

## ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.86

Е. В. Гиленко

### ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ В МОДЕЛЯХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ПОКОЛЕНИЙ: ПРОБЛЕМА ДИНАМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ОПТИМАЛЬНОСТИ ПО ПАРЕТО

#### 1. Введение

Принцип моделирования экономического развития, основанный на идее так называемых «перекрывающихся поколений», предложенной в работах П. Самуэльсона (1958) и П. Даймонда (1965) [1; 2], лег в основу целого направления моделирования экономического роста, которое успешно развивается вот уже несколько десятилетий. Модели «перекрывающихся поколений», или OLG-модели (от англ. *overlapping generations*), в современной литературе, наряду с моделями реального делового цикла, задают одно из стандартных направлений описания долгосрочной экономической динамики и развития, являясь достаточно удобным и разносторонним инструментарием.

На сегодняшний день известно множество модификаций OLG-модели, в том числе включающих актуальные аспекты стохастического моделирования экономического роста. К указанным модификациям относится учет следующих особенностей: наличие или отсутствие (чистый обмен) производства в экономике; рассмотрение динамики в непрерывном или дискретном времени; учет особенностей макроэкономической политики и влияния на окружающую среду [3; 4]; отражение особенностей поведения изучаемых агентов, таких как долголетие, наследование, альтруизм, накопление человеческого капитала, налогообложение и проч. [5; 6].

Исследование проблематики экономического роста актуально в свете взаимовлияния данного феномена и других сфер экономики и анализа экономической политики государства. Так, экономический рост тесно связан с иными сферами экономики, например с динамикой фондового рынка. Периодически фондовые рынки

---

**Евгений Валерьевич ГИЛЕНКО** — канд. экон. наук, доцент кафедры экономической кибернетики экономического факультета СПбГУ. В 2002 г. окончил экономический факультет Санкт-Петербургского государственного университета. В 2005 г. защитил кандидатскую диссертацию. Сфера научных интересов: математическое моделирование экономического развития, статистические методы обработки экономических данных. Автор более 30 научных публикаций; e-mail: e.gilenko@spbu.ru

© Е. В. Гиленко, 2013

являются индикаторами надвигающегося экономического кризиса или экономического шока. Данная проблематика обсуждается в работе [7]. В этом отношении ряд постановок моделей в рамках концепции перекрывающихся поколений включают в себя моделирование динамики фондовых рынков и возникновения на них так называемых «пузырей» (англ. — *asset bubbles*) и возникающих в результате этого эффектов [8].

При исследовании указанных выше аспектов в рамках моделей экономического роста авторы стараются дать ответ на ряд принципиальных вопросов о существовании, единственности и устойчивости равновесия в модели, сходимости к нему и его оптимальности [9]. В этом отношении OLG-модели имеют целый ряд особенностей. Во-первых, при довольно несложных условиях в данных моделях (в первую очередь, в детерминистических постановках) получается несколько состояний равновесия, одни из них являются устойчивыми, другие — нет [10].

Яркой особенностью модели перекрывающихся поколений является возможность анализа эффективности и оптимальности долгосрочного динамического равновесия. Так, например, хорошо известно, что в детерминистической OLG-модели конкурентное равновесие может не порождать оптимального (по Парето) распределения благ. Такую ситуацию связывают с избыточным накоплением капитала на долгосрочной траектории развития (англ. — *overaccumulation*) и называют динамической неэффективностью. Также достаточно хорошо установлено, что в модели перекрывающихся поколений возможной причиной динамической неэффективности является тот факт, что жизнь домохозяйств конечна и состоит всего лишь из двух периодов, в то время как экономика развивается на бесконечном горизонте [10].

Отдельного внимания здесь заслуживает проблема Парето-оптимальности распределения потребляемых агентами благ на долгосрочной траектории развития. С одной стороны, как будет обсуждаться ниже в данной статье, эффективность долгосрочного накопления основного капитала в экономике далеко не всегда связана с максимально возможным уровнем потребления экономических агентов на этой траектории развития. С другой же стороны, в современных условиях вопросы удовлетворенности уровнем жизни граждан той или иной страны выходят на первый план. Долго считалось, что высокие темпы экономического роста за счет повышения благосостояния граждан автоматически обеспечивают высокий уровень их удовлетворенности жизнью. Однако современные исследования показывают, что это не так (более подробно см. [11]).

Соответственно, возникает «естественное» предложение о вмешательстве в процесс экономического развития страны некоего социального планировщика (государства), способного, под собственные гарантии, осуществлять межпоколенческие трансферты в целях избежания ситуации излишнего накопления основного капитала в экономике (динамической неэффективности) и/или нерационального распределения потребляемых благ между поколениями агентов (неоптимальность по Парето). Однако вмешательство такого социального планировщика (государства) должно основываться на определенных критериях, поскольку в современном мире проблемы проведения политических преобразований подобного рода даже в рамках развитых экономик Запады стоят чрезвычайно остро (подробнее см. [12]).

