УДК 330.83+519.813.3 Вестник СПбГУ. Сер. 5. 2013. Вып. 3

А. А. Кудрявцев

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПАРАДОКС И ЕГО ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Санкт-Петербургский парадокс — математическая задача из области теории вероятностей с искусственными условиями, которой в сентябре 2013 г. исполняется 300 лет. Она явилась, как это признается сейчас в экономической литературе, предтечей теорий ожидаемой полезности. Ученые, обсуждавшие решение данной задачи, долгое время не осознавали наличия экономической проблематики. Для них речь шла, скорее, о математическом казусе и о попытке найти всеобщий принцип (правило) принятия рациональных решений в условиях неопределенности. Вместе с тем этот парадокс сыграл важную (хотя и косвенную) роль в развитии экономической теории, а также практики финансовых спекуляций. К сожалению, указанная роль часто недооценивается. В настоящей статье сделана попытка преодолеть указанный недостаток.

История возникновения и содержание Санкт-Петербургского парадокса

Эта задача была приведена и решена в считающейся в настоящее время классической работе Даниила Бернулли [1], написанной в 1730 или 1731 г. и опубликованной в 1738 г. Однако приоритет в формулировке задачи принадлежит его двоюродному брату Николаю Бернулли, который предложил среди ряда прочих похожую задачу (при этом бросалась не монета, а игральная кость) французскому математику П. Р. де Монмору в письме от 9 сентября 1713 г. Последний опубликовал переписку, включая и это письмо, в приложении ко второму изданию книги «Опыт анализа азартных игр» [2, p. 401–402] в том же 1713 г., без решения данной задачи.

Будучи опубликованной в качестве нерешенной, эта задача обсуждалась в переписке между математиками, занимавшимися теорией вероятностей. В частности, швейцарский математик Габриэль Крамер в письме от 21 мая 1728 г. к Н. Бернулли, автору задачи, предложил подходы к решению для упрощенной формулировки, в которой присутствовали броски монеты, что впоследствии и закрепилось в классической формулировке [3][1].

Решение Г. Крамера было похоже на подход самого Д. Бернулли, который он тем не менее развил независимо, так как получил копию письма Крамера только в 1732 г. при обсуждении первого варианта своей статьи. Тот факт, что Д. Бернулли в то время

Андрей Алексеевич КУДРЯВЦЕВ — д-р экон. наук, доцент. В 1990 г. окончил экономический факультет ЛГУ. В 1994 г. защитил кандидатскую, в 2012 г. — докторскую диссертации. Член профессиональных актуарных ассоциаций России и Великобритании. Основные направления научных исследований: микроэкономика неопределенности, актуарный анализ, экономика страхования, демография. Автор 120 научных и учебно-методических работ (в том числе автор и соавтор монографий, учебников и учебных пособий), e-mail: kudr@AK1122.spb.edu

[1] Д. Бернулли в своей знаменитой работе также приводит выдержку из этого письма, содержащую решения, предлагаемые Крамером. Переписка, касающаяся формулировки Санкт-Петербургского парадокса и ранней дискуссии, приведена в [4, S. 557–568].

Даниил Бернулли (1700–1782)

жил и работал в Санкт-Петербурге и опубликовал указанную работу в «Заметках Императорской Петербургской Академии наук», дало основание французскому математику Ж. д'Аламберу назвать в 1768 г. задачу «Санкт-Петербургской». Это название закрепилось в истории математики и экономики.

Постановка задачи довольно проста. Рассматривается игра, состоящая в последовательном бросании монеты до тех пор, пока выпадет «решка» (сторона с номиналом монеты). Если «орел» (герб) выпадет при первом броске, то выигрыш составит 1 ден. ед. (дукат, экю и т. д.), при втором — 2 ден. ед., при третьем — 4 ден. ед. и т. д. Вопрос состоит в том, какую сумму следует заплатить за участие в игре.

Иными словами, подходящей моделью условной ситуации, описанной выше, является случайная величина $\tilde{x}$, принимающая значения $x_k = 2^{k-1}$, $k \in \mathrm{N}$, с вероятностью $p_k = 2^{-k}$ (монета симметрична). Требуется найти значение, которое в определенном смысле эквивалентно указанной случайной величине.

Общепринятым эквивалентом случайных величин (в данном случае ценой участия в соответствующей игре) в начале XVIII в. было математическое ожидание. Такие представления восходили к неопубликованной переписке 1654 г. французских математиков Б. Паскаля и П. Ферма, а также к трактату голландского математика и физика Х. Гюйгенса (1657 г.), в которых была введена идея математического ожидания как справедливой цены азартной игры.

Однако для данной задачи математическое ожидание бесконечно:

$$\mathrm{E}\left[\tilde{x}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \cdot 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

Готовность внести бесконечно большую сумму за участие в азартной игре справедливо казалось неразумным. Отсюда и использование слова «парадокс» в названии задачи[2].

[2] Хотя многие авторы, обсуждавшие парадокс, ссылались, исходя из здравого смысла или нормативных предписаний, на ограниченность «цены игры», современные экономисты провели специальные эксперименты, которые подтверждают это на практике (т. е. в позитивном смысле) и тестируют некоторые подходы к решению, рассмотренные ниже. Обзор экспериментов можно найти в работе [3].

Д. Бернулли предложил заменить значение выигрыша на его полезность (в его терминологии — на «выгоду»). По ряду причин (подробно рассмотренных далее) он предложил использовать логарифмическую функцию. Тогда после соответствующего преобразования получим

$$\ln \overline{x}_B = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(x_k) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(2^{k-1}\right) 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^k} \ln 2 = \ln 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^k} = \ln 2. \qquad (1)$$

Таким образом, эквивалентная сумма конечна: $\overline{x}_B = 2 < \infty$.

