптимизации для фирмы представляет собой максимизацию ожидаемой дисконтированной прибыли на бесконечном периоде. Ее можно записать следующим образом:

$$\max_{\{l_{t+\tau}\}_{\tau=0}^{\infty}} E \left( \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^\tau \pi_{t+\tau} \mid \Omega_t \right). \quad (15)$$

Предполагается, что информационное множество монополиста  $\Omega_t$  включает параметры  $w_t$  и  $l_t$ , а также значения прошедших периодов  $l_t, w_t, q_t, p_t$ . Величина  $\beta$  — дисконтирующий множитель, находящийся в интервале  $0 < \beta < 1$ .

Условие первого порядка для оптимизационной задачи определяется с помощью уравнения Эйлера и имеет вид:

$$E \left( \frac{\partial \pi_{t+\tau}}{\partial l_{t+\tau}} + \beta \frac{\partial \pi_{t+\tau+1}}{\partial l_{t+\tau}} \mid \Omega_t \right) = 0, \quad \tau = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Используя уравнения (12)–(14), имеем

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial l_t} = [\theta_0 - 2\theta_1 f(l_t) + \varepsilon_t] f'(l_t) - \phi(l_t - l_{t-1}) - w_t; \quad \frac{\partial \pi_{t+1}}{\partial l_t} = \phi(l_{t-1} - l_t). \quad (17)$$

Учитывая формулу (17), в силу того что  $l_t$  принадлежит  $\Omega_t$  и шоки  $\varepsilon_t$  серийно некоррелированы при условии

$$E[\varepsilon_t f'(l_t) \mid \Omega_t] = f'(l_t) E(\varepsilon_t \mid \Omega_t) = 0,$$

можно показать следующее:

$$\phi(1 + \beta) l_t - [\theta_0 - 2\theta_1 f(l_t)] f'(l_t) = \phi l_{t-1} + \beta \phi E(l_{t-1} \mid \Omega_t) - w_t. \quad (18)$$

Уравнение (18) является нелинейным уравнением рациональных ожиданий, которое нельзя решить аналитически. Если  $f(l_t)$  принимает линейную форму  $f(l_t) = \alpha l_t$ , то  $l_t = a + b l_{t-1} + c E(l_{t+1} \mid \Omega_t) - d w_t$ . Это уравнение используется в эконо-

мических исследованиях, где встречаются идеи рациональных ожиданий, например в модели дифференцированного контракта с заработной платой.

Гипотеза рациональных ожиданий как часть проблемы максимизации ожидаемой полезности в рамках неоклассического подхода отличается от трактовки, предложенной Дж. Мутом. Гипотеза формирования ожиданий встраивается в неоклассическую концепцию оптимизации и обеспечивает связь с эконометрическими построениями. Для операциональности этого подхода тем не менее нужно сделать ряд предположений относительно предпочтений, технологий и наличия факторов производства экономических агентов. Так, если использовать линейную зависимость, лежащую в основе уравнения  $l_t = a + bl_{t-1} + cE(l_{t+1} | \Omega_t) - dw_t$ , и учесть, что она подвержена случайным шокам  $q_t = \alpha l_t \eta_t$ ,  $\eta > 0$ , где  $\eta_t$  выступает в качестве последовательности случайных переменных, распределенных независимо от  $l_t$ , со средней, равной 1, то

$$l_t = a_t + bl_{t-1} + c_t E(l_{t+1} | \Omega_t) - d_t w_t. \quad (19)$$

В этом уравнении

$$d_t^{-1} = \phi(1 + \beta) + 2\theta_1 \alpha^2 \eta_t^2, \quad \alpha_t = \alpha \theta_0 \eta_t d_t,$$

$$b = \phi d_t, \quad c_t = \phi \beta d_t,$$

а само уравнение (19) является линейным уравнением рациональных ожиданий со случайными коэффициентами и практически не имеет аналитического решения.

**Рациональные ожидания и процесс обучения.** Одной из фундаментальных предпосылок гипотезы рациональных ожиданий является утверждение, что экономические агенты знают или способны построить некую истинную, вероятностную, модель. Хотя они и учатся на прошлых ошибках, но возникает вопрос, сходится ли процесс обучения к равновесию рациональных ожиданий. Эта проблема изучалась с помощью рациональной модели обучения и модели обучения с ограниченной рациональностью. Первая предполагала, что агенты правильно специфицируют экономическую модель, но они не уверены относительно некоторых параметров. В процессе обучения, когда имеется обратная связь между ожиданиями и результатами, экономическая среда, в которой осуществляется оценка, изменяется во времени, поэтому обычные доказательства сходимости параметрических оценок к их истинным значениям неприемлемы [Панорама экономической мысли, 2002, с. 207]. Эти вопросы подробно рассматривались в работах Р. Сайерта и М. де Грота [Cyert, De Groot, 1974], Дж. Тейлора [Taylor, 1975], Б. Фридмана [Friedman, 1979] и Р. Таунсенда [Townsend, 1978]. Б. Фридман и Дж. Тейлор рассматривали модели без обратных связей между ожиданиями и результатами. Им удалось, сосредоточившись на простых примерах, показать сходимость процесса обучения к решению рациональных ожиданий. В других исследованиях были выделены более реалистичные случаи, когда имелись обратные связи. М. Брей и Д. Крепс [Bray, Kreps, 1987] доказали, что при рациональном обучении субъективные мнения почти всегда будут сходиться, хотя и необязательно к равновесию рациональных ожиданий.

Меньшее количество информации требовалось для модели с ограниченной рациональностью, предложенной С. де Канио [De Canio, 1979], а также Л. Блюмом и Д. Изли [Blume, Easley, 1982]. В рамках этой модели предпосылка о том, что эконо-

мические агенты знают истинную структурную модель экономики, была отброшена. Вместо нее предполагалось, что они используют «правдоподобное» правило обучения, т.е. знают упрощенную модель экономики. Тем не менее этот подход подвергался критике, поскольку не допускал возможности пересмотра правила обучения. Он может быть оправдан только в том случае, если выбранное правило обучения гарантирует сходимость к уравнению рациональных ожиданий. В экономической литературе 1980-х годов не содержится общих результатов сходимости моделей обучения с ограниченной рациональностью, а большинство результатов относится к проблеме обучения в контексте простых моделей с единственным равновесием рациональных ожиданий.