С точки зрения разработанных теорий экономического роста двумя такими стандартными критериями являются «золотое правило» накопления капитала и оп-

тимальность найденного долгосрочного состояния равновесия по Парето. Оба этих критерия находят свое применение как в классических (детерминистических), так и в более современных (стохастических) постановках модели перекрывающихся поколений. Обсуждению особенностей этих критериев в рамках детерминистических и стохастических постановок OLG-моделей и посвящена настоящая статья.

Тем не менее, прежде чем перейти к обсуждению механизмов работы двух указанных критериев в рамках концепции перекрывающихся поколений, необходимо отметить, что возникающая в рамках OLG-моделей «естественная» возможность отражения межпоколенческих трансфертов, направленных на решение проблемы динамической неэффективности и/или Парето-неоптимальности долгосрочного развития моделируемой экономики, сделало OLG-модели чрезвычайно популярными для описания весьма широкого ряда конкретных экономических проблем. Кратко остановимся на некоторых из них.

Одна из первых экономических проблем, которая обсуждалась и продолжает активно обсуждаться в рамках OLG-моделей, — это проблема эффективности различных типов пенсионных систем. Выделяются два основных типа пенсионных систем: накопительная (англ. — *fully funded system*) и распределительная (англ. — *pay-as-you-go system*). В рамках концепции перекрывающихся поколений обосновывается, что если темп прироста населения страны превышает среднюю процентную ставку, то более социально выгодной является распределительная пенсионная система, которая автоматически способна решать и проблему динамической неэффективности. В противном случае (если темп прироста населения будет меньше ставки процента) экономические агенты будут заинтересованы во введении накопительной пенсионной системы (дискуссию по данному вопросу см., напр., в работах [13; 14]).

Активно исследуются различные модификации OLG-модели в приложении к проблемам защиты окружающей среды, посредством проведения соответствующей политики и влияния на нее долгосрочного экономического развития. Так, например, широко известно, что даже Киотский протокол устанавливает далеко не оптимальные квоты на выбросы парниковых газов. Однако, как пишут авторы работы [15], при моделировании соответствующей проблемы в рамках концепции «перекрывающихся поколений» разрабатываются конкретные способы выбора оптимальных объемов выбросов парниковых газов для страны — участницы Киотского протокола. Оказывается, что механизм межпоколенческих трансфертов квот на эмиссию парниковых газов способен соответствующим образом вывести долгосрочное развитие страны на оптимальную по Парето долгосрочную траекторию.

Указанный далеко не полный спектр применения концепции перекрывающихся поколений убедительно обосновывает реальную потребность, с одной стороны, в разработке моделей с учетом данной концепции, а с другой — в более четкой проработке ключевых понятий и критериев в этих моделях. Так, уже для понятий динамической эффективности и оптимальности по Парето в таких моделях возникает одна интересная особенность, имеющая важное макрополитическое значение: если в детерминистических моделях перекрывающихся поколений для найденного долгосрочного состояния равновесия данные критерии совпадают, то для стохастических постановок модели перекрывающихся поколений это, вообще говоря, неверно. Обсуждению данного феномена и посвящена настоящая статья. В разделе 2 приводится постановка простой детерминистической модели перекрывающихся поколений,

в рамках которой иллюстрируется идея «золотого правила» накопления капитала и оптимального по Парето распределения благ в условиях долгосрочного динамического равновесия. Раздел 3 посвящен постановке и анализу простой стохастической модели перекрывающихся поколений. Обсуждаются вопросы динамической эффективности и оптимального по Парето распределения благ в стохастическом случае. Раздел 4 завершает обсуждение и приводит некоторые выводы для макроэкономической политики государства.

## 2. Детерминистическая версия стандартной модели перекрывающихся поколений

В настоящем разделе представлена стандартная (детерминистическая) модель перекрывающихся поколений (см. также [16]). После введения основных предположений рассматривается поведение двух основных видов агентов в модели: домохозяйств и фирм, а также формулируются критерии «золотого правила» накопления капитала и оптимального по Парето распределения благ между «молодыми» и «старыми» домохозяйствами.

### 2.1. Описание детерминистической OLG-модели

Поведение экономики рассматривается в дискретном времени. В экономике существуют два основных типа агентов: домохозяйства и фирмы, причем в базовой постановке агенты являются типовыми (все домохозяйства идентичны друг другу, и все фирмы также идентичны друг другу). Экономические агенты являются рациональными и решают свои оптимизационные задачи: домохозяйства максимизируют полезность от потребления при некотором бюджетном ограничении, а фирмы максимизируют свою чистую прибыль.

