

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 330.4

А. В. Воронцовский, Л. Ф. Вьюненко

ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИИ УСЛОВИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА¹

В статье рассматриваются возможности построения расчетных траекторий макроэкономических показателей, полученных в режиме имитации на основе дискретной аппроксимации условий стохастической модели экономического роста. Сформулированы условия стохастической модели роста. Выполнены расчеты в режиме имитации на условных примерах, которые показывают, во-первых, что при отсутствии случайных переменных возможно построение аппроксимирующих траекторий макроэкономических показателей, меняющих свои тенденции на определенном периоде; во-вторых, что при построении аппроксимирующих траекторий с учетом приращений винеровских случайных процессов в режиме имитации может быть обеспечена устойчивость средних расчетных траекторий изменения макроэкономических показателей. На основе данных Скандинавских стран показано определенное соответствие фактических изменений ВВП и объемов потребления и средних расчетных траекторий рассматриваемых показателей; при этом траектории фактического роста макроэкономических показателей располагаются в пределах 95%-ного доверительного интервала, определяемого по результатам имитации, который может быть сужен при преобразовании исходных уравнений модели. Полученные результаты существенно зависят от условий рассматриваемой стохастической модели роста и требуют дальнейшего анализа. Библиогр. 37 назв. Ил. 12. Табл. 3

Ключевые слова: стохастические модели экономического роста, приращения винеровских случайных процессов, дискретная аппроксимация условий стохастической модели роста, статистическое моделирование, средние расчетные траектории роста макроэкономических показателей, доверительные интервалы.

Алексей Владимирович ВОРОНЦОВСКИЙ — доктор экономических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9; a.vorontsovskiy@econ.pu.ru

Людмила Федоровна ВЬЮНЕНКО — канд. физ.-мат. наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9; vyunenko@yandex.ru

Aleksey V. VORONTSOVSKIY — Doctor of Economics, Professor, St. Petersburg State University, 7/9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation; a.vorontsovskiy@econ.pu.ru

Lyudmila F. VYUNENKO — Candidate of Economics, Associate Professor, St. Petersburg State University, 7/9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation; vyunenko@yandex.ru

¹ Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ 13.38.88.2012.

CONSTRUCTING OF ECONOMIC DEVELOPMENT TRAJECTORIES BY APPROXIMATING CONDITIONS OF STOCHASTIC MODELS OF ECONOMIC GROWTH

The article deals with the opportunities of building estimated trajectories of macroeconomic indicators obtained in simulations based on discrete approximation of conditions of stochastic economic growth models. Conditions for the stochastic growth model are formulated. Calculations made under simulation on conditional examples show that, first, in the absence of random variables it is possible to construct approximate trajectories of macroeconomic indicators changing their trends for a certain period; second, construction of approximate trajectories based on increments of the Wiener process in simulation mode can ensure stability of average realized trajectories of macroeconomic indicators changes. Using Scandinavian countries data, we show some correspondence between average realized trajectories and actual changes in GDP and consumption indicators; actual trajectory of macroeconomic indicators growth are allocated within 95% confidence interval determined by results of the simulation, that can be narrowed down when converting original equations of the model. The results obtained depend significantly on the circumstances of the stochastic growth model and require further analysis. Refs 37. Figs 12. Tables 3.

Keywords: stochastic economic growth models, Wiener process increment, discrete approximation of stochastic growth model conditions, statistical modeling, calculated average growth trajectory of macroeconomic indicators, confidence intervals.

1. Введение

Одно из современных направлений развития макроэкономического моделирования связано с постановкой и анализом моделей экономического роста, в которых в той или иной форме используются случайные процессы для моделирования основных макроэкономических показателей или параметров рассматриваемых моделей. Подобное расширение условий макроэкономических моделей представляет собой закономерный этап их развития, связанный с математической формой модели; при постановке и анализе подобных моделей находят свое отражение процессы, которые происходят в мировой экономике и, прежде всего, определяются глобализацией современного общества.

Процессы глобализации оказывают противоречивое влияние на макроэкономические условия отдельных стран. Относительно стабилизирующее влияние заключается в том, что одни страны получают возможность за счет экспорта капитала и товаров поддерживать устойчивое экономическое развитие, а другие повышают свой технический и технологический уровень, привлекая из-за рубежа товары, технологии, капиталы и рабочую силу. Одновременно процессы глобализации экономики порождают и дестабилизирующие факторы и проблемы. Дестабилизирующее влияние заключается в том, что локальные проблемы и кризисы одних стран могут оказывать существенное негативное воздействие на экономический рост и стабильность макроэкономических условий других стран и регионов.

Проблемы развития процессов глобализации в сфере экономики рассматривали Д. Сальваторе [Salvatore, 2012], Дж. Штиглиц [Stigliz, 2002], Р. Гангопадхайя и М. Чаттерджи [Gangopadhyay, Chatterji, 2005] и др. С одной стороны, они обеспечивают выравнивание условий производства и вовлечение экономики стран в мировые процессы обмена и торговли, но, с другой — приводят к достаточно быстрому распространению кризисных явлений, возникающих в одних странах, на экономику других стран. Анализ закономерностей развития инновационной экономики в условиях глобализации показывает нарастание и усиление влияния внешних факторов

неопределенности и риска на национальную экономику отдельных стран и регионов, требует модификации исходной парадигмы моделей экономического роста, предполагающей непрерывный рост макроэкономических показателей в течение рассматриваемого периода. Практика развития экономики отдельных стран и регионов, особенно в конце XX и начале XXI в., наглядно показывает, что периоды роста макроэкономических показателей чередуются с периодами спада, и предположение о непрерывном росте, которое вошло в макроэкономическую теорию, начиная с модели Солоу—Свена, нуждается в существенной корректировке, обусловленной тем, что усиление влияния факторов неопределенности и риска на экономическое развитие требует их учета в процессе анализа и прогнозирования экономики. При этом необходимо показать, что в условиях формируемых макроэкономических моделей возможны построения таких траекторий рассматриваемых макроэкономических показателей, которые предполагают как рост, так и сокращение их значений.

На сегодняшний день не существует единого подхода к учету случайных факторов в моделях экономического роста; отсутствует общепринятое единое операционное определение понятия макроэкономического риска и форм его выражения [Воронцовский, 2005]. Именно факторы риска приводят к нарушению относительной стабильности макроэкономического развития. Влияние подобных факторов требуется учитывать при моделировании экономического роста, один из подходов при этом состоит в обосновании постановки и анализа стохастических моделей экономического роста. Содержательные исследования возможностей использования случайных переменных при постановке макроэкономических моделей начались с 1970-х годов. Ряд авторов уже тогда предлагали учитывать неопределенность в форме случайных переменных при моделировании инвестиций и издержек регулирования, в том числе Р.Е. Лукас и Е.К. Прескотт [Lucas, Prescott, 1971], Р.К. Хартман [Hartman, 1972], П.К. Пиндайк [Pindyck, 1982], А.Б. Абель [Abel, 1983; 1985], А.Б. Абель и Дж. Эберли [Abel, Eberly, 1994]. В их работах речь шла только об учете шоковых переменных в отдельных ограничениях модели, они не рассматривали постановки стохастических макроэкономических моделей роста в целом.

Основы теории и моделирования экономики с учетом случайных процессов в рамках теории портфеля и общей теории финансов были заложены в работах лауреатов Нобелевской премии по экономике Р.Мертон [Merton, 1969; 1971; 1990] и П. Самуэлсона [Samuelson, 1969]. Моделирование экономического роста с учетом случайных процессов наиболее полно представлено в работах американского экономиста С.Тарновского [Turnovsky, 1993; 1995; 2000]. Анализ и использование стохастических моделей экономического роста предполагает решение ряда проблем, в том числе речь идет о возможностях моделирования траекторий роста макроэкономических показателей на основе аппроксимации стохастических уравнений модели роста, в основу которой положены специальные методы решения стохастических дифференциальных уравнений и возможности построения траекторий развития экономики в режиме имитации. Наиболее полно проблемы анализа и численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений представлены в работе немецких математиков П.Клоедена и Е.Платена [Kloeden, Platen, 1999]. На основе подобного анализа были разработаны специальные методы аппроксимации стохастических уравнений, использующие так называемый метод Эйлера—Маруямы, представленные как в зарубежной литературе (в том числе можно отметить

работы А. Енцена и П. Клоедена [Jentzen, Kloeden, 2009a; 2009b; 2009c]), так и в отечественных изданиях [Моделирование экономического роста..., 2011, с. 164–169]. При этом сформированные на основе подобных аппроксимаций траектории развития макроэкономических показателей в режиме имитации, как правило, показывают тенденцию постоянного роста указанных показателей [Там же, с. 210–212, 223–224, 235–237; Воронцовский, 2010; Воронцовский, Дикарев, 2013], что определяется неоклассическими предпосылками рассматриваемых моделей.

Вместе с тем в настоящее время нельзя утверждать, что существуют некоторые общепринятые подходы к постановке и анализу стохастических моделей роста и обоснованию траекторий развития экономики с учетом случайных факторов; недостаточно проанализированы свойства получаемых аппроксимирующих траекторий развития макроэкономических показателей, в том числе — в какой степени подобный подход позволяет учесть влияние факторов развития экономики отдельных стран, а также могут ли отражать траектории роста, формируемые в режиме имитации, возникающие колебания значений этих показателей во времени.