Д. Бернулли приводит также два решения, предложенные Г. Крамером, которые основываются на том же приёме. В одном из решений Крамер предлагает использовать квадратный корень в качестве оценки полезности (в его терминологии — «пользы», «морального значения благ»). Тогда

$$\sqrt{\overline{x}_{K1}} = \sum_{k=1}^{\infty} u(x_k) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^{k-1}}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k-1}{2}-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{k+1}{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}},$$

откуда $\overline{x}_{K1} \approx 2,9142$.

Другое решение Г. Крамера основывалось на использовании функции $u_d(x) = \min\{x, d\}$, где d предлагалось взять достаточно большим (например, $d = 2^{24}$). В этом случае

$$u_d(\overline{x}_{K2}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_d\left(2^{k-1}\right) 2^{-k} = \sum_{k=1}^{24} \frac{2^{k-1}}{2^k} + \sum_{k=25}^{\infty} 2^{24-k} = 24 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 13. \qquad (2)$$

В силу того, что $13 < 2^{24}$, $\overline{x}_{K2} = 13$.

Используя современную терминологию, можно сказать, что вводилась функция полезности $u(x)$ (в каждом из рассмотренных примеров своя), с помощью которой эквивалентное значение определялось по формуле

$$u(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} u(x_k) p_k \qquad (3)$$

или в чуть более общем виде $u(\overline{x}) = \mathrm{E}\left[u(\tilde{x})\right]$.

Иными словами, оценка эквивалентного значения осуществлялась на основе *принципа ожидаемой полезности*, а само это значение равно достоверному эквиваленту. Это, в частности, и определяет классический характер работы Д. Бернулли.

Вместе с тем нужно учитывать, что ни термина «функция полезности», ни соответствующей теории еще не существовало, да и сама экономическая теория находилась в начале своего развития. Математики того времени предпочитали говорить о «моральном ожидании», (умозрительно) связывая предлагаемое преобразование исходов с этическими и психологическими аспектами. Поэтому следует избегать излишнего осовременивания результатов Д. Бернулли и Г. Крамера, что никоим образом не снижает их исторического значения как предшественников экономики неопределенности[3].

[3] П. А. Ватник [5] дал экономическую интерпретацию взглядов Д. Бернулли. В целом соглашаясь с его выводами, следует помнить, что сам Бернулли не осознавал экономического характера собственной работы, хотя и демонстрировал экономические приложения своей теории.

Обзор основных решений Санкт-Петербургского парадокса и их значение для современной экономической теории

Долгое время Санкт-Петербургский парадокс рассматривался исключительно в математической литературе. В частности, д'Аламбер использовал его для критики теории вероятностей, вводя различные понятия, связанные с возможностью[4] [6]. Тем не менее многие авторы XVIII — начала XIX в., следуя логике Д. Бернулли, противопоставляли математическое ожидание «моральному ожиданию», т. е. ожидаемой полезности — в современной терминологии.

Даже в математических работах современных авторов имеются ссылки на Санкт-Петербургский парадокс. Дело в том, что в связи со случайными величинами, имеющими бесконечные моменты распределения, возникает ряд специальных проблем, а формулировка данного парадокса позволяет обсуждать некоторые решения таких проблем «на простом примере». В частности, закон больших чисел в стандартной постановке не имеет смысла для случайных величин с бесконечным математическим ожиданием. Однако соответствующий результат можно представить в специальных формах. Некоторые из них учитывают свойства случайных величин, в том числе и особенности случайной величины из Санкт-Петербургской задачи. Соответствующая дискуссия продолжается до сих пор, хотя и не очень интенсивно.

Нельзя сказать, что экономисты были совсем не знакомы с работой Д. Бернулли, но она оставалась на периферии их интереса. Так, Дж. М. Кейнс обсуждал ее в своем «Трактате о вероятности», опубликованном в 1921 г. [7]. Однако это была математическая (не экономическая) работа, обсуждение касалось свойств (критики) математического ожидания, а большую часть предложенных решений парадокса Кейнс отверг (и даже не стал обсуждать) на основании того, что для них привлекались не математические, а «моральные» соображения. Сам Кейнс предлагал (практически заимствовав результаты немецкой математической и статистической традиции XIX в., вышедшей из анализа договоров страхования)[5] использовать оценку вида

$$\sum_k p_k \left(x_k - \mathrm{E}\left[\tilde{x}\right] \right)_+ ,$$

где $\left(\cdot\right)_+ = \max\left\{0, \cdot\right\}$ — функция, популярная в современных моделях оценки страховых и финансовых обязательств. Он использовал для нее термин «риск». Фактически это можно рассматривать как введение специфической функции $u(x_k) = \left(x_k - \mathrm{E}\left[\tilde{x}\right] \right)_+$, хотя Кейнс, кажется, пытался противопоставить ее теории ожидаемой полезности[6].

Противопоставление «риска» и полезности позволило представить Д. Бернулли (косвенно) и Дж. Кейнса (необоснованно) как предшественников концепции «среднее — риск», популярной при оценке страховых и финансовых операций, в частно-

[4] В частности, он различал физическую (реальную) и метафизическую (теоретическую) возможность. Впоследствии развитие этой точки зрения позволило создавать неортодоксальные экономические теории экономического поведения в условиях неопределенности, анализ которых выходит за рамки данной статьи.