В работе М. Брейя и Н. Сейвина [Bray, Savin, 1986] рассматривалась модель спроса и предложения вида

$$p_t = \gamma p_t^e + \alpha' x_t + \varepsilon_t, \quad (20)$$

где

$$\gamma = \beta_1 / \beta_2 \text{ и } \varepsilon_t = \frac{\varepsilon_{1t} - \varepsilon_{2t}}{\beta_2}, \quad \alpha' x_t = \frac{\alpha'_1 x_{1t} - \alpha'_2 x_{2t}}{\beta_2}.$$

В соответствии с концепцией рациональных ожиданий с полным обучением ожидания  $p_t^e$  заданы так:

$$p_t^e + E(p_t | \Omega_{t-q}) = \frac{1}{1-\gamma} \alpha' x_t^e.$$

Если же обучение не полное, то  $p_t^e$  основано на вспомогательной модели  $p_t = \theta z_t' + u_t$ , где  $z_t$  составляется из переменных, входящих в информационное множество агентов. В начальный период  $t$  доступные наблюдения  $p_1, p_2, \dots, p_{t-1}; z_1, z_2, \dots, z_{t-1}$  используются для того, чтобы получить оценку  $\theta$  (например,  $\hat{\theta}$ ), ценовые ожидания заданы как  $p_t^* = \hat{\theta}' z_t$ , при этом уравнение для изменений цен во времени имеет вид:

$$p_t = \gamma (\hat{\theta}' z_t) + \alpha' x_t + \varepsilon_t. \quad (21)$$

Поскольку  $\hat{\theta}_t$  зависит от прошлых цен, то уравнение (21) представляет собой нелинейное разностное уравнение относительно  $p_t$ , которое будет иметь нестационарное решение. Процесс обучения усложняется, поскольку экономический агент должен отделить изменение цены, которое произошло вследствие изменения экзогенных переменных, от влияния неполного обучения.

Еще одна проблема — это учет информационных издержек. Если за информацию нужно платить, то ожидаемая выгода от ее приобретения должна сравниваться с ожидаемыми издержками приобретения. В данной ситуации совершенно не очевидно, что полное обучение является экономически желательным, даже если оно и возможно было бы при отсутствии информационных издержек. Например, монополист может оказаться перед проблемой узнать кривую спроса на свою продукцию. Следует ли ему пытаться усовершенствовать оценки, меняя объем выпуска в разные моменты времени, получая убытки или нет? Ответ на этот вопрос не очевиден и будет решаться монополистом в каждом случае по-разному.

**Измерение ожиданий.** В литературе начиная с 1950-х годов обсуждался вопрос возможности измерения ожиданий. Еще в 1954–1958 гг. Л. Клейн [Klein, 1954], Ф. Модильяни и А. Сауэрлендер [Modigliani, Sauerlender, 1955] и Т. Хаавельмо [Haavelmo, 1958] признали возможность непосредственного измерения ожиданий для анализа их влияний на экономическое поведение. Непосредственные измерения ожиданий экономических переменных (инфляция, процентные ставки, валютные курсы, объем продаж, уровень товарных и материальных запасов, степень использования производственных мощностей и курсы ценных бумаг) дают возможность для широкого анализа. Эти измерения основаны на данных опросов населения и экспертов и представляются в виде количественных ответов на вопросы, например: «Ожидается ли изменение некоей переменной и останется ли она на том же уровне, или нет?». Между тем было замечено, что ожидания, выявленные с помощью опросов, будут иметь некоторые недостатки. В частности, результаты выборочных обследований оказываются чувствительными к ошибкам выборки в форме вопросов. При этом и респонденты могут неверно отражать свои ожидания. Качество информации осложняет ее включение в эмпирические модели. Однако, несмотря на данные обстоятельства, в 1980-х годах интерес к этому усилился. Свидетельством тому являются работы М. Песарна [Pesarn, 1984], К. Холдена с соавт. [Holden, Peel, Thompson, 1985]. С. Врен-Льюис [Wren-Lewis, 1986] рассматривал использование ожиданий объема выпуска при определении занятости в обрабатывающей промышленности Великобритании, а К. Фут и Т. Ито [Froot, Ito, 1989] исследовали отношение между краткосрочными и долгосрочными ожиданиями валютного курса.

Ожидания, которые получались в результате опросов, стали использоваться в экономической литературе в самых разнообразных контекстах, но чаще всего в макроэкономическом моделировании. Для целей моделирования макроэкономики качественные ответы преобразовывались в количественные оценки, а затем полученные результаты использовались в эконометрических моделях. В случае если ожидания, полученные на основе опросов, доступны, то гипотеза рациональных ожиданий может быть проверена непосредственно с помощью наблюдаемых ошибок ожиданий. В литературе в 1980-е годы было предложено несколько процедур, которые можно условно разделить на четыре группы: 1) проверка несмещенности; 2) отсутствие серийной корреляции; 3) эффективность; 4) ортогональность. Публикации эмпирического характера в этот период весьма обширны. Между тем обобщения, сделанные К. Холденом и соавторами [Holden, Peel, Thompson, 1985] и М. Левеллом [Lovell, 1986], не подтвердили гипотезу рациональных ожиданий. В результате возникла потребность в разработке других моделей формирования ожиданий, которые допускали неполное обучение. Теория ожиданий, позволяющая определенным образом учитывать неопределенность, требует дальнейшего развития и эмпирической проверки.

#### **4. Современные подходы к учету неопределенности при моделировании экономического роста**

Основные современные идеи, которые позволяют учесть факторы неопределенности и существенно расширить класс моделей экономического роста, были связаны с построением непрерывных во времени моделей стохастической оптими-

зации, в рамках которых используются стохастические процессы для моделирования влияния неопределенных однозначно или неизвестных макроэкономических факторов.

#### 4.1. Первые постановки стохастических моделей роста

Второй этап учета неопределенных макроэкономических факторов, начавшийся в 1970-х годах, связан с постановками первых простейших стохастических моделей, которые рассмотрим на примере работы У. Брока и Л. Мирмана [Brock, Mirman, 1972]. В этой модели используется дискретная постановка рассматриваемой задачи. В ней производственная функция в качестве одного из факторов учитывает случайную переменную, которую авторы называют стохастической агрегированной производительностью. Эта переменная, по мнению авторов модели, должна отражать то, в какой степени данная комбинация основных ресурсов — труда и капитала — является продуктивной, или, что то же самое, в какой степени внешние факторы оказывают влияние на выпуск продукции. Уравнение производственной функции в модели Брока и Мирмана можно записать так:

$$Y(t) = F(K(t), L(t), dw(t)), \quad (22)$$

где  $Y(t)$  — объем производства,  $K(t)$  — затраты капитала,  $L(t)$  — затраты труда,  $dw(t)$  — стохастический агрегированный фактор производительности,  $t$  — дискретное время.  $w(t)$  — случайный процесс, который обладает свойством марковского процесса, это же отмечает и Тр. Бьюли [Bewley, 1977], приращения рассматриваемого случайного процесса  $dw(t)$  независимы и имеют одно и то же распределение.

Фактически предлагаемый подход к моделированию производства представляет собой определенный этап развития моделирования автономного технического прогресса. Под автономным техническим прогрессом понимался учет всех факторов, кроме труда и капитала, которые в моделях в явном виде не представлены, но оказывают влияние на объемы выпускаемой продукции. Их было предложено учитывать в форме специального временного множителя при производственной функции или ее ресурсах и факторах. Необходимость введения этого множества была также вызвана тем, что при экспериментальных расчетах по функции Кобба–Дугласа, как было отмечено выше, были получены определенные расхождения между фактическими и прогнозируемыми значениями национального дохода. Введение определенных форм учета автономного технического прогресса позволило повысить качество получаемых на основе производственных функций прогнозов. В данном случае речь идет лишь о том, что при неоклассической постановке задачи множитель, характеризующий влияние автономного технического прогресса, был детерминированным, а в рассматриваемой постановке задачи он становится стохастическим фактором.