В настоящей статье рассмотрим возможности проведения дискретной аппроксимации стохастических ограничений модели экономического роста, учитывая свойства приращений винеровских случайных процессов; проанализируем специфику построения траекторий роста макроэкономических показателей в режиме имитации, определяемых начальными или исходными значениями макроэкономических показателей и аппроксимирующих тенденции экономического развития; проведем исследование возможностей принципиального изменения тенденций траекторий развития макроэкономических показателей в условиях как детерминированного, так и стохастического подходов; обратим особое внимание на возможности построения статистических оценок качества подобных траекторий, полученных в режиме статистического моделирования.

В процессе исследования проанализируем возможности выполнения трех основных гипотез. Во-первых, проверим, возможно ли в принципе в рамках стохастических моделей роста обеспечить построение таких аппроксимирующих траекторий макроэкономических показателей, которые меняют свои тенденции на заданном периоде, т. е. не соответствуют парадигме роста рассматриваемого класса моделей. Во-вторых, проанализируем возможности построения, опираясь на дискретную аппроксимацию условий определенного типа стохастических моделей экономического роста и учитывая только текущие значения рассматриваемых макроэкономических показателей, таких траекторий изменения макроэкономических показателей в режиме имитации, которые обеспечивают определенное соответствие средних расчетных траекторий в каждом цикле имитационных расчетов и фактических изменений указанных показателей. В-третьих, проверим, располагаются ли траектории фактического роста макроэкономических показателей в пределах 95%-ного доверительного интервала, определяемого по результатам имитации, и можно ли обеспечить сужение подобного доверительного интервала.

Проверка и анализ всех указанных гипотез будут выполнены на основе определенной части ограничений достаточно простой стохастической модели экономического роста. Используется дискретная аппроксимация этих соотношений, построенная на основе свойств приращений винеровских случайных процессов. Для этого будет применен метод статистического моделирования [Джекел, 2004; Айвазян,

Афанасьев М., Афанасьев А., 2009; Вьюненко, 2009], который представляет собой простейший вариант метода имитационного моделирования и в последнее время все более широко применяется при проведении экономических исследований в условиях неопределенности.

2. Основные ограничения простейшей стохастической модели роста

Рассмотрим формирование условий модели роста, которые учитываются при анализе и построении траекторий роста. Для описания объемов выпускаемой продукции, выражаемых производственной функцией, используется так называемая АК-модель, иногда говорят об АК-технологии. Ее построение основывается на предположении о том, что каждая дополнительная единица капитала обеспечивает постоянный прирост выпуска продукции², и на расширенном понимании капитала как фактора или переменной производственной функции. При этом подходе к определению капитала не только учитывают его чисто материально-вещественную составляющую, но и включают в это понятие человеческий капитал, знания, общественную инфраструктуру и т. п. [Барро, Сала-и-Мартин, 2010, с. 270]. Одним из первых подобную модель рассматривал американский экономист М. Франкель [Frankel, 1962]. Определенное развитие моделирования производства с помощью АК-модели дано в работах Ц. Грилихеса [Griliches, 1979], П. Ромера [Romer, 1986] и Р. Лукаса [Lukas, 1988]; последний в конечном итоге выделил человеческий капитал в рамках общего объема капитала как форму передачи знаний и фактор экономического роста.

Применение АК-модели при анализе производства представляет собой одно из современных направлений развития макроэкономического моделирования, которое отражает определенные особенности развития научно-технического прогресса, связанные с существенным возрастанием роли и значения материально-вещественного фактора производства. Проблемы постановки и анализа подобных моделей в значительной степени связаны с тем, в какой степени прочие факторы, в том числе человеческий капитал и знания, общественная инфраструктура и др., могут быть учтены в изменениях размера капитала и технологического коэффициента в рамках данной модели. Существенное преимущество применения АК-модели при стохастическом моделировании экономического роста обусловлено значительным упрощением производственной функции и облегчением формального анализа условий и соотношений моделей роста. Указанная форма производственной функции характеризуется постоянной отдачей от прироста капитала.

Применение подобного рода моделей было вызвано необходимостью преодолеть предположение об убывающей предельной производительности факторов, которое используется в неоклассических моделях роста, поскольку в современных условиях развитие производства и отдача от них существенно зависят от того, с каким именно материальным капиталом они взаимодействуют. В любом случае постановка подобной модели предполагает более широкое толкование понятия капитала, кото-

² АК-модель — односекторная модель эндогенного роста с постоянной отдачей от капитала, которая широко используется при построении различных вариантов моделей экономического роста (подробнее см., напр.: [Шараев, 2006, с. 69–89]). Расширенные варианты АК-модели с учетом материального и человеческого капитала, а также распространения знаний и технологий приведены в кн.: [Барро, Сала-и-Мартин, 2010, с. 269–285].

рое должно включать не только материальный, но и человеческий капитал, знания, общественную инфраструктуру и т. п. Тем самым рост предельной производительности факторов может определяться указанными условиями, которые включаются в расширенное понятие капитала и могут трактоваться по-разному.

Различные формы АК-модели применяются при моделировании макроэкономической производственной функции в условиях постановки агентских моделей экономического роста, а также при моделировании деятельности фирм, отраслей или иных агентов — производителей продукции. В данной статье при постановке условий модели используем подход, который предполагает выделение капитала как основного фактора модели роста [Waelde, 2011], и представим возможные модификации ограничений этой модели. При описании условий модели будем рассматривать только те ее соотношения, которые будут необходимы для построения дискретной аппроксимации и проведения расчетов в режиме имитации.

При формализации условий модели будем исходить из следующих предпосылок: учитываются условия модели экономического роста для закрытой экономики; производственная функция и технологические изменения описываются в форме АК-модели; рассматривается максимальная агрегация факторов модели; предполагается, что прирост выпуска продукции полностью расходуется на накопление и потребление; приросты выпуска продукции, капитала и потребления описываются в форме стохастических дифференциальных уравнений, включающих соответствующий размер капитала и случайный фактор в форме приращения винеровского случайного процесса; возмещение капитала определяется по фиксированной ставке.

Представленные предпосылки модели учитываются только при формировании рассматриваемых в статье соотношений и должны быть расширены и дополнены при полной постановке соответствующей модели экономического роста.

Основная задача состоит в исследовании уравнений трех основных макроэкономических параметров: приростов выпуска продукции, капитала и потребления в виде стохастических дифференциальных уравнений при моделировании производства продукции в форме АК-модели, которые записываются с учетом распределения прироста продукции на прирост капитала и потребления, выбытия капитала по фиксированной ставке и влияния случайного фактора пропорционально размеру капитала. Для этих условий далее будет выполнена дискретная аппроксимация.

Поскольку процессы производства моделируются в форме АК-модели, то капитал остается единственным производственным фактором модели. Учитывая предпосылки модели, уравнение прироста выпуска продукции можно записать в следующем виде:

$$dY(t) = (A - \delta)K(t)dt + AK(t)dw(t); \quad (1)$$

где $dY(t)$ — приращение валового выпуска продукции за период $[t, t + dt]$; A — постоянный технологический коэффициент; δ — фиксированная норма выбытия капитала; $K(t)$ — запас капитала в момент времени t ; $dw(t)$ — приращение винеровского случайного процесса со средним, равным нулю, и дисперсией $\sigma_k^2 dt$.

Прирост выпуска продукции расходуется на потребление и увеличение запаса капитала. Тогда можно записать, что

$$dY(t) = dK(t) + dC(t). \quad (2)$$

Учитывая соотношения (1) и (2), получаем выражение для накопления или прироста капитала:

$$dK(t) = ((A - \delta)K(t) - C(t))dt + K(t)dw(t). \quad (3)$$

При построении траектории потребления будем полагать, что объем потребления определяется из соотношения (2), и единственным фактором в рамках данной модели, оказывающим влияние на прирост объема потребления, является прирост капитала. Учитывая, что прирост выпуска продукции определяется по формуле (1) и что случайная величина в уравнении потребления рассчитывается пропорционально выпуску продукции, прирост потребления можно представить так:

$$dC(t) = dY(t) - dK(t) = (A - \delta)K(t)dt - K(t)dt + AK(t)dw(t). \quad (4)$$

Принимая во внимание соотношения (1), (3) и (4), запишем три ограничения, которые могут быть использованы при постановке модели экономического роста для закрытой экономики, учитывающие основные используемые макроэкономические параметры: выпуск продукции, капитал и потребление. Для каждого из них на основе дискретной аппроксимации будут построены рекуррентные соотношения, которые будут использованы при построении траекторий роста указанных макроэкономических показателей:

$$\begin{aligned} dY(t) &= (A - \delta)K(t)dt + AK(t)dw(t); \\ dK(t) &= ((A - \delta)K(t) - C(t))dt + K(t)dw(t); \\ dC(t) &= AKdt - (1 + \delta)K(t)dt + AK(t)dw(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Условия системы (5) представляют собой часть ограничений стохастической модели роста, постановка которой в общем случае предполагает введение целевой функции максимизации потребления и различных вариантов дополнительных ограничений, характеризующих макроэкономические соотношения, а также взаимоотношения рассматриваемых агентов модели, которые должны быть учтены при полной постановке модели роста. Возможны и иные формы учета случайных величин при моделировании выпуска капитала и потребления. При полной постановке модели роста с учетом соотношений системы (5) необходимо учитывать, что второе и третье уравнения системы (5) взаимозависимы и требуются дополнительные условия для определения одного из них. Так, К. Вельде показал, что если учитывать только первые два соотношения из системы (5), ввести в модель максимизацию целевой функции дисконтированного потребления, учесть еще некоторые условия, и использовать стохастическое уравнение Беллмана, то объем потребления определяется пропорционально размеру капитала без учета случайного фактора [Waelde, 2011, p. 620].