Мы будем рассматривать упрощенный вариант модели П. Даймонда, в котором не предполагается роста населения. В этом случае можно считать, что в экономике в каждый период времени присутствует одно репрезентативное «молодое» домохозяйство и одно репрезентативное «старое» домохозяйство. Аналогично с точки зрения сферы производства будем рассматривать поведение одной репрезентативной фирмы — производителя единственного (агрегированного) продукта (блага), которое может идти как на потребление и сбережение, так и на инвестиции в основной капитал.

**Задача репрезентативного домохозяйства.** Репрезентативное домохозяйство живет два периода. В первый период оно является «молодым» и, обладая одной единицей ресурса под названием «рабочая сила», продает его на рынке труда (работает) за некоторую заработную плату  $w_t$ . В течение первого периода жизни получаемый трудовой доход домохозяйство тратит на текущее потребление  $c_t$  и сбережение  $s_t$  под некоторую ставку процента  $r_{t+1}$ , которая считается достоверно известной. Во втором периоде домохозяйство не работает и живет только на те средства, которые ему удалось сберечь. В течение второго периода оно потребляет всё, что сберегло, и в конце второго периода «умирает».

Задачей репрезентативного домохозяйства является максимизация своей функции полезности, заданной на объеме потребления текущего  $c_t$  и будущего периода  $d_{t+1}$  при определенных бюджетных ограничениях:

$$\begin{aligned}
U(c_t, d_{t+1}) &\rightarrow \max \\
c_t + s_t &= w_t, \\
(1 + r_{t+1})s_t &= d_{t+1}, \\
c_t, s_t, d_{t+1} &\geq 0
\end{aligned}
\tag{1}$$

или

$$\begin{aligned}
U(c_t, d_{t+1}) &\rightarrow \max \\
c_t + \frac{d_{t+1}}{(1 + r_{t+1})} &= w_t, \\
c_t, d_{t+1} &\geq 0,
\end{aligned}
\tag{1'}$$

где  $U(c, d)$  — функция полезности репрезентативного домохозяйства, обладающая стандартными свойствами. Решение задачи (1) представляется вектором оптимальных объемов текущего потребления, текущего сбережения и будущего потребления  $(c^*, s^*, d^*)$ . Данный вектор задает текущее равновесие репрезентативного домохозяйства.

**Задача репрезентативной фирмы**, направленная на максимизацию прибыли в текущем периоде, формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\pi(K_t, L_t) &= F(K_t, L_t) - (1 + r_t)K_t - w_t L_t \rightarrow \max, \\
K_t \geq 0, L_t &\geq 0,
\end{aligned}
\tag{2}$$

где  $F(K_t, L_t)$  — неоклассическая (агрегированная) производственная функция;  $K_t, L_t$  — соответственно затраты основного капитала и труда в текущем периоде. Здесь мы будем предполагать, что за определенный период времени основной капитал выбывает полностью и должен восстанавливаться за счет инвестиций.

В силу линейной однородности производственной функции задачу (2) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\pi(k_t) &= f(k_t) - (1 + r_t)k_t \rightarrow \max, \\
k_t &\geq 0,
\end{aligned}
\tag{3}$$

где  $k_t$  — капиталовооруженность рабочей силы, а  $f(k_t) = F(K_t / L_t, 1)$  — производственная функция в интенсивной форме, также обладающая стандартными свойствами. Решением данной задачи будет некоторое значение капиталовооруженности  $k^*$ , такое, что  $f'(k^*) = (1 + r_t)$ . Это  $k^*$  значение задает текущее равновесие фирмы-производителя в модели.

*Долгосрочное равновесие в модели* рассчитывается как стационарная траектория развития экономики, вдоль которой значения перечисленных выше основных показателей модели не изменяются. Данное равновесие возникает как одновременное равновесие на трех рынках, присутствующих в модели: рынка труда, рынка капитала и рынка (единственного) продукта.

Ключевым для нас в данном обсуждении является уровень долгосрочной (стационарной) капиталовооруженности рабочей силы  $k^{**}$  (верхний индекс «две звезды»

дочки» здесь и далее указывает на значение в стационарном состоянии). От значений данного показателя будет зависеть ответ на вопрос о том, является ли экономическое развитие в модели динамически неэффективным (т. е. экономика излишне сберегает и инвестирует в основной капитал) или нет. Обсуждению этого вопроса посвящен следующий подраздел.

## 2.2. «Золотое правило» и динамическая неэффективность в OLG-модели

В настоящей статье не будем останавливаться на детальных рассуждениях по данному вопросу, так как они доступны в стандартных учебниках по макроэкономике (см., напр. [16; 17]). Отметим только, что из долгосрочного равновесия на рынках капитала, труда и товарного рынка получается следующее соотношение:

$$f(k^{**}) - k^{**} = c^{**} + d^{**}, \quad (4)$$

где верхний индекс \*\* означает долгосрочное (стационарное) значение соответствующего показателя.