[5] Кейнс ссылался на австрийского математика и статистика Э. Чубера [8], хотя П. Самуэльсон проигнорировал ссылку, приписав подход самому Кейнсу, и посетовал, что тот четко не разъяснил своих взглядов [9, p. 46–47]. Более подробные ссылки на данный подход можно найти в указанной книге Чубера.

[6] Такой точки зрения придерживался П. Самуэльсон [9]. Кейнс сформулировал свою позицию довольно невнятно, оставляя широкое поле для интерпретаций.

сти в теории портфеля [9; 10]. На наш взгляд, наличие такой связи между Д. Бернулли и Г. Марковицем (через Дж. Кейнса) требует дальнейших исследований[7].

В научный оборот экономической теории Санкт-Петербургский парадокс был введен австрийским, позднее американским, математиком Карлом Менгером (Karl Menger) в начале XX в. Судя по всему, работа была написана под влиянием его отца, известного австрийского экономиста К. Менгера (Carl Menger). Обзорная статья [12], посвященная основным подходам к решению Санкт-Петербургского парадокса, была написана к 1923 г. Затем она была представлена экономистам в докладе 1927 г. и опубликована в 1934 г. в ведущем экономическом журнале[8].

*Карл Мен*гер мл. (1902–1985)

В этой обзорной работе Менгер представил уже достигнутые на тот момент результаты, а также подверг критике как кажущуюся парадоксальность результата, так и решения, предложенные Д. Бернулли и Г. Крамером. С точки зрения К. Менгера (и современной математики в целом), бесконечное математическое ожидание выигрыша само по себе не является парадоксальным или, по крайней мере, не требует дополнительных объяснений. Иными словами, математическое ожидание рассматривается им шире, чем «честная цена», а именно как одна из форм оценки. Истинный смысл парадокса, по К. Менгеру, состоит в несоответствии математической модели и наблюдаемого поведения. Поэтому обзор основных решений Санкт-Петербургского парадокса, приведенный в его статье, включает в себя их интерпретацию с точки зрения адекватности. При этом Менгер подчеркнул различия между дескриптивным (описательным) и нормативным (предписывающим) подходом[9]. Сам он придерживался первого из них, рассматривая математические модели как удобную форму изучения регулярного поведения и в то же время указывая на возможную ограниченность их применения.

Иными словами, огромная заслуга К. Менгера состоит в том, что он переместил акцент с поиска «честной цены» на нахождение адекватной дескриптивной модели поведения в условиях неопределенности и тем самым ввел Санкт-Петербургский парадокс и связанные с ним идеи в контекст экономической теории.

Значительная часть статьи Менгера представляет собой обзор основных решений Санкт-Петербургского парадокса, предложенных в математической литературе,

---

[7] В классической работе по теории портфеля Марковиц [11] ссылался на «Трактат о вероятности» Кейнса, но только в контексте субъективных (в его терминологии — «персональных») вероятностей. Не вполне ясно, воспринимал ли Марковиц Кейнса как предшественника в области концепции «среднее — риск».

[8] Эта работа оказала влияние на Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна, которые впоследствии стали основоположниками современной теории неопределенности как раздела микроэкономики и теории игр [13] (см. ссылки в самой монографии [13] и комментарии переводчика статьи на английский язык [12, p. 211]).

[9] Это различие, по-видимому, уже хорошо понимал Д. Бернулли, заявляя в § 2 своей статьи, что «речь идет не о *судебных решениях*, а о *рекомендациях*…» [1, с. 12].

и их характеристику с точки зрения экономического поведения. Кроме того, Менгер предложил некоторые возможности для расширения анализа в рамках теории ожидаемой полезности[10]. В целом решения парадокса в соответствии с Менгером можно разделить на три большие группы: 1) применение теории полезности, 2) учет ограничений реального мира и 3) модификация вероятностей.

Первая группа решений парадокса относится к модификации исходов случайной величины с помощью функции полезности. Именно она наиболее тесно связана с теорией ожидаемой полезности. Более того, К. Менгер приводит ряд цитат, показывающих, как вслед за Д. Бернулли формировалось мнение о необходимости такой модификации в математической литературе, и указывает на ее идентичность неоклассическому подходу, который активно развивался во время написания его статьи.

При этом Менгер сосредоточивается на новом аспекте проблемы. Прежде всего, он критикует предшественников, указывая на случай $u(x_k)=2^{k-1}$, для которого ожидаемая полезность будет бесконечной. Иными словами, для такого случая модификация исхода недостаточна, т. е., по мнению Менгера, нужно вводить дополнительные условия на функции полезности, например их ограниченность. Такой вариант, точнее, ситуацию, когда полезность исходов слишком быстро растет, П. Самуэльсон предложил называть «супер-петербургской игрой» [9].

В качестве решения данной проблемы К. Менгер указывает на ограниченные функции, например гиперболическую, предложенную Э. Тимердингом [14],

$$u(x)=\frac{u_{\max}x}{u_{\max}+x},$$

для которой $u(0)=0, \lim\limits_{x\to\infty}u(x)=u_{\max}$ и $u'(0)=1.$ Тем не менее Менгер считал, что такое предложение полностью не решает возникающие теоретические проблемы[11].

Это породило дискуссию о необходимых и достаточных условиях существования функций полезности, проходившую во второй половине XX в. В частности, было установлено, что бесконечное (счетное или несчетное) число исходов требует дополнительных условий (аксиом), что усложняет понятие рациональности, которое, по-видимому, еще не прояснено до конца в экономической литературе [17].