Поскольку основная цель настоящей статьи — построение дискретной аппроксимации стохастических траекторий макроэкономических показателей и формирование прогнозов на их основе, то в процессе дальнейшего исследования при построении дискретной аппроксимации траекторий роста будут рассмотрены по отдельности три уравнения системы (5). Их используем для того, чтобы выяснить, в какой

степени выделенные факторы позволяют моделировать тенденции изменения указанных показателей.

Случайные процессы, учитываемые в уравнениях системы (5), представляют собой приращения винеровских процессов, распределенных по нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией $\sigma_k^2 dt$, пропорциональной длительности рассматриваемого временного интервала dt . Используя это свойство, построим рекуррентные соотношения, представляющие собой дискретную аппроксимацию уравнений системы (5).

В Приложении (с. 166, 167) приведены формальные условия, опираясь на которые можно сформировать искомые рекуррентные соотношения. В нем показано (см. условие (5)), что рекуррентное соотношение, которое представляет собой дискретную аппроксимацию траектории потребления, можно записать так:

$$C_{t+\Delta} = C_t + AK_t\Delta - (1+\delta)K_t\Delta + AK_t\sigma_k\sqrt{\Delta}\xi_t, \quad (6)$$

где ξ_t — реализация случайной величины, подчиняющейся стандартному нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице; Δ — шаг временной решетки, в соответствии с которым будут проводиться расчеты в режиме имитации.

Аналогично можно построить рекуррентные соотношения для двух остальных уравнений системы (5). Тогда дискретную аппроксимирующую форму уравнений основных макроэкономических параметров — выпуска продукции, объема капитала и размера потребления — в виде системы рекуррентных соотношений можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_{t+\Delta} &= Y_t + (A - \delta)K_t\Delta + AK_t\sigma_k\sqrt{\Delta}\xi_t; \\ K_{t+\Delta} &= K_t + ((A - \delta)K_t - C_t)\Delta + K_t\sigma_k\sqrt{\Delta}\xi_t; \\ C_{t+\Delta} &= C_t + AK_t\Delta - (1 + \delta)K_t\Delta + AK_t\sigma_k\sqrt{\Delta}\xi_t. \end{aligned} \quad (7)$$

Другой вариант аппроксимирующей формы исходной системы (5) в виде рекуррентных соотношений может быть построен при предположении, что в системе (7) случайная величина u_t , описывающая влияние случайного фактора на промежутке $[t, t + \Delta]$, имеет нормальное распределение со средним, равным нулю, и дисперсией, равной σ_K^2 . Тогда система (7) принимает такой вид:

$$\begin{aligned} Y_{t+\Delta} &= Y_t + (A - \delta)K_t\Delta + AK_t\sqrt{\Delta}u_t; \\ K_{t+\Delta} &= K_t + ((A - \delta)K_t - C_t)\Delta + K_t\sqrt{\Delta}u_t; \\ C_{t+\Delta} &= C_t + AK_t\Delta - (1 + \delta)K_t\Delta + AK_t\sqrt{\Delta}u_t. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее рассмотрим возможности использования системы (8) для построения траекторий изменения макроэкономических показателей в режиме имитации и проанализируем особенности влияния факторов роста на изменения тенденции развития основных макроэкономических показателей. Предлагаемый метод опирается только на использование начальных фактических данных и может применяться в случае явного недостатка или отсутствия статистических данных, а также в условиях ожидаемой смены тенденции развития макроэкономических показателей.

3. Численное моделирование макроэкономических параметров

Рекуррентные соотношения (8) были применены для проведения двух видов вычислительных экспериментов, в процессе которых были получены траектории роста рассматриваемых макроэкономических показателей в режиме имитации. На основе их использования были построены средние расчетные траектории и определены доверительные интервалы. В первом случае случайные факторы не были учтены, т. е. предполагалось, что стандартное отклонение случайной величины u_t в правой части уравнений системы (8) равно нулю. Во втором предполагалось, что значение стандартного отклонения соответствующей случайной величины задано.

3.1. Экспериментальные расчеты без учета случайных факторов

Преобразуем соотношения системы (8) и построим определенный вариант дискретной аппроксимации отдельных ограничений простейшей модели экономического роста (5) без учета случайного фактора, т. е. в «среднестатистических» условиях. Эти соотношения запишем так:

$$\begin{aligned} Y_{t+\Delta} &= Y_t + (A - \delta)K_t \Delta; \\ K_{t+\Delta} &= K_t + ((A - \delta)K_t - C_t) \Delta; \\ C_{t+\Delta} &= C_t + AK_t \Delta - (1 + \delta)K_t \Delta. \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношения системы (9) представляют собой дискретную аппроксимацию рассматриваемых условий исходной модели роста (5) без учета случайных факторов.

Используя условия (9), выполним экспериментальные расчеты траекторий роста учитываемых макроэкономических показателей на определенных условных примерах. В результате расчетов, основанных на такой модели, с учетом начальных значений валового выпуска продукции (Y_0), запаса капитала (K_0), потребления (C_0), постоянного технологического коэффициента (A) и фиксированной нормы амортизации капитала (δ) можно получить определенное представление о средней ожидаемой тенденции изменения рассматриваемых макроэкономических показателей. Одновременно анализ результатов расчетов позволяет определить возможности прогнозирования изменений тенденции развития подобных показателей в условиях предположений неоклассических моделей экономического роста. При проведении вычислительных экспериментов по модели (9) начальные исходные данные ВВП, запаса капитала и потребления были выбраны условными, поскольку целью расчетов было исследование возможных форм зависимости макроэкономических показателей в данной модели.

В процессе экспериментов первого вида, которые предполагают отсутствие случайного фактора и использование детерминированного варианта аппроксимирующих условий вида (9), было изучено изменение на определенном промежутке времени валового выпуска продукции, запаса капитала и потребления, в зависимости от соотношения начальных значений запаса капитала K_0 и потребления C_0 , на условном примере. Промежуток времени задавался 5 лет, норма амортизации капитала δ — 0,2, начальные значения параметров K_0 и C_0 варьировались в широком интервале значений — от 100 до 1000 млрд долл.

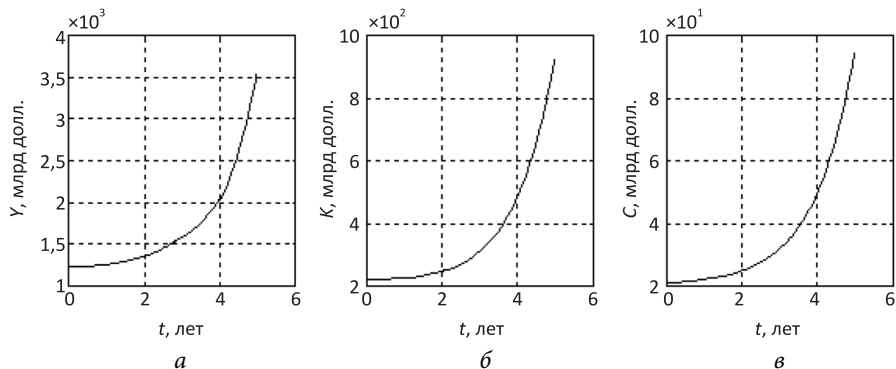


Рис. 1. Результат расчета изменения ВВП (а), запасов капитала (б) и потребления (в) при $C_0 < K_0$.

Обобщенные результаты вычислительных экспериментов приведены на рис. 1–4 в виде типовых графиков зависимостей $Y(t)$, $K(t)$, $C(t)$ при различных значениях соотношения начальных значений потребления C_0 и запаса капитала K_0 . Анализ этих зависимостей показывает, что характер изменения макроэкономических характеристик существенно зависит от указанного соотношения. Графики, приведенные на рис. 1, показывают, что соотношение $C_0 < K_0$ обеспечивает устойчивый рост всех трех рассматриваемых показателей.

При возрастании размера начального потребления до значений $C_0 \approx K_0$ тенденции роста ВВП и потребления сохраняются (рис. 2а, 2в).

В то же время происходит изменение тенденции развития запасов капитала (рис. 2б) — приблизительно через 4 года это запас перестает расти и начинает сокращаться, что неизбежно приведет в дальнейшем к снижению ВВП и потребления.

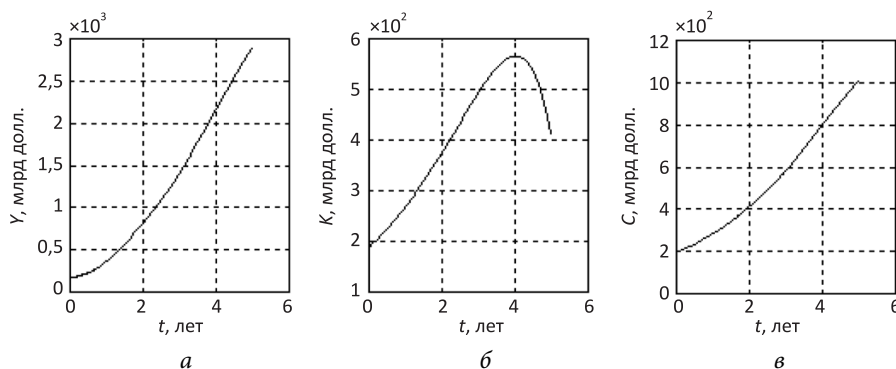


Рис. 2. Результат расчета изменения ВВП (а), запасов капитала (б) и потребления (в) при $C_0 \approx K_0$.