Следует обратить внимание на структуру полученного соотношения (4). Правая часть этого уравнения представляет собой суммарное потребление одного репрезентативного «молодого» и одного репрезентативного «старого» домохозяйства. Левая же часть полученного соотношения представляет собой разницу между выпуском на душу населения и инвестициями в основной капитал на душу населения. Это означает, что, вообще говоря, за счет «выбора» долгосрочного уровня капиталовооруженности можно *одновременно* повысить долгосрочный уровень потребления и «молодого», и «старого» домохозяйств. Отсюда естественным образом возникает первый критерий оптимальности долгосрочной траектории развития экономики — критерий оптимальности по Парето.

Действительно, если за счет изменения долгосрочного уровня капиталовооруженности можно увеличить долгосрочный уровень потребления хотя бы одного из двух репрезентативных домохозяйств («молодого» или «старого»), не снижая при этом уровня потребления другого, то это означает, что исходная долгосрочная траектория развития экономики не была оптимальной по Парето.

Для максимизации суммарного потребления на душу населения можно сформулировать задачу выбора соответствующего долгосрочного равновесного состояния:

$$f(k^{**}) - k^{**} \rightarrow \max_{k^{**} \geq 0}. \quad (5)$$

Долгосрочное динамическое равновесное состояние  $k_{GR}^{**}$ , которое является решением задачи (5), будет максимизировать суммарный долгосрочный уровень потребления «молодого» и «старого» домохозяйств. Его принято называть состоянием «золотого правила» накопления капитала.

Однако в модели «перекрывающихся поколений» долгосрочное равновесие «золотого правила» интересно не столько само по себе, сколько в качестве некоторой отправной точки для дальнейшего анализа, а именно: оно дает возможность понять, является ли долгосрочная траектория развития экономики динамически неэффективной или нет, т. е. наблюдается ли на ней излишнее накопление капитала.

Действительно, указанное выше условие «золотого правила» (5) дает возможность проанализировать две принципиальные ситуации: 1) когда равновесная капиталовооруженность рабочей силы в экономике ниже, чем в условиях «золотого правила»  $k^{**} < k_{GR}^{**}$  (ситуацию недонакопления капитала), и 2) когда  $k^{**} > k_{GR}^{**}$  (ситуацию излишнего накопления капитала). Нам необходимо разобраться, будут указанные две ситуации динамически эффективными (в смысле введенного выше определения) или нет.

Рассмотрим сначала ситуацию излишнего накопления, т. е.  $k^{**} > k_{GR}^{**}$ . Покажем, что она является динамически неэффективной. Действительно, в этом случае в некоторый период времени  $\tilde{t}$  некий социальный планировщик может перераспределить часть ресурсов (увеличить потребление «молодых» домохозяйств) так, чтобы начиная с периода  $\tilde{t} + 1$  капиталовооруженность рабочей силы соответствовала  $k_{GR}^{**}$ . Тогда, начиная с периода  $\tilde{t} + 1$ , суммарное потребление «молодых» и «старых» домохозяйств возрастет, поскольку будет выполняться

$$f(k_{GR}^{**}) - k_{GR}^{**} > f(k^{**}) - k^{**}, \quad (6)$$

где  $k_{GR}^{**}$  является решением задачи максимизации суммарного потребления (5). В текущем же периоде  $\tilde{t}$ , когда проводится вмешательство социального планировщика, производство продукции на душу населения будет равно  $f(k^{**})$ . При этом значение  $k^{**}$  определяется на начало периода, в котором происходит производство продукции, а дополнительные инвестиции потребуются для восстановления капиталовооруженности не до уровня  $k^{**}$ , а лишь до уровня  $k_{GR}^{**}$  ( $k^{**} > k_{GR}^{**}$ ). Кроме того, для дополнительного потребления (на душу населения) будет доступна величина  $k^{**} - k_{GR}^{**}$ .

В результате суммарное потребление на душу населения в самом периоде  $\tilde{t}$  будет определяться положительной величиной  $[f(k^{**}) - k_{GR}^{**} + (k^{**} - k_{GR}^{**})] > 0$ , которая, как несложно видеть, даже больше, чем максимальное потребление на душу населения в равновесном состоянии «золотого правила»:

$$f(k^{**}) - k_{GR}^{**} + (k^{**} - k_{GR}^{**}) > f(k_{GR}^{**}) - k_{GR}^{**}. \quad (7)$$

А значит, действительно в текущем периоде населению будет доступно больше ресурсов для потребления. Таким образом, от введенного в периоде  $\tilde{t}$  социальным планировщиком перераспределения ресурсов, направленного на повышение суммарного потребления, все домохозяйства выигрывают в потреблении, начиная непосредственно с периода проведения реформы, т. е. изначальная траектория долгосрочного развития экономики, на которой наблюдалось излишнее накопление капитала, была неэффективной по Парето, следовательно динамически неэффективной. В случае  $k^{**} < k_{GR}^{**}$  исходная стационарная траектория развития экономики является динамически эффективной.