Вторая группа решений парадокса — ограничения реального мира — не позволяет, в частности, достичь бесконечно больших сумм, что сводит вопрос о парадоксальности результата к вопросу об адекватности модели. Прежде всего, речь идет об ограниченности капитала, который может быть вовлечен в игру, так что длина цепочки подбрасываний не может быть слишком большой. Фактически здесь имеет место альтернативная интерпретация второго подхода Крамера (например, в смысле формулы (2)). Но если Крамер приводил формулировку в терминах огра-

[10] Следует также отметить, что с тех пор ничего принципиально нового в подходах к решению парадокса предложено не было, так что достаточно старые математические работы и их экономическая (поведенческая) интерпретация, данная К. Менгером, являются до настоящего времени основой для разработки альтернативных подходов к оценке функций полезности в условиях неопределенности.

[11] Впервые ограниченную функцию полезности, по существу, предложил де Бюффон (см. его письмо к Крамеру от 3 октября 1730 г., воспроизведенное в книге [15]). Сам де Бюффон исходил из необходимости анализа относительного выигрыша. Современная интерпретация с выводом функции $u(x) = x / (x + a)$ и необходимыми комментариями дана в [16].

ниченного удовлетворения, то Менгер пишет о фактическом ограничении капитала, доступного для игры.

Другой не менее важный тип практических ограничений, упоминаемый Менгером, — ограничения времени игры, усечение слишком длинных цепочек бросков монеты[12]. Интересно, что ограниченность времени позволила Д. Брито [19] интерпретировать Санкт-Петербургский парадокс в терминах теории Г. Беккера о распределении времени, увязав в оптимальной точке математической задачи поведения потребителя ограничения по времени и капиталу.

К этому ограничению примыкает теоретико-вероятностный (частотный) аргумент, обсуждаемый Менгером вслед за Фризом и Чубером. Он состоит в том, что количество игр, которые будут реально проходить, конечно (или даже игра будет единственной), так что наблюдаемые выигрыши будут всегда конечными, как и выборочное среднее, являющееся эмпирической оценкой математического ожидания. В связи с этим К. Менгер вводит новое экономическое понятие «готовность платить», которое играет огромную роль в современных микроэкономических моделях ценообразования.

Данный аргумент поддерживается эмпирическим исследованием французского натуралиста и математика Ж.-Л. де Бюффона, которое он описал в работе «Опыт моральной арифметики» [15], вышедшей в 1777 г. как приложение к его фундаментальному труду по естественной истории. Само исследование, точные сроки проведения которого установить трудно, представляло собой 2048 (= 2^{11}) испытаний Санкт-Петербургской игры. Де Бюффон не получил цепочек длиннее 9, причем последних было 6. Среднее значение равнялось 4,91 ден. ед.[13]

Кроме того, что это был первый опубликованный статистический эксперимент, исследование де Бюффона предшествовало возникновению экспериментальной экономики, нового активно развивающегося направления экономической теории. Правда, современные экономисты Х. Зауерманн и Р. Зельтен отрицают тот факт, что данное исследование можно считать первым экономическим экспериментом, так как собственно экономическое поведение в нем не тестировалось [20].

Сам де Бюффон интерпретировал Санкт-Петербургский парадокс и свой статистический эксперимент не с точки зрения здравого смысла (т. е. имея в виду ограниченность числа бросков), а предполагая наличие модификации вероятностей, которое он объяснял моральными причинами. Это приводит к *третьей группе* решений парадокса.

Решение, предлагаемое в рамках данного подхода, можно математически представить как

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \pi(p_k), \tag{4}$$

где $\pi(p_k)$ — подходящая модификация вероятности p_k, обеспечивающая конечность оценки P. В частности, де Бюффон считал, что вероятности очень редких

[12] Де Бюффон оценивал продолжительность 2^{24} бросков монеты примерно в 56 лет при бросании по 6 часов в день [15]. Идея ограничить число бросков принадлежит математику XVIII в. А. Фонтэну, который предлагал делать не более 20 бросков [18, p. 222].

[13] Нойгебаурер [3] приводит обзор экспериментов (реальных и компьютерных), проводившихся вплоть до последнего времени. Наиболее длинная серия, зафиксированная в таких экспериментах, составила 29 бросков.

событий при принятии решений считаются нулевыми[14]. На самом деле при такой модификации нарушается условие нормировки, так что для того, чтобы значения $\pi(p_k)$ составляли вероятностное распределение, необходимо ввести подходящую мультипликативную поправку для перенормировки массы вероятностей.

Идея модификации вероятностей также была широко известна среди математиков XVII–XIX вв. В указанной форме (обнуление маленьких вероятностей) она приписывалась различным ученым[15]. Нойгебауэр [3] обратил внимание на то, что подобной идеи придерживался сам Николай Бернулли, сформулировав ее в письме к Г. Крамеру от 3 июля 1728 г. Н. Бернулли также изложил ее своему двоюродному брату Д. Бернулли в письме от 5 апреля 1732 г., переформулировав второе решение Крамера в данных терминах. Соответственно, автором настоящей идеи следует считать Н. Бернулли.

Этот подход также развивается современной экономической наукой и бизнес-практикой, хотя в последнее время имеет место тенденция отказа от игнорирования событий, возникающих с небольшими вероятностями, но вызывающих критический ущерб[16]. В частности, в 1998 г. американский экономист К. Вебер предложил ввести в модель коэффициенты дисконтирования как отражение того, что игра проходит в реальном времени[17] [22]. Этого достаточно не только для конечности математического ожидания, но и при определенных условиях для сходимости ряда при функции полезности с положительной второй производной (т. е. для лица, склонного к риску).