Дальнейшее увеличение размера исходного потребления при неизменном значении запаса капитала приводит к изменению тенденций и ВВП, и потребления (рис. 3): в некоторый момент времени изменяется знак первой производной функций $Y(t)$, $K(t)$, $C(t)$, т. е. траектории макроэкономических показателей изменяют тенденцию развития. Приблизительно через 2,5 года начинает уменьшаться запас ка-

питала (см. рис. 3б), затем, приблизительно через 4 года, начинается снижение ВВП и потребления (см. рис. 3а, 3в). Экономически это можно объяснить тем, что слишком большой размер исходного потребления в будущем приводит к сокращению ресурсов и снижению значений макроэкономических показателей.

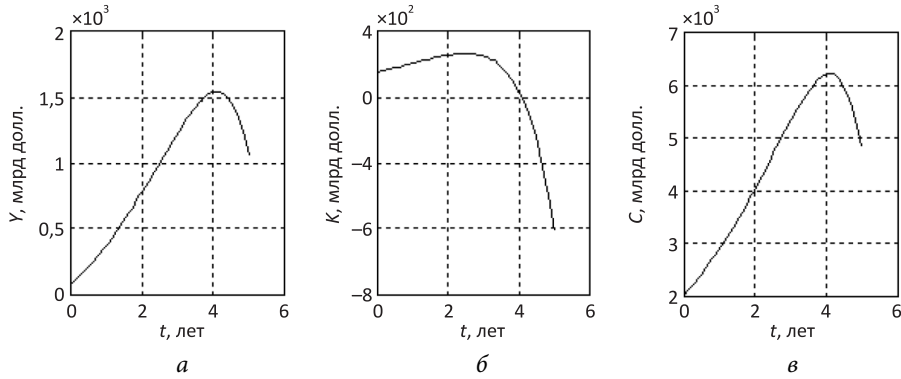


Рис. 3. Результат расчета изменения ВВП (а), запасов капитала (б) и потребления (в) при $C_0 > K_0$.

В гипотетической ситуации, когда $C_0 \gg K_0$, указанные тенденции усиливаются, а временной интервал роста рассматриваемых показателей сокращается (рис. 4).

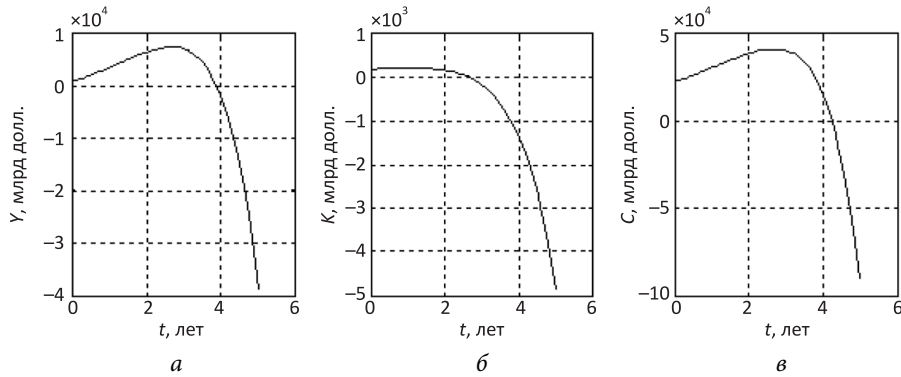


Рис. 4. Результат расчета изменения ВВП (а), запасов капитала (б) и потребления (в) при $C_0 \gg K_0$.

В данном случае полученные результаты имеют чисто теоретический характер, поскольку такая ситуация вряд ли возможна в реальных экономических условиях.

Результаты вычислительных экспериментов на основе детерминированных соотношений (9) показывают, что соотношение параметров задачи может существенным образом влиять на направления роста макроэкономических показателей в зависимости от времени и в некоторых случаях приводить к изменению их исходной тенденции. Это позволяет сделать вывод о том, что рассматриваемая детерминированная аппроксимация условий исходной стохастической модели экономического роста при определенных, иногда достаточно условных, дополнительных ограниче-

ниях на параметры этой модели, а также на соотношения между ними, может позволить отразить преобразование или смену тенденции роста макроэкономических показателей на их сокращение или падение. Этот вывод верен только в условиях соотношений системы (9) и может измениться при преобразовании этих условий. В каждом конкретном случае требуется дополнительный анализ.

3.2. Экспериментальные расчеты с учетом случайных факторов

При проведении вычислительных экспериментов второго вида использовался стохастический вариант модели экономического роста, учитывающий влияние случайных факторов на рассматриваемые макроэкономические показатели. Это предполагает задание ненулевого значения стандартного отклонения σ_k в соотношениях (8). В этом случае появляется возможность построить траектории изменения показателей $Y(t)$, $K(t)$, $C(t)$ в режиме имитации и анализировать их с использованием метода статистического моделирования как простейшего варианта имитационного моделирования. В результате применения данного метода получается серия частных значений искомых величин или функций, статистическая обработка которых позволяет получить оценки характеристик изучаемого процесса в заданные моменты времени.

При использовании метода статистического моделирования традиционно выделяют следующие его этапы (см.: [Ермаков, 2009]):

- генерирование заданного числа N реализаций случайных величин с требуемыми законами распределения;
- преобразования полученных величин, определяемые математической моделью задачи;
- статистическая обработка реализаций случайного процесса.

Применительно к рассматриваемой задаче первый этап метода требует моделирования случайных величин $\xi_{(0,\sigma)}$, распределенных по нормальному закону с параметрами $(0, \sigma)$, т. е. средним значением, равным нулю, и дисперсией, равной σ^2 .

Для получения значений $\xi_{(0,\sigma)}$ использован моделирующий прием, основанный на свойстве нормального распределения:

$$\xi_{(0,\sigma)} = \sigma \cdot \xi_{(0,1)}, \quad (10)$$

который позволяет увязать значения случайной величины $\xi_{(0,\sigma)}$ и случайной величины $\xi_{(0,1)}$, распределенной по стандартному нормальному закону. Вычислительные эксперименты выполнялись средствами системы MATLAB. Для моделирования $\xi_{(0,1)}$ использовался встроенный датчик псевдослучайных чисел *randn*, генерирующий выборку из стандартного нормального распределения. Датчик *randn* относится к семейству SWBG (англ.: Subtract-with-Borrow Generators) — семейству фибоначиевых датчиков, обеспечивающих получение высококачественных псевдослучайных последовательностей, обладающих хорошими статистическими свойствами. Дальнейшие расчеты выполнены на условном примере при определенных соотношениях начальных данных.

На рис. 5–7 приведены результаты расчета траекторий изменения ВВП, капитала и потребления, полученные на основе соотношений (8) в режиме имитации и, соответственно, средние расчетные траектории. Для удобства анализа результатов в рас-

четах заданы фиксированные условные значения параметров модели $Y_0 = 100$ млрд долл., $\sigma_K = 0,2$, параметры C_0 и K_0 варьировались в широком диапазоне значений.

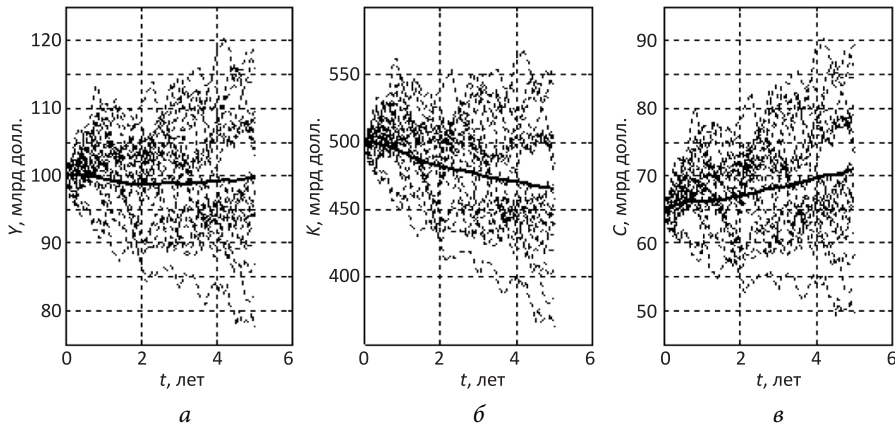


Рис. 5. Расчетные траектории ВВП (а), запасов капитала (б) и потребления (в) в случае $K_0 \approx 5Y_0$, $C_0 \approx 0,6Y_0$.

Очевидно, что прогноз динамики ВВП, запасов капитала и потребления, построенный по траекториям, полученным в процессе имитационных расчетов, при небольшом числе траекторий, как правило, не имеет особого смысла, поскольку при этом не представляется возможным выделить какую-либо явную тенденцию (см., например, рис. 5а, 6б, 6в).