Следует отметить, что в 1972 г. Д. Кассом [18] был сформулирован формальный критерий динамической неэффективности траектории. Траектория является динамически неэффективной тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^t \prod_{l=0}^{s-1} r_l < \infty. \quad (8)$$

Идея корректировки динамической неэффективности траектории долгосрочного развития экономики посредством осуществления межпоколенческих трансфертов является чрезвычайно популярной в современном анализе экономического роста и находит весьма широкое применение, в частности, при анализе пенсионных реформ.

Однако справедливость рассуждений такого рода основывается на том, что, как мы показали выше (соотношение (4)), в детерминистических моделях перекрывающихся поколений понятие динамической неэффективности *напрямую* связано с понятием оптимальности по Парето, т.е. за счет проведения определенных социальных преобразований, направленных на борьбу с динамической неэффективностью (избыточным накоплением капитала в экономике), можно непосредственно повысить благосостояние, по крайней мере, одного из поколений, не ухудшая при этом благосостояния другого поколения.

Ситуация существенным образом меняется в случае стохастического варианта модели перекрывающихся поколений, и условия Парето-оптимальности и динамической неэффективности могут не совпадать в этом случае. Рассмотрим настоящий вопрос подробнее.

### 3. Базовая стохастическая модель перекрывающихся поколений

Выше было показано, что в случае полной определенности в модели условия динамической эффективности и оптимальности по Парето совпадают напрямую. Здесь мы подробнее остановимся на одной из модификаций базовой стохастической модели перекрывающихся поколений, в рамках которой данный результат является, вообще говоря, неверным. Изложение данного раздела опирается на работу [19].

#### 3.1. Постановка базовой стохастической модели

Рассмотрим базовый стохастический вариант модели перекрывающихся поколений. Стохастический характер в базовом варианте проявляется через предположение о наличии случайных шоков в производстве. Время, как и ранее, является дискретным, начинается в момент времени 0 и идет до бесконечности. В каждый период времени, как и ранее в детерминистической модели, репрезентативные домохозяйства и фирмы решают свои оптимизационные задачи.

*Производство* в модели описывается неоклассической производственной функцией  $F$ , обладающей свойством постоянной отдачи от расширения масштабов производства по капиталу  $K$  и труду  $L$ ,  $F(K_t, L_t, \theta_t)$ , где  $\theta_t$  — случайный шок в текущем периоде времени  $t$ . Производимый (единственный) продукт используется на потребление и инвестирование в основные средства. Как и ранее, для упрощения будем предполагать, что за каждый период времени основной капитал выбывает полностью. Рассмотрим производственную функцию в интенсивной форме вида

$$f(k_t, \theta_t) = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1, \theta_t\right),$$

обладающую стандартными свойствами.

Стохастические шоки в модели описываются стационарным Марковским процессом с конечным множеством состояний  $S_t = S$  и матрицей вероятностей перехода  $Q$ , элементами которой являются условные вероятности  $q(\theta_{t+1} | \sigma_t)$ , где  $\sigma_t = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t)$ . Поскольку указанные шоки являются единственным источником стохастичности в модели, то используется представление в виде дерева событий  $\Gamma$ , где типовой узел обозначается как  $\sigma_t = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t)$ , а корнем дерева является  $\sigma_0 = \{\theta_0\}$ . Таким образом, множество узлов в момент времени  $t$  задается как  $\Sigma_t = S_0 \times S_1 \times S_2 \times \dots \times S_t$ , а дерево событий — как  $\Gamma = \bigcup_{t \geq 0} \Sigma_t$ . Каждый узел

$\sigma_t = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t)$  имеет единственного предшественника  $\sigma_{t-1}$ . Через  $\sigma_t^-$  обозначается множество всех предшественников для узла  $\sigma_t$ , а через  $\sigma_t^+$  обозначается множество всех узлов, непосредственно следующих за узлом  $\sigma_t$ .

Траекторией называется такая последовательность узлов  $\sigma^\infty = \{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ , что  $\sigma_{t+1} \in \sigma_t^+$ . Любое подмножество  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$  называется поддеревом, если каждый узел  $\sigma \in \tilde{\Gamma}$  имеет прямого наследника  $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Gamma}$ , и существует при этом единственный узел  $\tilde{\sigma}_0 \in \tilde{\Gamma}$  такой, что всякий узел  $\sigma \in \tilde{\Gamma}$ ,  $\sigma \neq \tilde{\sigma}_0$  является наследником  $\tilde{\sigma}_0$ .