Хотя модификация исходов была более популярна, что первоначально закрепилось в экономической теории, критика теорий ожидаемой полезности во второй половине XX в. привела к многочисленным попыткам ее обобщения, многие из которых включают в себя дополнительную модификацию вероятностей. В частности, можно сослаться на теорию ранговой ожидаемой полезности (rank-dependent expected utility) как одну из наиболее популярных альтернатив классической теории ожидаемой полезности. Другой пример такого рода — деформированные распределения (distorted distributions), которые играют существенную роль в современном количественном риск-менеджменте.

---

[14] К. Эрроу, который был горячим сторонником теории ожидаемой полезности, критиковал такой подход как субъективный и логически противоречивый [21].

[15] Тодхантер [18, p. 258 — 259] приписал ее д'Аламберу как следствие его идеи о различном понимании возможности, опубликованной в 1761 г. П. Самуэльсон [9] поддерживал эту точку зрения, но ссылался на более позднюю работу д'Аламбера 1773 г. Большинство учёных считают автором данного подхода де Бюффона. Сам он в [15] приводит адресованное ему письмо Д. Бернулли от 19 марта 1762 г., в котором последний поддерживает идеи модификации вероятностей, высказанные де Бюффоном до указанной даты. Точнее определить дату, когда де Бюффон пришел к такой идее, и описать сопутствующие обстоятельства не представляется возможным.

[16] Повышение интереса к оценке таких событий в последние годы было обусловлено мировым финансовым кризисом 2008 г.

[17] Вебер не был первым из тех, кто ввел дисконтирование в Санкт-Петербургский парадокс, но, очевидно, он впервые подробно обосновал это экономически. В частности, один из результатов Брито [19], опубликованный в 1975 г., подразумевал наличие коэффициентов дисконтирования при бесконечном временно́м горизонте, но это было следствием более общей теоремы, без подробного обсуждения его экономического содержания.

Иными словами, современная экономическая теория предпочитает комбинировать подходы (3) и (4)[18], т. е. использовать ожидаемую полезность вида

$$u_p(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} u(x_k)\pi(p_k).$$

Другие важные идеи работы Д. Бернулли

Значение работы Д. Бернулли далеко не исчерпывается первой в истории формулировкой принципа ожидаемой полезности. Приведенное выше описание его идеи, хотя и является традиционным для учебных пособий по экономике неопределенности, все же сильно упрощено. Д. Бернулли в своей статье высказал еще ряд ключевых идей и примеров, сыгравших впоследствии значительную роль в экономической теории.

Прежде всего, выбор логарифмической функции Д. Бернулли базировался на предположении о том, что, говоря современным языком, предельная полезность капитала обратно пропорциональна размеру этого капитала:

$$\frac{du}{dx} = \frac{b}{x}. \tag{5}$$

В современной экономической теории предпочитают заменять капитал или чистые активы доходом и, соответственно, говорят о предельном доходе, а не о «выгоде, полученной из сколь угодно малого выигрыша». Тем не менее важен сам факт использования идеи *убывающей предельной полезности*.

Решая это простое дифференциальное уравнение (5), получим явный вид функции полезности:

$$u(x) = b\ln x + \text{const}. \tag{6}$$

Это, в частности, отличает подход Д. Бернулли, который достаточно логично обосновал предложенную функцию полезности, от подхода Г. Крамера, обе функции которого никак не обоснованны.

Таким образом, Д. Бернулли можно рассматривать как одного из предшественников маржинализма. Именно этот результат его исследований часто подчеркивался в экономической литературе первой половины XX в. [7; 23], тогда как о вкладе в развитие ожидаемой полезности стали писать после соответствующих дискуссий 1950-х годов. К сожалению, данный результат, полученный Бернулли, был признан экономистами уже после того, как они сами пришли к аналогичным выводам, хотя влияние если не самой работы Бернулли, то, по крайней мере, порожденной ею дискуссии, скорее всего, имело место. В частности, Й. Шумпетер указывает среди прочих на У. Джевонса, пришедшего к аналогичным выводам относительно поведения предельной полезности (по его мнению) независимо от Д. Бернулли [23, с. 396–398]. Вместе с тем М. Панталеоне [24] подчеркивал тот факт, что У. Джевонс был, несо-

[18] Такой подход был, по-видимому, впервые предложен в упоминавшемся ранее письме Н. Бернулли от 5 апреля 1732 г., адресованном Д. Бернулли. Это письмо долгое время было неопубликованным, поэтому следует считать, что современная экономическая теория пришла к такой концепции независимо либо подобная зависимость была слабой и косвенной (на уровне развития идей, признаваемых общепринятыми).

мненно, знаком с работой Д. Бернулли и пересказом ее основных идей, сделанным П. Лапласом. Робертсон [25], подтверждая в целом знакомство Джевонса с идеями Бернулли, выразил сомнение в наличии соответствующего влияния на том основании, что Джевонс ссылался не на сами работы, а на их пересказ в книге И. Тодхантера [18]. Однако в ней дано достаточно полное изложение указанных идей, особенно их математической части (дифференциальное уравнение (5) там присутствует), а также вкратце упомянуто и их содержательное объяснение (разное отношение к дополнительной денежной сумме, зависящее от текущего состояния).