Если тенденцию и можно наблюдать (см., например: рис. 5а, 6а, 7а), то количественные оценки темпов изменения макроэкономических показателей будут не слишком надежны из-за большой погрешности. Только при достаточно большом числе траекторий расчетные оценки, полученные по этим траекториям, приобретают определенную статистическую устойчивость, и на их основе в процессе статистического моделирования можно получить требуемые оценки искомым характеристикам рассматриваемого случайного процесса с заданной надежностью. «Достаточно большое число» испытаний в каждом цикле имитационных расчетов зависит от многих факторов. Вопрос о наименьшем достаточном числе расчетных траекторий в каждом цикле имитации процесса является важным не только с точки зрения качества получаемых оценок макроэкономических показателей, но и с точки зрения оценки сложности используемого алгоритма. Сложность алгоритмов принято измерять количеством арифметических операций (сложений, вычитаний, умножений, делений с остатком), необходимых для выполнения всех предписанных алгоритмом действий. При сравнении алгоритмов наиболее эффективным признается тот, реализация которого требует наименьшего числа арифметических операций. Применительно к рассматриваемой задаче эффективность алгоритма связана с достаточным числом имитаций — наименьшим числом траекторий случайного процесса, обеспечивающим вычисление его характеристик с заданной точностью. В случае если математическое ожидание (m_K) и стандартное отклонение (σ_K) изучаемого процесса с увеличением числа испытаний в каждом цикле имитационных расчетов стремятся к некоторым монотонным функциям, можно предложить довольно простой алго-

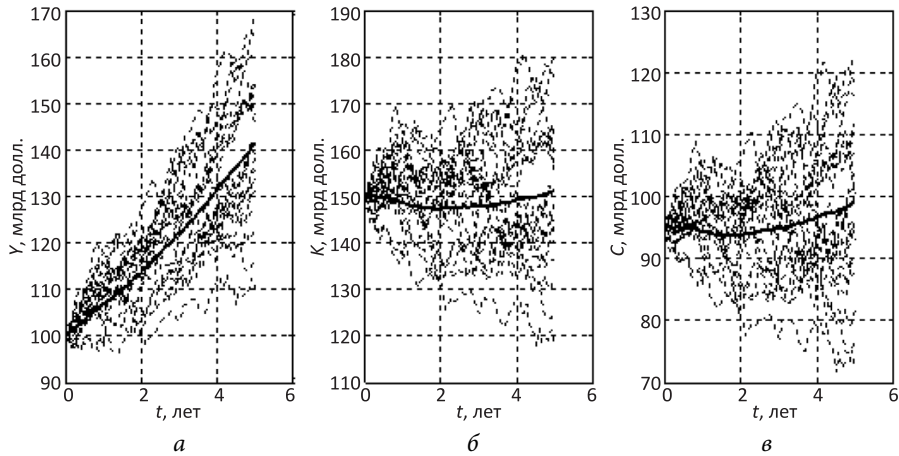


Рис. 6. Расчетные траектории ВВП (а), запасов капитала (б) и потребления (в) в случае $K_0 \approx 1,5Y_0$, $C_0 \approx Y_0$.

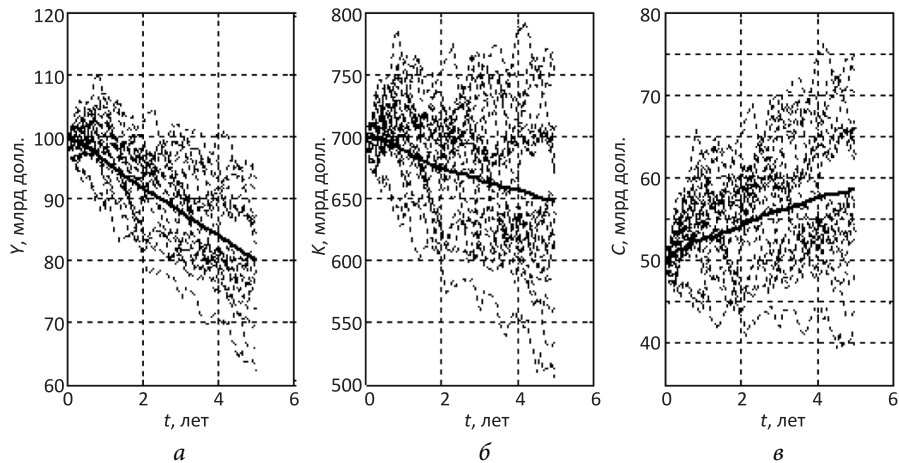


Рис. 7. Расчетные траектории ВВП (а), запасов капитала (б) и потребления (в) в случае $K_0 \approx 7Y_0$, $C_0 \approx 0,5Y_0$.

ритм оценки достаточного числа имитаций, основанный на сходящемся (по числу имитаций i) итерационном процессе с критерием сходимости:

$$\max \left| \sigma_K^{i+1} - \sigma_K^i \right| \leq \varepsilon, \quad (11)$$

где σ_K — значения стандартного отклонения исследуемого процесса $Y(t)$ в сечениях $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots, T$ для числа имитаций $N=i$; ε — заданная точность вычисления стандартного отклонения.

Имитируя достаточное число траекторий изучаемого процесса, можно получать оценки его характеристик как функций времени: оценивать тенденции, связанные с изменением среднего значения, определять параметры доверительных областей. Примечательно, что при этом средние расчетные траектории сохраняют, как правило, устойчивый характер, хотя можно отметить, что на рис. 6б и 6в представлены

средние расчетные траектории, которые имеют меняющийся характер, однако не столь ярко выраженный, как в случае использования в расчетах детерминированных соотношений системы (9).

4. Моделирование динамики макроэкономических показателей для экономики Финляндии, Швеции и Норвегии

В этом разделе рассмотрим возможности обоснования траекторий анализируемых показателей в режиме имитации, используя реальные данные развития экономики Скандинавских стран в период после мирового экономического кризиса 2008 г., и проведем сравнительный анализ фактических и средних расчетных траекторий за период с 2007 по 2013 г. На основе соотношений системы (8) в режиме имитации были выполнены расчеты изменения ВВП и потребления для экономик Финляндии, Швеции и Норвегии при использовании в качестве начальных значений макроэкономических показателей этих стран за 2007 г. Для определения наименьшего достаточного числа траекторий моделируемых случайных процессов был проведен анализ изменения их основных числовых характеристик. Например, для процессов изменения ВВП анализ показал, что их математические ожидания и стандартные отклонения с увеличением числа имитаций во всех случаях стремятся к некоторым монотонным функциям. На рис. 8 в качестве примера, иллюстрирующего сказанное, приведены результаты расчетов изменения среднего значения (m_K) и стандартно-

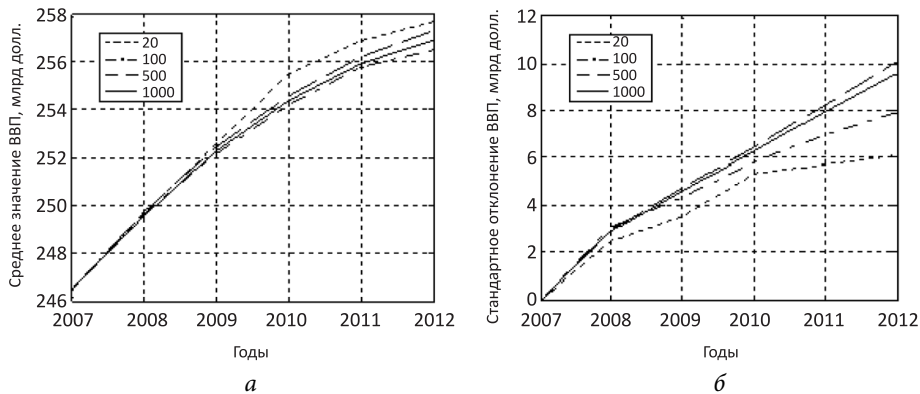


Рис. 8. Зависимость среднего значения ВВП (а) и стандартного отклонения ВВП (б) от времени при различном числе имитаций.

го отклонения (σ_K) процесса изменения ВВП для экономики Финляндии при числе траекторий 20, 100, 500 и 1000. Результаты аналогичных расчетов для экономик Швеции и Норвегии дают такой же монотонный характер указанных зависимостей, что позволяет применить описанный выше алгоритм для определения достаточного числа имитационных расчетов в каждом цикле имитации.

В вычислительном эксперименте определялось число имитаций N_0 , начиная с которого значение критерия (11) можно считать не изменяющимся в пределах заданной точности ϵ . Для требуемой точности вычислений стандартного отклонения

$\varepsilon = 0,1$ в рассматриваемом примере получено $N_0 = 195$ имитаций. Аналогичный расчет для $\varepsilon = 0,05$ дал значение $N_0 = 1200$, для $\varepsilon = 0,01$ — значение $N_0 = 2400$. На основании этих результатов далее для моделирования динамики макроэкономических показателей использовали 2500 траекторий.

Начальные значения валового выпуска продукции Y_0 и потребления C_0 были заданы в соответствии с данными табл. 1, 2 и 3. Данные тех же таблиц были применены при анализе соответствия средних расчетных траекторий роста рассматриваемых макроэкономических показателей различных стран, полученных в режиме имитации, и соответствующих фактических значений тех же показателей для указанных стран, что позволило сделать определенные выводы об адекватности результатов моделирования развитию реальных экономических процессов. На рис. 9–11 представлены результаты моделирования динамики изменения ВВП и потребления для экономики Финляндии, Швеции и Норвегии.