В книге Д. Асемоглу [Acemoglu, 2009, p. 641] отмечается, что в условиях основных предположений неоклассической модели роста указанная агрегированная производственная функция может быть записана так:

$$Y(t) = F(K(t), dw(t)L(t)). \quad (23)$$

Очевидно, что указанный вид производственной функции по форме полностью соответствует функции, учитывающей технический прогресс, нейтральный в определении Харрода. Её можно представить в следующей форме:

$$Y = F(K, L, t) = G(K, A(t)L), \quad (24)$$

где  $A(t)$  — временной множитель, отражающий автономный технический прогресс. Принципиально в производственных функциях (23) и (24) речь идет об учете одних и тех же макроэкономических факторов, которые не находят своего отражения в объемах труда и капитала, но оказывают влияние на выпуск продукции. В первом случае их влияние моделируется в форме случайного фактора, во втором — детерминированного.

Используя производственную функцию вида (23), можно получить определенную постановку стохастической модели экономического роста. Для этого перейдем к относительным показателям и, разделив правую и левую части выражения (23) на  $L(t)$ , получим

$$y(t) = f(k(t), dw(t)), \quad (25)$$

где  $y(t) = Y(t) / L(t)$ ;  $k(t) = K(t) / L(t)$ .

Сформулируем следующую задачу для репрезентативного потребителя: необходимо максимизировать на бесконечном периоде ожидаемую дисконтированную функцию полезности, которая задана на относительном потреблении, при условии, что выпуск продукции, зависящий от случайного фактора в каждый период, распределяется на капитал и потребление; ресурсы капитала каждого последующего периода образуются за счет выпуска продукции предыдущего периода и ресурсов капитала, остающихся после использования в предыдущий период.

Введем дополнительные обозначения:  $c(t)$  — относительное потребление на душу населения;  $u(c(t))$  — функция полезности, заданная на удельном потреблении. Тогда ограничения модели, связанные с распределением выпускаемой продукции на капитал и потребление и определяющие объем капитала каждого периода с учетом его выбытия по норме  $\delta$ , можно записать так:

$$k(t+1) = f(k(t), dw(t)) + (1-\delta)k(t) - c(t). \quad (26)$$

Окончательно рассматриваемую задачу представим в следующей форме:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} d^t u(c(t)) \Rightarrow \max, \quad (27)$$

$$c(t) = k(t+1) - f(k(t), dw(t)) - (1-\delta)k(t), t = 1, 2, \dots,$$

где  $E_0$  — оператор ожидания,  $d^t$  — коэффициент дисконтирования полезности периода  $t$ .

Построенная модель (27) представляет собой одну из первых постановок простой стохастической модели экономического роста для закрытой экономики с одним случайным фактором. Данную модель роста можно рассматривать как модификацию неоклассической модели роста Солоу–Свена, связанную с учетом случайного фактора в функции выпуска продукции. Ограничение (26) в определенном смысле по форме похоже на основное уравнение динамики в модели Солоу–Свена с той

разницей, что в ограничении (26) можно выделить только дискретный прирост капиталовооруженности труда, а удельный выпуск определяется с учетом случайного фактора.

#### 4.2. Модели реальных деловых циклов

Третий этап моделирования макроэкономики с учетом неопределенных факторов представляют так называемые модели реальных деловых циклов (Real business cycles, RBC), которые были разработаны в 1980-е годы. Модель реальных деловых циклов — это модель поведения репрезентативных агентов, построенная на основе неоклассических предположений. Она была разработана Ф. Кидлэндом и Е. Прескоттом [Kydland, Prescott, 1982], которые ввели взаимозаменяемость труда и свободного времени в стохастическую модель роста и заложили основы развития определенной разновидности моделей деловых циклов — так называемых RBC-моделей. В числе авторов подхода также можно отметить Дж. Лонга и К. Плоссера [Long, Plosser, 1983]. Основное отличие теории реальных деловых циклов, разработанной Ф. Кидлэндом и Е. Прескоттом, состоит в том, что в ее рамках рассматриваются в качестве причин экономических циклов так называемые реальные шоки, или шоки производительности, которые находят свое отражение в изменениях соответствующих параметров производственной функции или оказывают воздействие на решения о расходах и сбережениях домашних хозяйств. К ним относят: появление новых товаров и методов управления; изменения в структуре и качестве труда и капитала; преобразования государственного регулирования; резкие колебания погодных условий и другие факторы, оказывающие влияние на производительность. В рамках этой теории предполагается, что экономический подъем вызывается благотворными шоками производительности, а спады и сокращения производства — неблагоприятными. Номинальные шоки, связанные с изменением спроса и предложения денег, не рассматриваются.

Формальные постановки моделей в рамках теории реальных деловых циклов представляют собой определенную модификацию модели (27), связанную с введением случайных переменных в параметры производственной функции. В частности, рассмотрим некоторую модификацию исходной RBC-модели, которую Г. Гонг и В. Землер называют стандартной [Gong, Semmler, 2004]. Для этого введем следующие исходные предположения: рассматривается производственная функция Кобба–Дугласа; в числе переменных функции полезности выделяются относительный объем потребления и относительный объем свободного времени; случайный фактор учитывается при моделировании технологического коэффициента.

Рассматривается задача репрезентативного потребителя. Она состоит в том, что этот потребитель на бесконечном периоде максимизирует свою ожидаемую функцию полезности, которая задана на относительном объеме потребления на одного занятого и относительном свободном времени, при условии, что размер капитала на одного занятого в следующем периоде определяется как сумма оставшегося удельного капитала прошедшего периода и удельного накопления текущего периода, а также при предположении, что технологический коэффициент производственной функции учитывает случайный фактор. Обозначим через  $n_t$  нормированную долю рабочего времени; тогда  $1 - n_t$  характеризует нормализованную долю свободного времени в период  $t$ ;  $b$  — числовой коэффициент, отражающий соотношение нор-

мализованного и среднего рабочего времени [Gong, Semmler, 2004, p.70];  $\theta$  — коэффициент, сопоставляющий полезности удельного потребления и относительного свободного времени;  $\varepsilon_t$  — независимая одинаково распределенная случайная величина, описывающая влияние инноваций в период  $t$  и приводящая к колебаниям выпуска продукции. Остальные обозначения сохраним. Запишем сформулированную задачу; ее ограничение на размер капитала на единицу рабочей силы определим по аналогии с соотношением (26). Тогда