*Домохозяйства.* Как и ранее, будем предполагать, что население в модели не растет. Соответственно, предложение труда в каждый период времени  $t$  может быть нормировано к единице:  $L_t = L = 1$ . В каждом узле дерева событий «рождается» одно домохозяйство, которое живет в течение двух периодов времени. Таким образом, домохозяйства в модели отличаются периодами и условиями, в которых они были «рождены».

Поскольку отсчет времени начинается в момент 0, то в этот момент существует так называемое «изначально старое» домохозяйство, «рожденное» в момент времени  $-1$ . Предпочтения данного домохозяйства являются строго монотонными относительно потребления в период времени 0. Объем потребления «изначально старого» домохозяйства в период времени 0 обозначается  $d(\sigma_0)$ .

Задача типового домохозяйства в данной модели записывается следующим образом:

$$EU(\sigma_{t+1}) = \sum_{\theta_{t+1} \in S} q_{t+1}(\theta_{t+1} | \sigma_t) \cdot U(c(\sigma_t), d(\sigma_{t+1})) \rightarrow \max_{\left( c(\sigma_t), (d(\sigma_{t+1}))_{\sigma_{t+1} \in \sigma_t^+} \right) \in \mathfrak{R}_+^{1+|S|}} \quad (9)$$

$$c(\sigma_t) + \sum_{\sigma_{t+1} \in \sigma_t^+} I(\sigma_{t+1}) \cdot \frac{d(\sigma_{t+1})}{(1+r(\sigma_{t+1}))} = w(\sigma_t),$$

где  $I(\sigma_{t+1})$  — индикаторная функция. Целевой функцией в задаче (9) выступает «средняя» ожидаемая полезность домохозяйства  $EU(\sigma_{t+1})$ .

*Фирмы.* После реализации очередного производственного шока фирмы решают, какое количество капитала инвестировать. Этот капитал затем используется для производства выпуска в следующем узле дерева событий:

$$\sum_{\sigma_{t+1} \in \sigma_t^+} [I(\sigma_{t+1}) \cdot f(k(\sigma_t), \theta_{t+1})] - (1+r(\sigma_{t+1})) \cdot k(\sigma_t) \rightarrow \max. \quad (10)$$

Из решения задачи (10) определяется  $k^*(\sigma_t)$ :  $r(\sigma_{t+1}) = f'(k(\sigma_t), \theta_{t+1}) - 1$ .

В модели вводятся два важных определения.

1. Пусть задано некоторое начальное количество капитала (на душу населения)  $k_{-1}$ . Тогда допустимым распределением будет называться набор

$$(\bar{c}, \bar{k}) = \left[ d(\sigma_0), (c(\sigma_t), (d(\sigma_{t+1}))_{\sigma_{t+1} \in \sigma^+})_{\sigma_t \in \Gamma}, \left( (k(\sigma_t))_{\sigma_t \in \Gamma}, k_{-1} \right) \right] \text{ такой, что:}$$

$$1) d(\sigma_0) + c(\sigma_0) + k(\sigma_0) = f(k_{-1}, \theta_0);$$

$$2) d(\sigma_{t+1}) + c(\sigma_{t+1}) + k(\sigma_{t+1}) = f(k(\sigma), \theta_{t+1}), \quad \forall \sigma_{t+1} = (\sigma_t, \theta_{t+1}) \in \sigma^+.$$

2. Набор  $(c^*, k^*, r^*, w^*)$  называется конкурентным равновесием в стохастической модели перекрывающихся поколений, если  $c^*$  является решением задачи домохозяйств (9) при определенной доходности  $r^*$  и ставке заработной платы  $w^*$ ; фирмы максимизируют свою прибыль при определенной доходности  $r^*$ ; распределение  $(c^*, k^*)$  является допустимым распределением, т. е. выполняется условие очищения рынков.

### 3.2. Оптимальность по Парето и динамическая эффективность в стохастическом случае

Приведенная выше стохастическая модель перекрывающихся поколений обладает, среди прочего, одной важной особенностью: она дает возможность несколько по-иному взглянуть на проблему динамической эффективности и оптимальности распределения благ между поколениями по Парето.

Идея критерия оптимальности по Парето в стохастическом случае была впервые предложена в работе [20] и состоит в следующем.

Допустимое распределение  $(\bar{c}, \bar{k})$  называется промежуточно оптимальным по Парето, если не существует другого допустимого распределения  $(\hat{c}, \hat{k})$ , такого, что  $\hat{d}(\sigma_0) \geq \bar{d}(\sigma_0)$  и  $EU(\hat{c}) \geq EU(\bar{c})$  для любого  $\sigma \in \Gamma$ , причем хотя бы одно из этих неравенств выполняется как строгое.