Другая важная идея Д. Бернулли заключалась в том, что уровень полезности нового состояния (размера богатства) также зависит от начального положения. Это было связано с тем, что уравнение (5) решалось при начальном условии $u = 0$, $x = w$, и Бернулли интерпретировал значение w как начальное богатство. Тогда решение (6) примет вид

$$u(x) = b\ln\frac{x}{w} = b\left(\ln x - \ln w\right). \tag{7}$$

Хотя на первый взгляд кажется, что такая постановка сужает значимость результата, так как $u(x)$ теперь представляет собой изменение полезности по отношению к начальному состоянию, важным методологическим аспектом является предпосылка о том, что *выбор зависит от условий, в которых он делается.*

Математически применение функции (7) выглядит следующим образом. Для фиксированного начального состояния логичнее было бы рассматривать величину $y = x - w$ выигрыша $(y > 0)$ или потерь $(y < 0)$. Тогда (5) можно переписать как

$$\frac{du}{dy} = \frac{b}{y + w},$$

а (7) примет вид[19]

$$u(y,w) = b\ln\frac{y+w}{w} = b\ln(y+w) - b\ln w. \tag{8}$$

В современной экономической литературе имеются различные модификации этого подхода. Прежде всего, часто считают, что $\tilde{y}$ представляет собой чистый выигрыш или убыток, т. е. истинный выигрыш или убыток $\tilde{z}$ за вычетом «цены игры» c: $\tilde{y} = \tilde{z} - c$. Тогда использование (8) приведет к оценке ожидаемой полезности:

$$b\sum_k p_k \ln(z_k - c + w) - b\ln w.$$

Иными словами, из оценки ситуации при наличии экономического поведения в условиях неопределенности вычитается оценка ситуации при его отсутствии [9; 26].

[19] Интересно отметить, что величина, стоящая под знаком логарифма, представляет собой темп роста (возможно, с отрицательными приростами). Такой подход достаточно популярен в связи с использованием геометрического броуновского движения в современных моделях прогнозирования стоимости активов.

Еще один подход был предложен О. Петерсом [26], который абсолютизировал замечание Д. Бернулли (§14 его статьи) о противопоставлении оценок положительных и отрицательных исходов[20] [1, с. 15 — 16]. Это приводит к оценке

$$b\sum_k p_k \ln\frac{z_k + w}{w} - b\ln\frac{w - c}{w},$$

которую довольно трудно интерпретировать (оценка выигрышей за вычетом оценки проигрышей). Такая трактовка позволяет О. Петерсу выявить тот факт, что среднее значение по группе бросков в один момент времени не соответствует среднему во времени по одной серии бросков. Иными словами, случайный процесс, описывающий динамику богатства игрока, не обладает свойством эргодичности. Это приводит к новой трактовке оценивания процессов во времени и, следовательно, к новым типам оценок, которые предлагается использовать в финансовой области [26].

Собственно, основная цель работы Д. Бернулли состояла именно в развитии данной теории принятия решений в условиях неопределенности и получении соответствующих формул оценки. Их применение было проиллюстрировано рядом примеров, одним из которых и был Санкт-Петербургский парадокс. Другие примеры (хотя и в сильно упрощенной форме) были взяты из практики страхования. Иными словами, Д. Бернулли можно считать первооткрывателем управления рисками как научной дисциплины и экономики страхования.

Первый пример (§15) сводится к оценке границы богатства, не подверженного риску, от значения которой зависит, стоит заключать договор страхования или этого не следует делать [1, с. 20–21]. Если $\tilde{y}$ — неотрицательная случайная величина ущерба, а c — страховая премия по договору страхования, предполагающему полное покрытие, то рассуждения Д. Бернулли сводятся к установлению правила, при котором следует страховаться, если

$$\mathrm{E}\left[u(w - \tilde{y})\right] \le u(w - c).$$

Левая часть неравенства представляет ожидаемую полезность при отсутствии страхования, а правая — полезность при наличии договора. Такой подход соответствует современной экономической точке зрения, где данное неравенство интерпретируется как *условие заключения договора страхования* в случае полного покрытия ущерба[21].

Второй «практический» пример Д. Бернулли (§16) показывает преимущества *диверсификации* [1, с. 21–22]. Фактически Д. Бернулли предлагает распределить товар для перевозки на несколько судов, каждое из которых может погибнуть вместе с товаром. Число судов определяется так, чтобы обеспечить максимальную ожидаемую полезность. Свое теоретическое обобщение данный пример нашел совсем недавно в рамках приложения теории упорядочения рисков к финансам и страхованию. Более того, в современных условиях задача минимизации риска при распределении

---

[20] Хотя Д. Бернулли, действительно, не очень четко сформулировал этот аспект, оснований для интерпретации О. Петерса, на наш взгляд, нет. В этом можно легко убедиться, анализируя примеры из §15 и 16 статьи Бернулли [1, с. 20–22]. См. также замечания 5 и 7, сделанные П. А. Ватником к ее русскому переводу [1, с. 18, 20].

[21] По нашему мнению, данный подход дает более точное описание результатов §14 статьи Д. Бернулли [1, с. 19–20], чем позиция О. Петерса [26].

некоторого ресурса (чаще всего, капитала или лимитов риска по подразделениям финансового института) становится крайне важной в связи с развитием управления рисками.

Современные интерпретации Санкт-Петербургского парадокса

Во второй половине XX в. было предложено несколько альтернативных интерпретаций Санкт-Петербургского парадокса, касающихся поведения на финансовых рынках. Некоторые из них легли в основу альтернативных экономических теорий, другие остались эвристическими правилами, используемыми на практике.

Одно из обобщений Санкт-Петербургского парадокса состоит в выборе вероятностей выигрыша, отличных от ½. Тогда, очевидно, исходы возникают с вероятностями, подчиняющимися геометрическому распределению.