Таблица 1. Данные о макроэкономических показателях Финляндии за 2007–2013 гг.

Макроэкономические показатели Финляндии			
Год	Номинальный ВВП, млрд долл.	Потребительские расходы	
		млрд долл.	доля в ВВП, %
2007	246,5	177,2	72
2008	273,2	201,2	74
2009	241,3	191,1	79,8
2010	239,2	189,8	80,2
2011	270,6	210,4	80,2
2012	247,2	201,5	81,5
2013	259,6	–	–

Источники: [<http://www.ereport.ru/...finland>; <http://www.be5.biz/makroekonomika/...finland.html>].

Таблица 2. Данные о макроэкономических показателях Швеции за 2007–2013 гг.

Макроэкономические показатели Швеции			
Год	Номинальный ВВП, млрд долл.	Потребительские расходы	
		млрд долл.	доля в ВВП, %
2007	462,5	334	72,2
2008	486,2	355	73
2009	403,6	312,6	77
2010	458,7	347,8	75,1
2011	571,6	399,7	74,6
2012	520,3	394,7	75,4
2013	552,0	–	–

Источники: [<http://www.ereport.ru/...sweden>; <http://www.be5.biz/makroekonomika/...sweden.html>].

Таблица 3. Данные о макроэкономических показателях Норвегии за 2007–2013 гг.

Макроэкономические показатели Норвегии			
Год	Номинальный ВВП, млрд долл.	Потребительские расходы	
		млрд долл.	доля в ВВП, %
2007	387,6	238,2	60,5
2008	445,3	264,4	58,2
2009	370,7	247,8	65,4
2010	413,0	272,7	64,8
2011	479,3	307,3	62,0
2012	499,8	308,5	61,7
2013	515,8	–	–

Источники: [http://www.ereport.ru/...norway; http://www.be5.biz/makroekonomika/...norway.html].

На каждом рисунке для примера представлены 80 расчетных траекторий учитываемого показателя, а также изменение среднего значения, вычисленного по 2500 траекториям, и границы 95%-ной доверительной области. Для определения границ доверительной области численно решалась задача нахождения методом максимального правдоподобия параметров распределения в каждом сечении моделируемого процесса. Затем границы доверительной области вычислялись как соответствующие квантили распределения. Вместе с результатами моделирования на рис. 9, 10, 11 показаны фактические траектории, построенные по данным табл. 1, 2, 3.

Анализируя результаты расчетов по данным экономики Финляндии, можно сделать вывод, что в целом фактическая траектория ВВП Финляндии располагается в пределах 95%-ной доверительной области, построенной в результате имитации (см. рис. 9а).

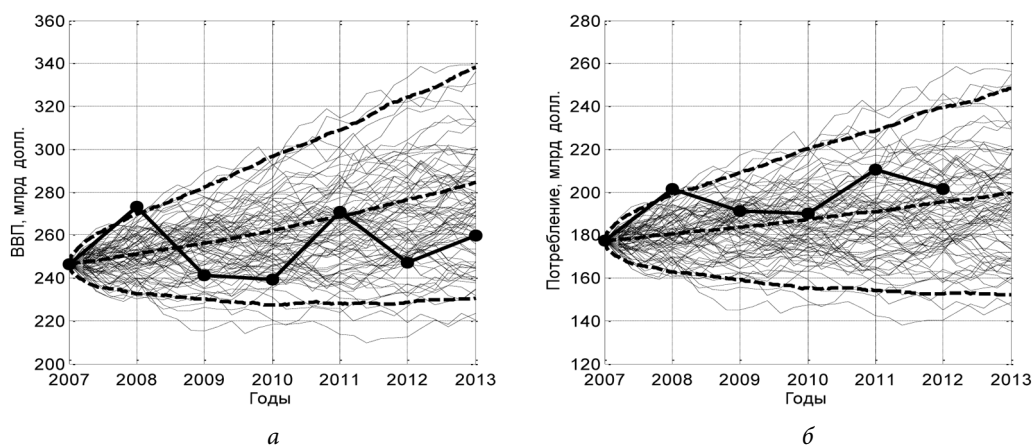


Рис. 9. Траектории ВВП (а) и потребления (б) для экономики Финляндии.

Обозначения: --- среднее значение и границы 95%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); —●— фактические данные.

В целом тенденция изменения средней расчетной траектории примерно соответствует тенденции ВВП Финляндии за указанный период. Фактическая траектория потребления (см. рис. 9б) находится также в пределах 95%-ного доверительного интервала, но располагается выше средней расчетной траектории потребления, полученной в режиме имитации.

При анализе соответствия траектории развития ВВП Швеции за рассматриваемый период (см. табл. 2) и средней расчетной траектории ВВП, полученной в режиме имитации, можно сделать вывод, что фактические значения ВВП располагаются в пределах 95%-ного доверительного интервала, но данные за 2009 г. выходят за пределы этого интервала в сторону падения (см. рис. 10а). В этом, по-видимому, также нашел свое отражение мировой экономический кризис. В целом средняя расчетная траектория показывает устойчивый рост, в то время как фактические значения ВВП Швеции за рассматриваемый период имеют существенные колебания (см. рис. 10а).

При анализе динамики объема потребления Швеции следует отметить, что фактическая траектория потребления располагалась внутри 95%-ного доверительного интервала, полученного по результатам имитационных расчетов (см. рис. 10б). Но фактический объем потребления колебался вдоль средней расчетной траектории, и в целом тенденция динамики потребления Швеции соответствует динамике средней расчетной траектории, построенной по результатам имитационных расчетов.

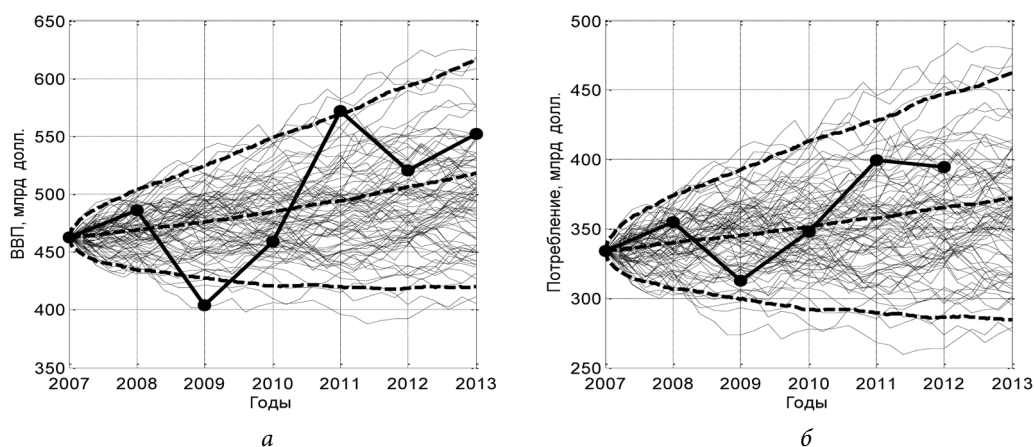


Рис. 10. Траектории ВВП (а) и потребления (б) для экономики Швеции.

Обозначения: --- среднее значение и границы 95%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); —●— фактические данные.

Аналогичные результаты были получены при использовании данных по экономике Норвегии, для которой также характерно сокращение объема ВВП в 2009 г. как следствие мирового экономического кризиса. Но при этом объем ВВП Норвегии вышел за пределы 95%-ного доверительного интервала только в 2008 г., причем в сторону превышения (см. рис. 11а).

Далее в целом тенденция динамики фактического объема ВВП Норвегии соответствует тенденции изменения средней расчетной траектории, полученной в режиме имитации. Что касается объема потребления Норвегии за рассматриваемый период, то очевидно, что фактическая траектория потребления в целом соответствует

средней расчетной траектории потребления, полученной в режиме имитации, и предполагается внутри 95%-ного доверительного интервала (см. рис. 11б).

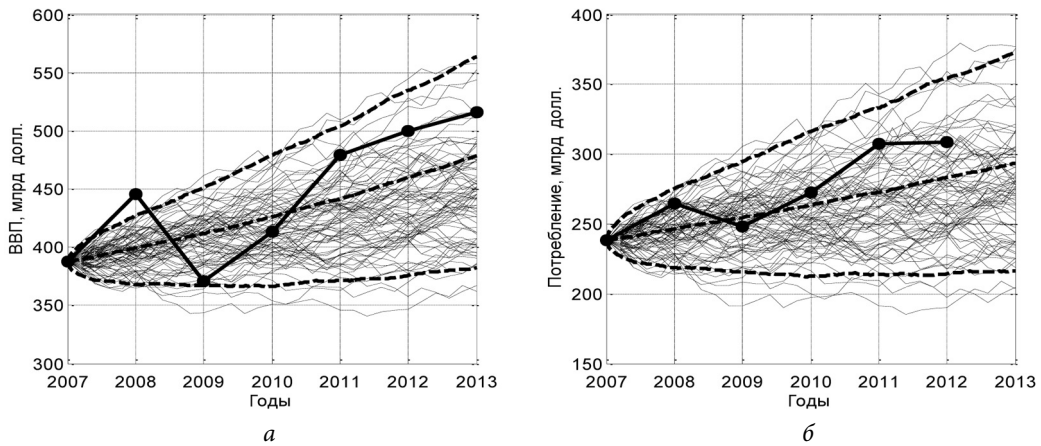


Рис. 11. Траектории ВВП (а) и потребления (б) для экономики Норвегии.