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} d^t [u(c_t) + \theta u(1 - n_t)] \Rightarrow \max, \quad (28)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + A_t k_t^{1-\alpha} (bn_t)^\alpha - c_t, \quad (29)$$

$$A_{t+1} = a_0 + a_1 A_t + \varepsilon_{t+1}. \quad (30)$$

Случайный фактор в моделях (28)–(30) учитывается в уравнении для технологического коэффициента, что и приводит к колебаниям выпуска продукции, потребления капитала и относительной занятости во времени, причем часто используется логарифмическая функция полезности. Несколько другую форму для RBC-модели рассматривает М. Уикенс [Wickens, 2011]. В качестве функции полезности он применил функцию Рамсея, а при моделировании технологического коэффициента  $A_t$  предполагал, что этот коэффициент зависит от случайной величины  $Z_t$  в следующей форме:

$$A_t = (1 + \mu)^t Z_t, \quad (31)$$

где  $\mu$  — долгосрочный темп роста технологических изменений. Далее он предполагал, что  $\ln Z_t$  обладает тем свойством, что представляет собой случайную величину, приращение которой распределено по нормальному закону со средним, равным нулю, и постоянной дисперсией, т. е.

$$\ln Z(t) = z(t); \quad dz(t) \approx N(0, \omega^2). \quad (32)$$

Случайная величина  $z(t)$  представляет собой не коррелируемые производственные шоки, которые определяют динамику основных агрегатов рассматриваемой модели: производство, потребление, капитал и занятость. В данном случае динамика технологических изменений зависит от двух компонент: детерминированно экспоненциального тренда  $(1 + \mu)^t$  и стохастической составляющей  $z(t)$ , причем

$$z(t) = z(0) + \sum_{s=0}^t dz(s). \quad (33)$$

Учет соотношений (31)–(33) в модели также приводит к колебаниям рассматриваемых переменных во времени [Wickens, 2011, p.401–402]. Подробнее различные формы моделей реальных бизнес-циклов с учетом неоклассических предпосылок, а также и их более современные варианты проанализированы в цикле статей Р. Кинга, С. Плоссера и С. Ребелло [King, Plosser, Rebelo, 1988a; 1988b].

### 4.3. Современные направления стохастического моделирования экономического роста

Четвертый этап моделирования экономического роста с учетом неопределенных факторов преимущественно связан с определенным обобщением простой модели стохастической оптимизации в конце XX — начале XXI в. Отметим модели стохастического взаимодействия, которые в своей основе опираются на известные неоклассические многопериодные модели оптимизации потребления, достаточно широко используемые для анализа проблем микро- и макроэкономики. Они основаны на построении моделей репрезентативных агентов различного вида с учетом случайных процессов, в том числе важную роль играют модели репрезентативного потребителя, осуществляющего инвестиции на финансовых рынках<sup>2</sup>. Применительно к макроэкономическим моделям речь может идти о введении случайных цен товаров и обменных курсов валют, объема выпуска, ставки процента и других переменных. С. Тарновский представил модель максимизации функции полезности репрезентативного агента на бесконечном периоде при условии, что величина благосостояния, представляющая собой разность между доходами от портфеля, содержащего акции, внутренние и зарубежные облигации, а также конвертируемую валюту, и расходами на потребление и уплату налогов, моделируется с учетом случайных процессов [Turnovsky, 2000, p. 547–557].

При постановке простой стохастической модели экономического роста для закрытой экономики рассмотрим замкнутую агрегированную модель, которая по-прежнему опирается на неоклассический подход, но позволяет учесть факторы неопределенности в форме винеровских случайных процессов. Рассматриваемая модель роста включает модель потребителя как первого репрезентативного агента, ее критерием оптимальности выступает оптимизация полезности потребления на бесконечном периоде. Вторым агентом выступает государство в части взимания налогов с потребителя и эмиссии государственных облигаций, в которые потребитель инвестирует свой капитал. Оно также формирует государственные расходы. В числе основных предпосылок модели отметим следующие: объектом моделирования является единая экономика, которая объединяет домашние хозяйства и производство; при анализе производства принимается во внимание только производственный капитал, ресурсы труда отдельно не учитываются; объем потребления изменяется с не стохастической скоростью; ставка процента по государственным облигациям является детерминированной; прирост выпуска продукции определяется на основе АК-модели и рассматривается с учетом стохастического фактора; прирост налогов зависит от случайного фактора; в качестве критерия используется максимизация потребления на бесконечном периоде. Случайные факторы учитываются в форме приращений винеровских процессов.

Задача состоит в том, чтобы максимизировать полезность потребления на бесконечном периоде при условии выполнения бюджетного ограничения, которое учитывает стохастический характер переменных и предполагает, что доходы в форме прироста выпуска продукции и процентного дохода по облигациям расходуются на увеличение объемов материального капитала и потребления, а также на уплату налогов.

---

<sup>2</sup> Основные предпосылки и условия анализа подобных моделей в условиях дискретного времени представлены, например, в работах Х. Вэриана [Varian, 2006] и Л. Крушвица [Крушвиц, 2000, с. 152].

Введем следующие дополнительные обозначения:  $B(t)$  — стоимость государственных облигаций в момент  $t$ ;  $dY(t)$  — изменение выпуска продукции за период  $[t, t + dt]$ ;  $C(t)$  — объем потребления в период  $t$ ;  $C(t)dt$  — скорость изменения потребления за период  $[t, t + dt]$ ;  $i$  — ставка процента по облигациям,  $iB(t)dt$  — процентный доход по облигациям за период  $[t, t + dt]$ ;  $dN(t)$  — прирост налогов, который выплачивается за период  $[t, t + dt]$ ;  $e^{-\rho t}$  — непрерывный коэффициент дисконтирования полезности потребления в период  $t$  на начальный момент;  $U(C(t))$  — функция полезности потребления в период  $t$ , которая удовлетворяет неоклассическим предположкам.

Общую форму записи критерия оптимальности, поскольку объем потребления не является случайной величиной, можно представить так:

$$E_0 \int_0^{\infty} U(C(t)) e^{-\rho t} dt \rightarrow \max, \quad (34)$$

причем выполняются обычные предположки относительно производных функции полезности:  $U'(C(t)) > 0$ ,  $U''(C(t)) < 0$ .

Ограничения задачи формируются на основе приростов всех рассматриваемых показателей, а стохастический характер ограничения определяется тем, что ряд переменных моделируется в форме стохастических процессов. В общем случае бюджетное ограничение состоит в том, что приросты доходов за счет выпуска продукции и процентов по облигациям расходуются на финансирование приростов капитала и потребления, а также уплату налогов. Это ограничение выражается следующим образом:

$$dY(t) + iB(t)dt = dK(t) + C(t)dt + dN(t). \quad (35)$$

В уравнении (35) может быть несколько переменных, связанных со случайными факторами. Во-первых, прирост выпуска продукции, определяемый на основе АК-модели, описывается стохастическим процессом, формальное уравнение которого имеет следующий вид:

$$dY(t) = AK(t)dt + b(t)dy(t), \quad (36)$$

где  $b(t)$  — числовой параметр для момента времени  $t$ ;  $dy(t)$  — приращение независимого во времени нормального стохастического процесса винеровского типа с параметрами  $(0, \sigma_y^2 dt)$ . Второе слагаемое в правой части (36) характеризует влияние различных случайных факторов на производство, которое определяется в данном случае компонентом  $dy(t)$ , иногда называемым производственным шоком. Во-вторых, случайный фактор учитывается при определении суммы выплачиваемых налогов, которая удовлетворяет следующему стохастическому уравнению:

$$dN(t) = N(t)dt + n(t)dv(t), \quad (37)$$

где  $N(t)dt$  — средний уровень налогов, которые будут заплачены за  $[t, t + dt]$ , а  $dv(t)$  — независимого по времени нормального стохастического процесса с параметрами  $(0, \sigma_v^2 dt)$ ;  $n(t)$  — числовой параметр для момента времени  $t$ .