В связи с этим Д. Дюранд [27] предложил рассматривать вместо вероятностей p_k коэффициенты дисконтирования $v^k = (1+i)^{-k}$, а вместо выигрышей x_k — коэффициенты наращения стоимости компании $(1+g)^{k-1}$, имея в виду ее рост с постоянным темпом прироста g. Тогда математическое ожидание «выигрыша» бесконечно при $g \geq i$. Очевидно, приложение Санкт-Петербургской игры здесь чисто формальное, так как коэффициенты дисконтирования не являются вероятностями. Более того, сумма бесконечного числа величин $(1+i)^{-k}$ не равна единице, так что условие нормирования «вероятностей» нарушается. Наличие риска здесь также игнорируется (Дюранд предлагал использовать соответствующее значение как один из исходов случайной величины).

Тем не менее полученная в результате формула настоящей стоимости дисконтированной стоимости компании верна. Бесконечное значение фактически сигнализирует о возможности арбитражных сделок. Поэтому данный результат пытались использовать для объяснения участия в финансовых пирамидах или поведения во время финансовых пузырей: если ожидаемый темп прироста стоимости активов g превышает текущую ставку процента i, то цену на данный актив можно назначать сколь угодно высокой [28].

Ошибка инвестора с данной точки зрения состоит именно в предположении бесконечно большого или хотя бы достаточно длительного периода быстрого роста[22]. Именно для поддержания таких ожиданий финансовые пирамиды часто сопровождаются соответствующей рекламной кампанией. Для финансовых пузырей также типично проявление эйфории в отношении экономических (и особенно инвестиционных) перспектив.

Другая финансовая интерпретация базируется на представлении Санкт-Петербургской игры в виде денежного потока: каждое выпадение «решки» на k-м шаге означает необходимость выплачивать штраф 2^{k-1} одним игроком второму, при выпадении «орла» производится выплата соответствующего выигрыша в обратном направлении (вторым игроком первому) и игра заканчивается. Если «орел» выпал на n-м шаге, то совокупные платежи первого игрока второму составят $2^{n-1}-1$, его выигрыш будет 2^{n-1}, так что чистый выигрыш гарантированно равен 1, что можно рассматривать как «цену игры» первого игрока.

[22] См. представленную выше дискуссию об ограниченности серий бросков в Санкт-Петербургской игре.

Такое изменение формулировки Санкт-Петербургской игры приписывают д'Аламберу, так что в среде профессиональных игроков казино и финансовых спекулянтов соответствующая стратегия (например, при игре в рулетку постоянно ставить на один цвет, удваивая ставку при проигрыше) называется системой, или мартингалом д'Аламбера[23]. Основная проблема такого подхода состоит в том, что размер ставки растет экспоненциально, и деньги на игру могут кончиться слишком быстро. Соответствующее решение можно найти, например, в работе К. Аазе, где он интерпретирует соответствующую постановку как модель работы инвестиционного фонда [30].

Еще одна важная интерпретация базируется на схожести функции полезности Д. Бернулли и информационного критерия минимума энтропии, предложенного К. Э. Шенноном. Работы этих авторов были совершенно не зависимы. Однако в 1956 г. Дж. Келли, углубляя аргументацию Шеннона, представил оценку точности передачи данных как «игру», применив в качестве критерия сумму (интеграл) логарифмов величин капитала [31]. Фактически Келли не использовал идею функции полезности, вычисляя средний темп прироста (отсюда и логарифмическая функция). Несмотря на то что связь с азартными играми была внешней, чисто терминологической, этот подход распространился в среде профессиональных игроков казино и финансовых спекулянтов под названием «критерий Келли», а затем была осознана его связь с идеями Д. Бернулли [32].

При этом аналогия экономических процессов со статистической механикой (термодинамикой), основанная на принципе максимизации энтропии, стала основой развития целого направления в экономической теории, которое часто используется для финансовых приложений. Первоначально оно называлось «термоэкономикой» (сам термин был предложен в 1962 г.), а затем разделилось на две ветви. Одна стала делать упор на энергетическую составляющую в биологической и социальной эволюции, породив биофизическую экономику[24], другая — специализироваться на использовании соответствующих методов для решения экономических проблем, прежде всего, связанных с анализом массового поведения в равновесных ситуациях и с оценкой активов на финансовых рынках. Последнее особенно активно развивается с середины 1990-х годов. Данную ветвь теперь принято называть «эконофизикой»[25]. С учетом осознаваемой связи данных направлений с Санкт-Петербургским парадоксом его можно считать их отдаленным предшественником, хотя и косвенным [32].

Выводы

Появившаяся 300 лет назад задача из области теории вероятностей, известная как Санкт-Петербургский парадокс, сыграла ключевую роль в развитии нескольких научных сфер, особенно экономической теории. Хотя многие авторы на протяжении долгих лет дискуссии не осознавали экономического содержания этой проблемы, они предложили ряд подходов, которые имели и до сих пор имеют решающее зна-

[23] Также используется название «Санкт-Петербургский мартингал» (подробнее см. [29]).

[24] Используются также термины «биоэкономика» и «экологическая экономика». Последний нельзя путать с экономикой природопользования.

[25] Вместе с тем применяются понятие «статистические финансы» и англоязычный термин «phynance». Они слегка различаются по смыслу, но этот вопрос выходит за рамки данной статьи.

чение для микроэкономической теории. В контекст экономической теории Санкт-Петербургский парадокс был введен в начале XX в. математиком К. Менгером, который переместил акцент с поиска «честной цены» некой азартной игры на нахождение адекватной дескриптивной модели поведения в условиях неопределенности.

Влияние данной задачи на экономическую теорию прослеживается, например, для таких идей, как принцип убывающей предельной полезности, использование ожидаемой полезности в качестве критерия принятия решения в условиях неопределенности, а также основ микроэкономики страхования и управления рисками. Важную роль она сыграла и при создании теории игр.