Обозначения: --- среднее значение и границы 95%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); —●— фактические данные.

Результаты расчетов динамики ВВП и потребления трех Скандинавских стран, полученные в режиме имитации на выделенном промежутке времени, показали, что средние расчетные траектории в целом достаточно хорошо согласуются с фактическими данными о реальных процессах развития экономики изучаемых стран. Это позволяет сделать вывод о принципиальной возможности использования дискретной аппроксимации ограничений стохастической модели экономического роста для решения задач прогнозирования динамики макроэкономических показателей.

Определенные расхождения фактической и средней расчетной траекторий рассматриваемых макроэкономических показателей, связанные с тем, что некоторые их фактические значения располагаются за пределами 95%-ной доверительной области (например, значение ВВП Швеции в 2009 г. или ВВП Норвегии в 2008 г.), можно объяснить существенным влиянием факторов, которые не были учтены как в исходной стохастической модели роста (6), так и при формировании дискретной аппроксимации условий этой модели (9).

Аналогичные расчеты могут быть выполнены и для других макроэкономических показателей, учитываемых в системе (5) и соответственно (8) при условии получения необходимых исходных данных. Приведенные результаты имеют похожий характер для всех трех стран и показывают возможности построения прогнозов макроэкономических показателей в режиме имитации на основе исходных данных текущего периода. Полученные средние расчетные траектории располагаются за редким исключением в пределах 95%-ного доверительного интервала. Результаты имеют смысл в пределах рассматриваемого периода времени и требуют дальнейшего исследования и анализа при его расширении.

Возможности сужения доверительного интервала и повышения качества прогнозов, получаемых в режиме имитации, существенно зависят от формы исходного уравнения рассматриваемого макроэкономического показателя и учитываемых

в нем факторов. В процессе исследований по анализу условий системы (8) было выделено уравнение для определения прироста потребления в следующем виде:

$$dC(t) = AKdt - (1 - \delta)K(t)dt + AK(t)dw(t), \quad (12)$$

для которого аппроксимирующая форма может быть записана так:

$$C_{t+\Delta} = C_t + AK_t\Delta - (1 - \delta)K_t\Delta + AK_t\sqrt{\Delta}u_t. \quad (13)$$

Проведение расчетов по настоящей модели в режиме имитации, по данным всех трех Скандинавских стран, на основе соотношения (13) показало, что значительная часть траектории фактического потребления во всех трех случаях располагается в пределах 70%-ного доверительного интервала. Результаты расчетов 50%-ного доверительного интервала представлены на рис. 12.

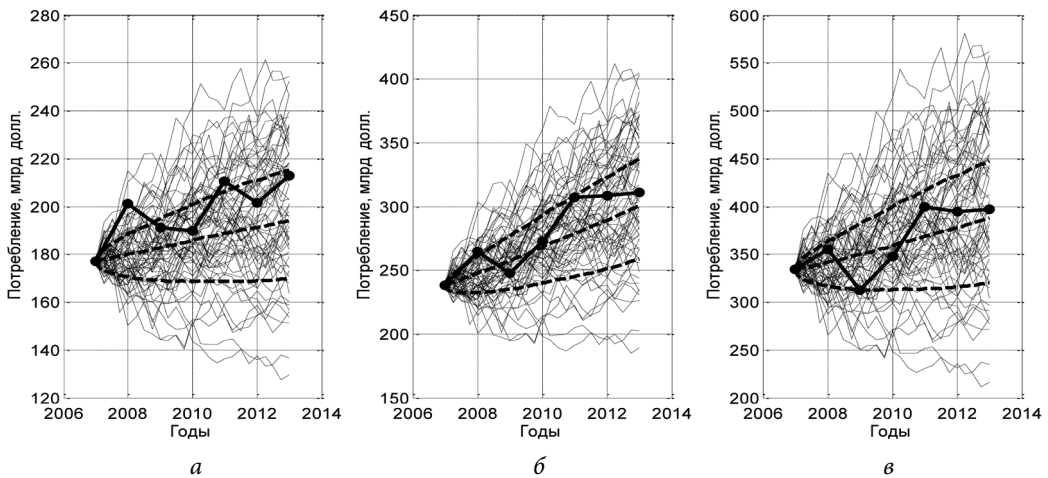


Рис. 12. Траектории потребления Финляндии (а), Норвегии (б), Швеции (в).

Обозначения: --- среднее значение и границы 50%-ной доверительной области (по 2500 траекториям); —●— фактические данные.

Графики на рис. 12 иллюстрируют, что выполненное преобразование исходного уравнения для потребления (последнее уравнение в системе (5)), которое предполагает изменение одного коэффициента при переменной модели (12), позволило показать, что фактическая траектория потребления Норвегии и Швеции располагается в пределах 50%-ного доверительного интервала, полученного в результате имитации. Это дает возможность формировать более надежные прогнозы данного показателя для указанных стран. Для Финляндии фактическая траектория выходит за пределы 50%-ного доверительного интервала и требуется дальнейшее преобразование уравнения (12), в том числе возможно расширение факторов модели, которое послужит авторам предметом дальнейшего исследования.

При этом само использованное в данном случае уравнение (12) формально отличается и не соответствует исходным уравнениям рассматриваемой модели (5). Следует иметь в виду, что уравнения (5) предполагают максимальную агрегацию

макроэкономических условий и факторов, поэтому крайне сложно оценить, за счет влияния каких именно факторов это произошло при данном формальном преобразовании этого уравнения. Обоснование использования уравнения (12) и возможности его включения в стохастические модели экономического роста требует специального исследования, что выходит за рамки настоящей статьи.

5. Заключение

1. Развитие процессов глобализации экономики приводит к усилению влияния факторов неопределенности и риска на развитие экономики и требует их учета в процессе макроэкономического моделирования. Одним из подходов в этой области являются постановка и анализ стохастических моделей экономического роста, предполагающих использование случайных процессов при моделировании указанных факторов. Практическое применение соотношений подобных моделей для анализа траекторий изменения макроэкономических показателей возможно на основе аппроксимации условий подобных моделей и проведения на их основе расчетов в режиме имитации.

2. Рассмотренные в данной статье соотношения модели экономического роста показывают, что, несмотря на упрощенный и агрегированный характер таких моделей, подобные соотношения могут быть положены в основу анализа и прогнозирования реальных экономических процессов; дальнейшее развитие указанного метода макроэкономического моделирования может быть связано с модификацией условий модели (5), а также с разработкой стохастической модели роста открытой экономики или системы моделей взаимосвязанных экономик различных стран.

3. Применение метода статистического моделирования к аппроксимирующим условиям стохастических моделей экономического роста, одними из форм которых являются соотношения (8), показало, что, используя дискретную аппроксимацию условий модели в форме рекуррентных соотношений, можно формировать относительно устойчивые прогнозы макроэкономических показателей.

4. Анализ детерминированного варианта построенных аппроксимирующих условий исходной модели как предельного варианта аппроксимации стохастической модели роста показал, что, несмотря на неоклассические предпосылки исходной модели, в рамках полученных условий возможны преобразования тенденций изменения рассматриваемых показателей, и предположение о возрастании показателей в рамках моделей роста не обязательно выполняется. Полученный результат существенно зависит от формы уравнений системы (5) и их преобразования в систему (7) и соответственно (8), а также от учитываемых конкретных значений параметров модели и их соотношений. Расширение прогнозных возможностей модели связано с использованием переменной нормы амортизации капитала δ , с учетом зависимости технологического коэффициента A и других параметров модели от времени, с модификацией рассматриваемой системы соотношений и т. п.

5. При проведении расчетов в режиме имитации на основе рекуррентных соотношений (8) было показано, что в зависимости от числа повторений в одном цикле имитационных расчетов могут быть построены устойчивые средние расчетные траектории, которые обладают явно выраженной тенденцией роста или сокращения значений рассматриваемого макроэкономического показателя. Причем эта тенден-

ция, как правило, имеет устойчивый характер и сохраняется на протяжении всего прогнозируемого периода.

6. В процессе имитационных расчетов на примере макроэкономических данных Скандинавских стран показано, что фактическая траектория ВВП, как и траектория потребительских расходов, в основном располагается в пределах 95%-ного доверительного интервала, определяемого по результатам имитации. Полученный результат справедлив в пределах рассматриваемого временного периода и требует дальнейшего исследования при его расширении или изменении.

7. Возможности сужения доверительного интервала, полученного в результате имитационных расчетов, в пределах которого располагается фактическая траектория макроэкономического показателя, зависят от модификации соответствующего уравнения и требуют специального анализа в каждом конкретном случае. Принципиальная возможность такой модификации показана на примере уравнения (12), использование которого позволило сделать вывод о том, что фактическая траектория потребления для двух из трех изучаемых стран располагается в пределах 50%-ного доверительного интервала.

8. Полученные результаты существенно зависят от условий рассматриваемой стохастической модели роста; анализ возможностей использования дискретной аппроксимации условий других вариантов постановки стохастических моделей роста послужит авторам предметом дальнейшего исследования.