В-третьих, в форме стохастического процесса можно моделировать прирост капитала. Учитывая, что увеличение выпуска продукции расходуется на прирост потребления, обеспечивает амортизацию капитала и его увеличение за рассматриваемый период, уравнение прироста капитала можно записать в следующей форме:

$$dK(t) = AK(t)dt - Cdt + b(t)dy(t) - \delta K(t) = (A - \delta)K(t)dt - C(t)dt + b(t)dy(t), \quad (38)$$

где  $\delta$  — норма выбытия капитала.

С учетом соотношений (34)–(38) поставленную задачу можно записать так:

$$\begin{aligned} E_0 \int_0^{\infty} U(C(t)e^{-\rho t}) dt &\rightarrow \max; \\ dB(t) + dK(t) &= dY(t) + iB(t)dt - C(t)dt - dN(t); \\ dY(t) &= AK(t)dt + b(t)dy(t); \\ dK(t) &= (A - \delta)K(t)dt - c(t)dt + b(t)ay(t); \\ dN(t) &= N(t)dt + n(t)dv(t). \end{aligned} \quad (39)$$

Формальное решение поставленной задачи (39) требует специальных математических методов, необходимость применения которых обусловлена тем, что ограничения задачи содержат случайные процессы. Причем далеко не всегда это решение может быть получено в аналитической форме. Основные проблемы анализа стохастических моделей экономического роста подобного вида состоят, во-первых, в обосновании условий равновесия, обычно для этого используется так называемое стохастическое уравнение Беллмана, требующее введения дополнительных предположений [Dixit, Pindyck, 1994, p.93–124; Turnovsky, 2000, p.545–552; Современная макроэкономика ..., 2013, с.218–219].

Во-вторых, речь идет о построении траекторий роста на основе условий подобных моделей. Для этого используются различные варианты аппроксимации стохастических уравнений модели, которые формируются с учетом свойств приращений винеровских процессов. Основными из них являются конечно-разностные приближения, которые формируются на основе модификаций метода Эйлера–Маруямы<sup>3</sup>. Этот метод позволяет формировать дискретные рекуррентные соотношения, аппроксимирующие исходные ограничения модели, учитывающие винеровские случайные процессы или их приращения. С их помощью можно проводить расчеты в режиме имитации по заданной временной решетке и строить соответствующие траектории роста, учитывая начальное или исходное состояние экономики [Воронцовский, 2010, с.115; Воронцовский, Дикарев, 2013; Моделирование экономического роста..., 2011, с.163–169, 222–224, 231–238].

Для пятого, современного, этапа развития и совершенствования учета неопределенности в процессе макроэкономического моделирования, который начался в 2000-х годах, характерными являются постановка и использование динамических стохастических моделей общего равновесия, или DSGE-моделей. В настоящее время они играют весьма существенную роль в прикладных задачах, опирающихся на об-

<sup>3</sup> Подробнее о численных методах решения стохастических уравнений см.: [Higham, 2001; Kloeden, Platen, 1992].

щую теорию равновесия и предполагающих использование стохастических процессов для моделирования случайных переменных и факторов. Важную роль при развитии рассматриваемого класса моделей сыграла так называемая критика Р. Лукаса по поводу использования эконометрики при макроэкономическом моделировании [Lucas, 1976]. В процессе постановки DSGE-моделей анализируются такие экономические явления и процессы, как экономический рост, бизнес-циклы, последствия валютной, налоговой и бюджетной политики. При постановке DSGE-моделей важную роль играют микроэкономические принципы постановки макромоделей, позволяющие учесть последствия принимаемых решений на уровне как государства, так и конкретных домашних хозяйств, фирм и других агентов или лиц, принимающих решения. В настоящее время DSGE-модели представляют собой определенный вариант агентского моделирования в экономике. При этом можно выделить две принципиальные особенности постановки данного класса моделей. Во-первых, при постановке DSGE-моделей обращается внимание на четкое выделение характеристик отдельных агентов и условия их взаимодействия. Должны быть сформулированы и формализованы цели и предпочтения агентов. Например, для домашних хозяйств речь может идти о максимизации полезности потребления; для фирм — максимизации прибыли и т. п. При описании технологии производства должен быть четко выделен производственный потенциал, или производственные возможности, агентов; определены зависимости выпуска продукции и объемов труда, капитала и других ресурсов. Технологические ограничения на решения экономических субъектов также могут включать в себя расходы на корректировку расходов капитала, изменения цен на свою продукцию и т. д. Должны быть определены ограничения, регулирующие экономические взаимодействия агентов. Во многих DSGE-моделях речь идет о заданных экзогенно бюджетных ограничениях, правилах и параметрах денежно-кредитной и налогово-бюджетной политики и проч. Во-вторых, чтобы обеспечить возможности выполнения расчетов по модели в режиме реального времени, количество рассматриваемых агентов, объемы параметров модели и исходных данных, как правило, не должны быть большими. В этом отличие DSGE-моделей от так называемых вычислимых моделей общего равновесия, которые в данной статье не исследуются и в которых количество рассматриваемых агентов может быть, наоборот, очень велико.

Выделим два подхода к постановке DSGE-моделей. Согласно первому подходу определенную основу подобных моделей составляют модели реального бизнес-цикла (RBC-модели), о которых речь шла выше. В данном случае теория DSGE-моделей основана на неоклассических предпосылках моделей роста, и предполагается, что цены меняются под влиянием реальных шоков, которые и приводят к колебаниям экономического цикла. Указанная выше статья Ф. Кидланда и Е. Прескотта [Kydland, Prescott, 1982] часто считается исходной как для развития теории RBC, так и для обоснования указанного типа DSGE-моделей. Второй подход предполагает рассмотрение неокейнсианских постановок DSGE-моделей, которые, с одной стороны, опираются на теорию RBC-моделей, но с другой — учитывают предположение, что цены устанавливаются монопольно конкурирующей фирмой и не могут быть мгновенно и без издержек изменены. При постановке подобных моделей учитываются монетарные шоки. М. Уикенс отмечает, что «большая часть эмпирических фактов о развитии монетарной экономики соответствует условиям новой кейнсианской модели. Эти

данные показывают, что монетарные шоки обеспечивают существенный реальный эффект в краткосрочной перспективе» [Wickens, 2011, p. 521]. Теоретические основы построения новой кейнсианской теории были подробно проанализированы Д. Ромером в статье, в которой он обратил внимание на нарушение условий классической дихотомии и учет особенностей развития экономики, выходящих за пределы предположений Л. Вальраса как на предпосылки данной концепции [Romer, 1993, p. 21].