Популярность Санкт-Петербургского парадокса проявилась и в том, что его пытались использовать (часто не вполне аргументированно) для обоснования некоторых современных подходов к финансовому моделированию. В частности, делались попытки представить его как предшественника концепции «среднее — риск», активно применяемой в теории портфеля, а также как предтечу эконофизики — одной из популярных альтернатив современной финансовой теории.

Литература

1. *Bernoulli D.* Specimen theoriae novae de mensura sortis // Commentarii academiae imperialis petropolitanae. 1738. T. V. P. 175–192 (Русский перевод: *Бернулли Д.* Опыт новой теории измерения жребия // Теория потребительского спроса. СПб.: Экономическая школа, 1993. С. 11–27).
2. *Monmort P. R. de.* Essay d'analyse sur les jeux de hazard. Seconde ed. Paris: Jacque Quillau, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, 1713. 416 p.
3. *Neugebauer T.* Moral impossibility in the Petersburg paradox: a literature survey and experimental evidence // LSF Research Working Paper Series. 2010. N 10–14. P. 1–43.
4. *Spiess O.* Zur Vorgeschichte des Petersburger Problems // Die Werke von Jakob Bernoulli. Bd. 3. Basel: Birkhäuser Verlag, 1975. 585 S.
5. *Ватник П. А.* Даниил Бернулли — экономист // Финансы и бизнес. 2008. № 2. С. 188–194.
6. *Daston L. J.* D'Alambert's critique of probability theory // Historia mathematica. 1979. Vol. 6. P. 259–279.
7. *Keynes J. M.* A Treatise on Probability. London: MacMillan and Co., 1921. 466 p.
8. *Czuber E.* Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Aufl. 1. Band. Leipzig: Tuebner, 1908. 410 S.
9. *Samuelson P. A.* St. Petersburg paradoxes: defanged, dissected and historically described // Journal of Economic Literature. 1977. Vol. 15. P. 24–55.
10. *Weirich P.* The St. Petersburg gamble and risk // Theory and Decision. 1984. Vol. 17. P. 193–202.
11. *Markowitz H. M.* Portfolio selection: efficient diversification of investment. New York: Wiley, 1959. 344 p.
12. *Menger K.* Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre // Zeitschrift für Nationalökonomie. 1934. Band V. Heft 4. S. 459–485 (Английский перевод: *Menger K.* The role of uncertainty in economics // Essays in Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern. Princeton, NJ: Princeton university press, 1967. P. 211–231).
13. *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 707 с.
14. *Timerding H. E.* Die Bernoullische Wertetheorie // Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1902. Bd. 47. S. 321–354.
15. *Buffon G.-L. de.* Essai d'arithmétique morale // Euvres complètes. T. XV. Paris: Verdière et Ladrange, 1829. P. 338–447.
16. *Daston L. J.* Probabilistic expectation and rationality in classical probability theory // Historia mathematica. 1980. Vol. 7. P. 234–260.
17. Handbook of utility theory. Vol. 1. Dordrecht: Kluwer, 1998. 684 p.
18. *Todhunter I.* A History of the mathematical theory of probability. From the time of Pascal to that of Laplace. Cambridge: MacMillan and Co., 1865. 624 p.

19. *Brito D. L.* Becker's theory of the allocation of time and the St. Petersburg paradox // Journal of Economic Theory. 1975. Vol. 10. P. 123–126.

20. *Sauermann H., Selten R.* Zur Entwicklung der experimentellen Wirtschaftsforschung // Beiträge zur Experimentellen Wirtschaftsforschung. Tübingen: Paul Siebeck, 1967. S. 1–8.

21. *Arrow K. J.* Alternative approaches to the theory of choice in risk-taking situations // Econometrica. 1951. Vol. 19, N 4. P. 404–437.

22. *Weber Ch. E.* The St. Petersburg paradox: a resolution for impatient risk seekers // International advances in economic research. 1998. Vol. 4. P. 367–373.

23. *Шумпетер Й.* История экономического анализа. СПб.: Экономическая школа, 2001. 1664 с.

24. *Pantaleone M.* Contributo alla teoria del riparto delle spese pubbliche // Scritti varii di Economia. Milano; Palermo; Napoli: Libraio della R. Casa, 1940. P. 54–57.

25. *Robertson R. M.* Jevons and his precursors // Econometrica. 1951. Vol. 19, N 3. P. 229–249.

26. *Peters O.* The time resolution of the St. Petersburg paradox // Philosophical Transactions of the Royal Society. Ser. A. 2011. Vol. 369. P. 4913–4931.

27. *Durand D.* Growth stocks and St. Petersburg paradox // The Journal of Finance. 1957. Vol. 12, N 3. P. 348–363.

28. *Székely G. J., Richards D.* The St. Petersburg paradox and the crash of high-tech stocks in 2000 // The American Statistician. 2004. Vol. 58, N 3. P. 225–231.

29. *Bru B., Bru M.-F., Chung K. L.* Borel et la martingale de Saint-Pétersbourg // Revue d'histoire des mathématiques. 1999. Vol. 5. P. 181–247.

30. *Aase K.* On St. Petersburg paradox // Scandinavian Actuarial Journal. 2001. N 1. P. 69–78.

31. *Kelly J. L.* A new interpretation of information rate // The Bell system technical journal. 1956. Vol. 35, N 4. P. 917–926.

32. *Thorp E.* The Kelly criterion in blackjack sports betting and the stock market // Handbook of Asset and Liability Management. Vol. 1. Elsevier, 2007. Ch. 9. P. 385–428.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2013 г.