Литература

- Айвазян С. А., Афанасьев М. Ю., Афанасьев А. М. Оценка экономической эффективности мероприятий банка по рекламированию кредитных продуктов // Прикладная эконометрика. 2009. № 4. С. 46–59.
- Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост / пер. с англ. М.: БИНОМ Лаборатория знаний. 2010. 824 с.
- Воронцовский А. В. Некоторые проблемы теории и моделирования макроэкономических рисков // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 5: Экономика. 2005. Вып. 1. С. 101–113.
- Воронцовский А. В. Современные подходы к моделированию экономического роста // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5. Экономика. 2010. Вып. 3. С. 105–119.
- Воронцовский А. В., Дикарев А. Ю. Прогнозирование макроэкономических показателей в режиме имитации на основе стохастических моделей экономического роста // Финансы и Бизнес. 2013. № 2. С. 33–51.
- Вьюненко Л. Ф. Особенности применения квазивероятностных методов в экономических расчетах // Обзорные прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16, вып. 3. С. 453.
- Джекед П. Применение методов Монте-Карло в финансах / пер. с англ. М.: Интернет-трейдинг, 2004. 256 с.
- Ермаков С. М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике. СПб., 2009. 192 с.
- Моделирование экономического роста в условиях современной экономики / под ред. А. В. Воронцовского. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2011. 284 с.
- Шараев Ю. В. Теория экономического роста. М.: Изд. дом «Государственный университет — Высшая школа экономики», 2006. 254 с.
- Abel A. B. Optimal Investment under Uncertainty // American Economic Review. 1983. Vol. 73. P. 228–233.
- Abel A. B. A Stochastic Model of Investment, Marginal and the Market Value of the Firm // International Economic Review. 1985. Vol. 26. P. 305–322.
- Abel A. B., Eberly J. A Unified Model of Investment under Uncertainty // American Economic Review. 1994. Vol. 84. P. 1369–1384.
- Frankel M. The Production Function in Allocation and Growth: a Synthesis // American Economic Review. 1962. Vol. 52. P. 996–1022.

- Gangopadhyay P., Chatterji M.* Economics of globalization. Aldershot: Ashgate Publishing, 2005. 500 p.
- Griliches Z.* Issues in Assessing the Contribution of Research and Development to Productivity Growth // *Bell Journal of Economics*. 1979. Vol. 10. P.92–116.
- Hartman R. C.* The Effects of Price and Cost Uncertainty on Investment // *Journal of Economic Theory*. 1972. Vol. 5. P.258–266.
- Jentzen A., Kloeden P. E.* Overcoming the Order Barrier in the Numerical Approximation of Stochastic Partial Differential Equations with Additive Space-time Noise // *Proceeding of the Royal Society London. Mathematical, physical & engineering science*. 2009a. N 2102. P.649–667.
- Jentzen A., Kloeden P. E.* The Numerical Approximation of Stochastic Partial Differential Equations // *Milan Journal of Mathematics*. 2009b. Vol. 77. P.205–244.
- Jentzen A., Kloeden P. E., Neuenkirch A.* Pathwise Approximation of Stochastic Differential Equations on Domains: Higher Order Convergence Rates without Global Lipschitz Coefficients // *Numerische Mathematik*. 2009c. Vol. 112. P.41–64.
- Kloeden P., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. 3 ed. Berlin; Heidelberg: Springer, 1999. 632 p.
- Lucas R. E. Jr., Prescott E. C.* Investment Under Uncertainty // *Econometrica*. 1971. Vol. 39, N 5. P.659–681.
- Lucas R. E. Jr.* On the Mechanics of Economic Development // *Journal of Monetary Economics*. 1988. Vol. 22. P.3–42.
- Merton R. C.* Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case // *Review of Economics and Statistics*. 1969. Vol. 51. P.247–257.
- Merton R. C.* Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model // *Journal of Economic Theory*. 1971. Vol. 3. P.373–413.
- Merton R. C.* Continuous-Time Finance. Cambridge, MA: Blackwell Publishers, 1990. XIX+732 p.
- Pindyck P. C.* Adjustment Costs, Uncertainty and the Behavior of the Firm // *The American Economic Review*. 1982. Vol. 72, N 3. P.415–427.
- Romer P.* Increasing Returns and Long-Run Growth // *Journal of Political Economy*. 1986. Vol. 94. P.1002–1037.
- Samuelson P. A.* Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming // *Review of Economics and Statistics*. 1969. Vol. 51. P.239–246.
- Salvatore D.* Introduction to International Economics: International Student Version. 3 ed. New York: Wiley, 2012. 466 p.
- Stiglitz J.* Globalization and its Discontents. London: Penguin Books, 2002. XXII, 288 p.
- Turnovsky St. J.* Methods of Macroeconomic Dynamics. 2 ed. Cambridge, MA: MIT Press, 2000. 670 p.
- Turnovsky St. J.* Macroeconomic Policies, Growth and Welfare in a Stochastic Economy // *International Economic Review*. 1993. Vol. 34. P.953–981.
- Turnovsky St. J.* Optimal Tax Policy in a Stochastically Growing Economy // *Japanese Economic Review*. 1995. Vol. 46 (2). P.125–147.
- Waelde K.* Production Technologies in Stochastic Continuous Time Models // *Journal of Economic Dynamics & Control*, 2011. Vol. 35. P.616–622.
- Мировая экономика [сайт]. URL: <http://www.ereport.ru/stat.php?razdel=country&count=finland>;
<http://www.ereport.ru/stat.php?razdel=country&count=sweden>;
<http://www.ereport.ru/stat.php?razdel=country&count=norway> (дата обращения: 13.05.14).
- Макроэкономические исследования [сайт]. URL: http://www.be5.biz/makroekonomika/consumption_expenditure/consumption_expenditure_finland.html;
http://www.be5.biz/makroekonomika/consumption_expenditure/consumption_expenditure_sweden.html;
http://www.be5.biz/makroekonomika/consumption_expenditure/consumption_expenditure_norway.html (дата обращения: 13.05.14).

Приложение

Случайные процессы, учитываемые в уравнениях системы (6), представляют собой приращения винеровских процессов, распределенных по нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией $\sigma_k^2 dt$, пропорциональной длительности рассматриваемого временного интервала dt . Используя это свойство, рассмотрим возможности проведения дискретной аппроксимации уравнений системы (6) и построения рекуррентных соотношений. Поясним это на примере преобразования стохастического уравнения для объема потребления:

$$dC(t) = AKdt - (1 + \delta)K(t)dt + AK(t)dw(t).$$

Используя указанное свойство приращений винеровских процессов, построим его возможную дискретную аппроксимацию в форме рекуррентного соотношения. Для простоты записи опустим индекс t и обозначим через Δ шаг временной решетки, в соответствии с которым будем проводить расчеты в режиме имитации. Возьмем интеграл от правой и левой частей этого уравнения по промежутку, который начинается в момент t и заканчивается в момент $t + \Delta$:

$$\int_t^{t+\Delta} dC = \int_t^{t+\Delta} AKdt - \int_t^{t+\Delta} (1 + \delta)Kdt + \int_t^{t+\Delta} AKdw. \quad (\text{П1})$$

Аппроксимация соотношения (7), прежде всего, определяется тем, что значения всех трех интегралов, которые не содержат случайную переменную, можно рассчитывать просто как разность значений подинтегральной функции в начале и в конце рассматриваемого промежутка. Так, левую часть соотношения (7) преобразуем следующим образом:

$$\int_t^{t+\Delta} dC = C_{t+\Delta} - C_t. \quad (\text{П2})$$

Аналогичные преобразования сделаем для первых двух интегралов в правой части равенства (7):

$$\int_t^{t+\Delta} AKdt = AK(t + \Delta - t) = AK\Delta; \quad \int_t^{t+\Delta} (1 + \delta)Kdt = (1 + \delta)K\Delta. \quad (\text{П3})$$

Для того чтобы записать приближенную форму последнего интеграла в правой части равенства (7), которое содержит приращение винеровского процесса, учтем, что, используя свойства этого приращения винеровского процесса, его можно записать так:

$$dw = \sigma_k dv,$$

где dv — приращение стандартного винеровского процесса, распределенного по нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией, равной длительности промежутка. Будем считать, что дискретная разность реализаций данного случайного процесса для двух соседних моментов времени представляет собой случайную величину, которая распределена по стандартному нормальному закону в следующем виде:

$$(v_{t+\Delta} - v_t) \approx N(0, \Delta) \approx \sqrt{\Delta}N(0, 1).$$

Учитывая полученное соотношение, приближенную формулу для интеграла, который содержит приращение винеровского процесса, можно записать так:

$$AK \int_t^{t+\Delta} dw = AK(w_{t+\Delta} - w_t) = AK\sigma_k(v_{t+\Delta} - v_t) = AK\sigma_k\sqrt{\Delta}\xi_t, \quad (\text{П4})$$

где ξ_t — реализация случайной величины, подчиняющейся стандартному нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице.

Окончательно рекуррентное соотношение, которое представляет собой дискретную аппроксимацию рассматриваемой траектории потребления, можно записать так:

$$C_{t+\Delta} = C_t + AK_t\Delta - (1 + \delta)K_t\Delta + AK_t\sigma_k\sqrt{\Delta}\xi_t. \quad (\text{П5})$$

Аналогично была получена дискретная аппроксимация двух других уравнений для выпуска продукции и размера капитала.

Статья поступила в редакцию 19 июня 2014 г.