С практической точки зрения наиболее известной DSGE-моделью является опубликованная в 2003 г. так называемая модель Сметса—Уотерса, которую Европейский центральный банк применил для анализа экономики еврозоны в целом [Smets, Wouters, 2003]. В этой модели выделены три вида агентов: домашние хозяйства, которые оптимизируют потребление и размеры отработанного времени при заданных бюджетных ограничениях; фирмы, оптимизирующие использование ресурсов труда и капитала; центральный банк, который контролирует денежно-кредитную политику. Неопределенность в модели Сметса—Уотерса учитывается в форме соответствующих шоковых переменных, в том числе речь идет о шоках предпочтений для домашних хозяйств, о производственных, технологических и инвестиционных шоках для фирм; монетарных шоках для государства или центрального банка. Содержательное изложение модели Сметса—Уотерса приводит М. Уикенс [Wickens, 2011, p. 522–525]. В рамках этого подхода существенную роль играет калибровка параметров модели. Ф. Сметс и Р. Уотерс [Smets, Wouters, 2003; 2007] предлагают использовать для этого байесовский метод, в более поздних работах речь идет о применении для этого имитационного метода, или метода Монте-Карло (см., напр.: [Le, Minford, Wickens, 2013]). В настоящее время есть примеры использования моделей данного типа для анализа экономики, разработанных центральными банками отдельных стран, например Банком Эстонии [Gelain, Kulikov, 2009], Национальным банком Словакии [Zeman, Senaj, 2009] и др. В целом развитие DSGE-моделей и их применение в значительной степени связаны с учетом влияния монетарных или денежных шоков на экономическое развитие.

## 5. Заключение

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. В результате были выделены предварительный этап и пять основных этапов развития теории и моделирования неизвестных или неоднозначно определенных факторов. Краткое содержание этапов и их периодизация представлены в таблице.

2. На предварительном этапе речь шла в основном об уточнении понятий, определений, возможностей учета неопределенных факторов, которые имели достаточно общий характер и могли быть использованы при моделировании различных отраслей и сфер экономики, а не только при моделировании экономического роста.

3. Первый этап содержательного развития теории учета неопределенности в процессе моделирования определяется разработкой теории адаптивных, а затем и рациональных ожиданий, в том числе с учетом обучения как исторически первой формой учета неопределенности. Формальное моделирование ожиданий нашло отражение преимущественно при постановке моделей потребителей и других экономических агентов. Вместе с тем гипотеза рациональных ожиданий, прочно вошедшая во многие учебники макроэкономики, требует своего окончательного подтверждения.

Таблица. Периодизация исследований по учету и моделированию неопределенных факторов в моделях экономического роста

Этап	Основные характеристики	Период времени
Предварительный	Обоснование и уточнение понятий, определений и свойств, позволяющих моделировать неопределенные факторы	1980-е годы — середина 1950-х годов
Первый	Теория и моделирование ожиданий	1950-е — 1980-е годы
Второй	Простые стохастические модели роста	1970-е годы
Третий	Модели реальных деловых циклов	Середина 1980-х годов
Четвертый	Многопериодные стохастические модели роста для закрытой и малой открытой экономики	Конец 1990-х — начало 2000-х годов
Пятый	Динамические стохастические модели общего экономического равновесия	Начало 2000-х годов

4. В процессе развития теории и моделирования макроэкономики с учетом неопределенных однозначно факторов было выделено еще четыре этапа. На втором этапе имела место постановка первых простых стохастических моделей роста, опирающихся на неоклассические предпосылки; на третьем — разработка моделей реальных деловых циклов (RBC-модели), в которых нашли свое отражение производственные шоки при моделировании технологических коэффициентов производственной функции; на четвертом этапе развитие получили стохастические модели экономического роста для закрытой и малой открытой экономики; пятый, современный, этап обусловлен постановкой и использованием динамических стохастических моделей общего равновесия (DSGE-модели), которые учитывают шоки монетарной политики. В моделях, которые формируются на всех указанных этапах, шоковые переменные моделируются в форме винеровских случайных процессов или их приращений.

5. На примере анализа условий модели Брока и Мирмана показано, что выдвигнутая гипотеза о том, что применение для моделирования неопределенных однозначно или заранее неизвестных макроэкономических факторов в форме случайных процессов, фактически представляет собой развитие теории автономного технического прогресса, предполагавшей моделирование влияния неизвестных факторов с помощью детерминированного параметра. В условиях стохастических моделей роста применение случайных процессов означает аппроксимацию влияния множества неизвестных факторов, которые не учитываются прямо в модели, на макроэкономическое развитие без учета конкретного воздействия отдельных факторов.

6. Проблемы практического использования моделей экономического роста с учетом случайных факторов требуют проведения калибровки модели. В настоящее время методы калибровки разработаны и апробированы для моделей финансовых рынков, где она может осуществляться даже в ежедневном режиме. Развитие методов калибровки для стохастических моделей экономического роста различного вида требует дальнейшего исследования.

7. Наличие различных видов стохастических процессов в моделях макроэкономики существенно затрудняет содержательный экономический анализ условий модели, обоснование соотношений равновесия. Общепринятого подхода для их обо-

снования в настоящее время не разработано. Метод, основанный на использовании стохастического уравнения Беллмана, достаточно сложен и требует введения дополнительных предпосылок и соотношений.

8. Состояния макроэкономического равновесия должны быть определены как динамично меняющиеся при относительной стабильности на товарных, финансовых и иных рынках. При этом определенное соответствие траекторий роста в условиях равновесия зависит от рассматриваемых стохастических процессов, носит изменяющийся характер и определяется с точностью до совпадения параметров стохастических процессов, что предполагает колебания соответствующих макроэкономических показателей в условиях равновесия в определенной области, определяемой параметрами рассматриваемых стохастических процессов.

9. Перспективы развития теории стохастического моделирования экономического роста в настоящее время связаны с постановкой DSGE-моделей, опирающихся либо на модификацию исходных RBC-моделей, либо на использование неокейнсианского подхода и учитывающих монетарные шоки. Это определило значение подобных моделей при анализе экономики на уровне центральных банков отдельных стран или Европейского центрального банка. Использование DSGE-моделей позволяет обеспечивать их определенное соответствие с отдельными закономерностями развития реальной экономики на базе стохастических моделей.

10. Теория экономического роста, опирающаяся на детерминированные модели роста, носит более законченный и обоснованный характер по сравнению с теорией моделирования экономического роста с учетом стохастических процессов. Моделирование экономики на основе стохастических моделей в настоящее время не завершено, оно требует совершенствования своего теоретического обоснования и развития возможностей практического использования полученных результатов.