Также вводится определение динамической эффективности в стохастическом случае.

Последовательность  $(k(\sigma_t))_{\sigma_t \in \Gamma}$  называется динамически эффективной, если не существует другой последовательности  $(\hat{k}(\sigma_t))_{\sigma_t \in \Gamma}$ , такой, что:

$$1) f(k_{-1}, \theta_0) - \hat{k}(\sigma_0) \geq f(k_{-1}, \theta_0) - k(\sigma_0);$$

$$2) f(\hat{k}(\sigma_t), \theta_t) - \hat{k}(\sigma_{t+1}) \geq f(k(\sigma_t), \theta_t) - k(\sigma_{t+1}), \quad \forall \sigma_{t+1} = (\sigma_t, \theta_{t+1}) \in \sigma^+,$$

причем, по крайней мере, одно из указанных неравенств выполняется как строгое.

Данное определение является логичным продолжением соотношения (6) и дискуссии в подразделе 3.2. Для приведенного определения динамически эффективной последовательности значений капиталовооруженности может быть сформулирован критерий в духе критерия Д. Касса для детерминистического случая. Этот критерий был получен в статье [21] и формулируется следующим образом.

Утверждение 1. Допустимое распределение является динамически неэффективным тогда и только тогда, когда существуют некоторый узел дерева событий

$\tilde{\sigma}_t \in \Gamma$  и некоторая положительная константа  $C > 0$ , такие, что для любой траектории  $\sigma^\infty$  в поддереве  $\Gamma(\tilde{\sigma}_t)$  выполняется следующее условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^t \prod_{l=1}^s r^*(\sigma_s^\infty) \leq C. \quad (11)$$

Нетрудно заметить, что в детерминистическом случае соотношение (11) сводится к соотношению (8) (критерий Д. Касса).

С критерием же промежуточной оптимальности по Парето (англ. — *interim Pareto optimality*) ситуация обстоит сложнее. С одной стороны, поскольку идея проверки распределения потребления (единственного) блага базируется на невозможности перераспределения этого блага между поколениями в целях неухудшения благосостояния каждого из поколений, то в базовой стохастической версии перекрывающихся поколений вводится понятие *схемы трансферов*. С другой стороны, на основе схемы трансферов может быть сформулирован критерий промежуточной оптимальности по Парето, который необходимо в дальнейшем сопоставить с критерием динамической неэффективности.

Начнем с определения схемы трансферов. Для формального введения данного определения требуется сделать несколько комментариев. Во-первых, для указания схемы трансферов предполагается, что все дерево событий  $\Gamma$  может быть разделено на три непересекающихся подмножества: 1) множество узлов  $\Gamma_0$ , где вообще нет трансферов; 2) множество узлов  $\Gamma_+$ , в котором существуют положительные трансферы; 3) множество, состоящее только из одного корневого узла  $\sigma_0$ . Для удобства с корневым узлом ассоциируется трансфер с «весом» единица.

Во-вторых, если с некоторым узлом не ассоциированы трансферы, то они не ассоциированы и со следующими за данным узлом узлами.

В-третьих, что наиболее важно: если с некоторым узлом ассоциирован положительный трансфер, то положительные трансферы ассоциированы и с некоторыми следующими за данным узлом узлами. Таким образом, единожды введенная схема трансферов обязательно наследуется хотя бы в одном из последующих состояний экономики. При этом для удобства считается, что сумма «весов» данных трансферов равна единице.

Теперь можно ввести определение схемы трансферов формально (см. также [19; 22]).

*Схема трансферов — это некоторая функция  $\lambda$ ,  $\lambda: \Gamma \rightarrow [0, 1]$ , обладающая следующими свойствами (условиями). Дерево событий  $\Gamma$  может быть представлено  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_+ \cup \{\sigma_0\}$  ( $\Gamma_+ \neq \emptyset$ ) таким образом, что:*

1.  $\lambda(\sigma_0) = 1$ .
2. Некоторый узел  $\sigma_t \in \Gamma_0$  тогда и только тогда, когда  $\lambda(\sigma_t) = 0$  и любой последующий узел  $\sigma_{t+1} \in \sigma_t^+$  также лежит в  $\Gamma_0$ .
3. Если некоторый узел  $\sigma_t \in \Gamma_+$ , тогда для некоторых последующих узлов выполняется  $\sum_{\sigma_{t+1} \in \sigma_t^+} \lambda(\sigma_{t+1}) = 1$ .

В работах [19] и [22] обосновывается аналог следующего утверждения.