## Литература

- Бэм-Баверк Е.* Капитал и прибыль. История и критика теорий процента на капитал. СПб., 1909. VIII + 644 с.
- Блауг М.* Экономическая мысль в ретроспективе / пер. с англ. 4-е изд. М.: Дело Лтд., 1994. 720 с.
- Воронцовский А. В.* Современные подходы к моделированию экономического роста // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2010. № 3. С. 105–119.
- Воронцовский А. В., Дикарев А. Ю.* Прогнозирование макроэкономических показателей в режиме имитации на основе стохастических моделей экономического роста // Финансы и Бизнес. 2013. № 2. С. 33–51.
- Кейнс Дж. М.* Общая теория занятости процента и денег // Кейнс Дж. М. Избранные произведения / пер. с англ. М.: Экономика, 1993. 543 с.
- Кларк Дж. Б.* Распределение богатства / пер. с англ. М.: Экономика, 1992. 447 с.
- Крушвиц Л.* Финансирование и инвестиции. Неоклассические основы финансов / пер. с нем. СПб.: Питер, 2000. XVI+382 с.
- Маршалл А.* Принципы экономической науки / пер. с англ. М.: Прогресс, 1993. Т. 2. 310 с.
- Моделирование экономического роста в условиях современной экономики / А. В. Воронцовский, А. Ю. Дикарев, Т. Д. Ахобадзе, А. Л. Дмитриев, В. Г. Шеров-Игнатъев; отв. ред. А. В. Воронцовский. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2011. 284 с.
- Панорама экономической мысли / ред. Д. Гринзэуэй, М. Блини, И. Стюарт. СПб.: Экономическая школа, 2002. Т. 1. XVI+666 с.
- Современная макроэкономика: избранные главы: учебник / Воронцовский А. В., Гиленко Е. В., Дубянский А. Н., Ефимова Е. Г. / под ред. А. В. Воронцовского. М.: РГ-Пресс, 2013. 408 с.
- Abel A. B.* A Stochastic Model of Investment, Marginal  $q$  and the Market Value of the Firm // International Economic Review. 1985. Vol. 26. P. 305–322.

- Abel A. B. Optimal Investment under Uncertainty // *American Economic Review*. 1983. Vol. 73. P. 228–233.
- Abel A. B., Eberly J. A Unified Model of Investment under Uncertainty // *American Economic Review*. 1994. Vol. 84. P. 1369–1384.
- Acemoglu D. *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton: Princeton University Press, 2009. 990 p.
- Benavie A., Grinols E., Turnovsky S. J. Adjustment Costs and Investment in a Stochastic Endogenous Growth Model // *Journal of Monetary Economics*. 1996. Vol. 38. P. 77–100.
- Bewley Tr. F. The Permanent Income Hypothesis: A Theoretical Formulation // *Journal of Economic Theory*. 1977. Vol. 16. P. 252–292.
- Bewley Tr. F. The Optimum Quantity of Money. In *Models of Monetary Economies* // Federal Reserve Bank of Minneapolis / eds. J. H. Kareken, N. Wallace. Minneapolis, 1980. P. 169–210.
- Blume L. E., Easley D. Learning to be Rational // *Journal of Economic Theory*. 1982. Vol. 26. P. 340–351.
- Bray M. M., Kreps D. M. Rational Learning and Rational Expectations // *Arrow and the Ascent of Modern Economic Theory* / ed. by G. Freiwel. London, 1987. P. 597–625.
- Bray M. M., Savin N. E. Rational Expectations Equilibria, Learning and Model Specifications // *Econometrica*. 1986. Vol. 54. P. 1129–1160.
- Breedon D. T. Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities // *Journal of Financial Economics*. 1979. N 7. Sept. P. 265–296.
- Brock W., Mirman L. Optimal Economic Growth under Uncertainty: Discounted Case // *Journal Economic Theory*. 1972. P. 479–513.
- Clark J. B. *Essentials of Economic Theory*. New York: The Macmillan Company, 1907. 566 p.
- Cagan P. The Monetary Dynamics of Hyperinflation // *Studies in the Quantity Theory of Money*. Chicago, 1956. P. 25–117.
- Cyert R. M., De Groot M. H. Rational Expectations and Bayesian Analysis // *Journal of Political Economy*. 1974. Vol. 82. P. 521–536.
- De Canio S. J. Rational Expectations and Learning From Experience // *Quarterly Journal of Economics*. 1979. Vol. 93. P. 47–57.
- Dixit A., Pindyck P. *Investment under Uncertainty*. Princeton (N. J.): Princeton University Press, 1994. 468 p.
- Frenkel J. A. Inflation and the Formation of Expectations // *Journal of Monetary Economics*. 1975. Vol. 1. P. 403–421.
- Friedman B. M. Optimal Expectations and the Extreme Information Assumptions of “Rational Expectations” Macromodels // *Journal of Monetary Economics*. 1979. Vol. 5. P. 23–41.
- Friedman M. *Theory of the Consumption Function*. Princeton (N. J.): Princeton University Press, 1957. 243 p.
- Froot K. A., Ito T. On the Consistency of Short-run and Long-run Exchange Rate Expectations // *Journal of Intern. Money and Finance*. 1989. Vol. 8. P. 487–510.
- Gali J. Technology, Employment and the Business Cycle: Do Technology Shocks Explain the Business Cycle // *American Economic Review*. 1999. Vol. 89, N 1. P. 249–271.
- Gali J. *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle: an Introduction to the new Keynesian Framework*. Princeton: Princeton University Press, 2008. 203 p.
- Gali J., Rabanal P. Technology Shocks and Aggregate Fluctuations: How Well Does the RBC Model Fit Post-war U.S. Data? // *NBER Macroeconomics Annual*. 2004. Vol. 19. P. 249–271.
- Gelain P., Kulikov D. An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model for Estonia // *Working Papers Series*. 2009. N 5. EestiPank [Electronic resource]. URL: <http://www.eestipank.ee/en/publication/working-papers/2009/paolo-gelain-and-dmitry-kulikov-estimated-dynamic-stochastic-general-equilibrium-model-estonia> (дата обращения: 9.07.2013).
- Gong G., Semmler W. Stochastic Dynamic Macroeconomics: Theory, Numeric and Empirical Evidence, 2004. [Electronic resource]. URL: [www.wiwi.uni-bielefeld.de](http://www.wiwi.uni-bielefeld.de) (дата обращения: 5.07.2013).
- Grinols E., Turnovsky S. J. Optimal Government Finance Policy and Exchange Rate Management in a Stochastically Growing Open Economy // *Journal of International Money and Finance*. 1996. Vol. 15, N 5. P. 687–716.
- Haavelmo T. The Role of the Econometrician in the Advancement of Econometric Theory // *Econometrica*. 1958. Vol. 26. P. 351–357.
- Hartman R. C. The Effects of Price and Cost Uncertainty on Investment // *Journal of Economic Theory*. 1972. Vol. 5. P. 258–266.
- Higham D. J. An Algorithmic Introduction of Numerical Solution of Stochastic Differential Equations // *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*. 2001. Vol. 43, N 3. P. 525–546.
- Holden K., Peel D., Thompson J. *Expectations: Theory and Evidence*. London: Macmillan, 1985. 195 p.
- King R. G., Plosser C. I., Rebelo S. T. Production, Growth and Business Cycles I: the Basic Neo-classical Model // *Journal of Monetary Economics*. 1988a. Vol. 21. P. 195–232.

- King R. G., Plosser C. I., Rebelo S. T. Production, Growth and Business Cycles II: New Directions // *Journal of Monetary Economics*. 1988b. Vol. 21. P. 309–341.
- Klein L. R. Applications of Survey Methods and data the Analysis of Economic Fluctuations // *Contributions of Survey Methods to Economic Fluctuations* / ed. by L. R. Klein. New York: Columbia University Press, 1954.
- Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations Berlin: Springer, 1992. 632 p.
- Knight F. Risk, Uncertainty and Profit. Boston (M. A.): Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Co, 1921. 269 p.
- Koyck L. M. Distributed Lags and Investment Analysis. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1954. 111 p.
- Kydland F. E., Prescott E. C. Time to Build and Aggregate Fluctuations // *Econometrica*. 1982. Vol. 50. P. 1345–1370.
- Le V. P. M., Minford P, Wickens M. A Monte Carlo Procedure for Checking Identification in DSGE Models. 2013 [Electronic resource]. URL: <http://business.cardiff.ac.uk> (дата обращения: 25.09.2013).
- Long J. B., Plosser C. I. Real Business Cycles // *Journal of Political Economy*. 1983. Vol. 91. P. 39–69.
- Lovell M. Tests of the Rational Expectations Hypothesis // *American Economic Review*. 1986. Vol. 76. P. 110–124.
- Lucas R. E., jr., Sargent T. J. Rational Expectations and Econometrics Practice. London: Allen & Unwin, 1981. 319 p.
- Lucas R. E., jr. Econometric Policy Evaluation: A Critique // *The Phillips Curve and Labor Markets*. Amsterdam: North-Holland, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy. 1976. Vol. 1. P. 19–46.
- Lucas R. E., jr. Asset Pricing in an Exchange Economy // *Econometrica*. 1978. Vol. 42, N 6. P. 1429–1445.
- Lucas R. E., jr., Prescott E. C. Investment under Uncertainty // *Econometrica*. 1971. Vol. 39, N 5. P. 659–681.
- Meiselman D. The Term Structure of Interest Rates. Englewood Cliffs, N. J. Prentice Hall, 1962. x+75 p.
- Mincer J. Models of Adaptive Forecasting // *Economic Forecasts and Expectations: Analysis of Forecasting Behavior and Performance*. New York: National Bureau of Economic Research, 1969. P. 112–166.
- Modigliani F., Sauerlender O. W. Economic Expectations and Plans of Firms in Relation to Short-term Forecasting, in Short-term Economic Forecasting // *NBER Studies in Economy and Wealth*. N 17. Princeton (N. J.): Princeton Univ. Press, 1955. P. 261–362.
- Muth J. F. Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts // *Journal of American Statistical Association*. 1960. Vol. 55. P. 299–306.
- Muth J. M. Rational Expectations and the Theory of Price Movements // *Econometrica*. 1961. Vol. 29. P. 315–335.
- Nerlove M. Expectations Plans and Realizations in Theory and Practice // *Econometrica*. 1983. Vol. 51. P. 1251–1279.
- Pesarn M. N. Expectations Formations and Macroeconomic Modeling // *Contemporary Macroeconomic Modelling* / ed. by P. Malgrange, P.-A. Muet. Oxford: Basil Blackwell, 1984. P. 27–55.
- Pindyck P. C. Adjustment Costs, Uncertainty, and the Behavior of the Firm // *The American Economic Review*. 1982. Vol. 72. P. 415–427.
- Romer D. The New Keynesian Synthesis // *The Journal of Economic Perspectives*. 1993. Vol. 7. Winter. P. 5–22.
- Romer D. Dynamic Stochastic General Equilibrium Models of Fluctuations. In *Advanced Macroeconomics*. Fourth ed. New York: McGraw-Hill Irwin, 2012. P. 312–364.
- Rosenstein-Rodan P. The Role of Time in Economic Theory // *Economica*. 1934. New Series. Vol. 1. P. 77–91.
- Rotemberg J. J., Woodford M. An Optimization-Based Econometric Framework for the Evaluation of Monetary Policy // *NBER Macroeconomics Annual*. 1997. Vol. 12. P. 297–346.
- Rubinstein M. The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Option // *Bell Journal of Economics*. 1976. N 2. P. 407–425.
- Sargent T. J. Dynamic Macroeconomic Theory. Cambridge (M.A.): Harvard Univ. Press, 1987. 468 p.
- Shackle G. L. S. Uncertainty in Economics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1955. xiv+267 p.
- Simon H. A. The Role of Expectations in an Adaptive or Behavioristic Model // *Expectations, Uncertainty and Business Behavior* / ed. by M. J. Bowman. New York: Social Science Research Council, 1958. P. 49–58.
- Smets F., Wouters R. An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area // *Journal of European Economic Association*. 2003. Vol. 1, N 5. P. 1123–1175.
- Smets F., Wouters R. Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach // *American Economic Review*. 2007. Vol. 97, N 3. P. 586–606.
- Taylor J. B. Monetary Policy During a Transition to Rational Expectations // *Journal of Political Economy*. 1975. Vol. 83. P. 1009–1021.

- Townsend R. M.* Market Anticipations, Rational Expectations and Bayesian Analysis // *International Economic Review*. 1978. Vol. 19. P. 481–494.
- Trivedi P. K.* Retail Inventory Investment Behavior // *Journal of Econometrics*. 1973. Vol. 1. P. 61–80.
- Turnovsky S.* Optimal Stabilization Policies for Deterministic and Stochastic Linear System // *Review of Economic Studies*. 1973. Vol. 40, N 121. P. 79–96.
- Turnovsky S. J.* On the Role of Government in a Stochastically Growing Open Economy // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1999. Vol. 23, N 5–6. P. 873–908.
- Turnovsky S. J.* *Methods of Macroeconomic Dynamics*. Sec. ed. Mass.: MIT Press, 2000. 670 p.
- Turnovsky S. J., Chattopadhyay P.* Volatility and Growth in Developing Economies: Some Numerical Results and Empirical Evidence // *Journal of International Economics*. 2003. Vol. 59. P. 267–295.
- Varian H. R.* *Intermediate Microeconomics. A Modern Approach*. 7 ed. New York; London: W-W- Norton & Company, 2006. 559 p.
- Wickens M.* *Macroeconomic Theory: A Dynamic General Equilibrium Approach*. 6 ed. New York; Princeton; Oxford: Princeton University Press, 2011.
- Woodford M.* *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*. New York: Princeton University Press, 2003.
- Wren-Lewis S.* An Econometric Model of UK Manufacturing Employment Using Survey data on Expected output // *Journal of Applied Economics*. 1986. Vol. 1. P. 297–316.
- Zeman J., Senaj M.* DSGE model Slovakia [Electronic resource] // Working Papers N 3. National Bank of Slovakia. 2009. URL: <http://www.nbs.sk> (дата обращения: 12.07. 2013).

Статья поступила в редакцию 24 марта 2014 г.