Утверждение 2. В стохастической модели перекрывающихся поколений конкурентное равновесие не является промежуточно оптимальным по Парето тогда и только тогда, когда существует некоторая схема трансферов  $\lambda$  и конечная, строго положительная константа  $B > 0$  такие, что для любой траектории  $\sigma^\infty$  в дереве  $\Gamma$  выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^t \prod_{l=1}^s \lambda(\sigma_s^\infty) \leq B. \quad (12)$$

Из утверждений 1 и 2 следует важный для данного исследования вывод. В случае стохастической модели перекрывающихся поколений из условия динамической неэффективности некоторой траектории развития экономики (экономического роста), вообще говоря, в отличие от детерминистической OLG-модели, не следует Парето-неоптимальность распределения потребления благ между поколениями. Более того, критерий (11) относительно динамической эффективности или неэффективности (избыточного накопления капитала) траектории развития является частным случаем критерия промежуточной Парето-оптимальности распределения благ на этой траектории. Конкретно, два критерия (11) и (12) совпадают, если в качестве трансферов выбираются равновесные доходности основного капитала.

#### 4. Дискуссия и заключение

В настоящей статье рассмотрена проблематика экономического развития в контексте обсуждения эффективности выбранной долгосрочной траектории. Стандартными для анализа эффективности траектории экономического роста являются критерий динамической неэффективности развития (излишнего накопления основного капитала на душу населения) и критерий Парето-оптимальности распределения потребления благ между поколениями.

В случае детерминистической постановки модели перекрывающихся поколений указанные оба критерия совпадают, т.е. за счет решения проблемы динамической неэффективности долгосрочного экономического развития одновременно решается и проблема неоптимальности по Парето распределения потребления благ между поколениями. Соответственно, у государства (социального планировщика) есть непосредственная возможность решать обе эти макрополитические задачи сразу.

В стохастической версии модели перекрывающихся поколений ситуация более сложная. С одной стороны, стохастическая постановка модели позволяет учитывать многообразие вариантов развития экономики и ее динамического поведения (см. [23]). С другой стороны, как обсуждалось выше, в стохастической постановке модели перекрывающихся поколений ситуация динамической неэффективности, согласно соответствующему критерию, вообще говоря, является частным случаем ситуации неоптимальности по Парето распределения потребления благ между поколениями. Таким образом, решение проблемы динамической неэффективности лежит в сфере организации такой схемы трансферов между поколениями, чтобы выплаты совпадали с текущими равновесными доходностями на капитал в каждом интервале времени. К сожалению, решить проблему неоптимальности по Парето распределения потребления за счет решения проблемы динамической неэффективности в условиях стохастической модели, вообще говоря, уже невозможно.

Исследования показывают, что проблема динамической неэффективности долгосрочного экономического развития является весьма серьезной и, к сожалению, плохо проверяемой эмпирически. Изучению даже такой развитой экономики, как экономика США, посвящено сравнительно небольшое количество исследований. При этом сама проблема может стоять достаточно остро: излишнее сбережение, а следовательно, излишнее накопление капитала действительно негативно сказывается на уровне жизни населения страны.

Одним из первых исследований такого рода стала работа Э. Абеля с соавт. [19]. Ключевым результатом, полученным в рамках данной работы, является указание на то, что за период с 1925 по 1985 г. для американской экономики проблема динамической неэффективности не наблюдалась. То же самое, по результатам этого исследования, относится и к экономикам Великобритании, Франции, Германии, Италии, Канады и Японии за период с 1960 по 1984 г. Однако эти результаты получили целый ряд критических замечаний.

Соответственно, в работе М. Барби с соавт. [24] была предпринята попытка применить данные критические замечания к методологии Э. Абеля и других ученых и в этих условиях провести эмпирическую проверку вопроса динамической эффективности долгосрочного развития американской экономики. По результатам исследования был получен вывод о том, что экономика США за период с 1890 по 1999 г. была динамически эффективной, однако вывода о ее Парето-оптимальности получить не удалось. Этот результат напрямую созвучен обсуждаемым в нашей статье вопросам. С одной стороны, как указано выше, критерий динамической эффективности является частным случаем критерия оптимальности по Парето. С другой стороны, не всегда однозначные и конкретные результаты эмпирической проверки этих вопросов указывают на актуальность и необходимость дальнейшего развития данного направления.

## Литература

1. *Diamond P.* National Debt in a Neoclassical Growth Model // *American Economic Review*. 1965. N 55. P. 393–414.
2. *Samuelson P.* An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money // *Journal of Political Economy*. 1958. N 66. P. 467–482.
3. *Bréchet T., Jouvet P.A., Rotillon G.* Tradable Pollution Permits in Dynamic General Equilibrium: Can Optimality and Acceptability be Reconciled? // *Ecological Economics*. 2013. Vol. 91. P. 89–97.
4. *Rausch S.* Fiscal Consolidation and Climate Policy: An Overlapping Generations Perspective // *Energy Economics*. 2013. Vol. 20. P. 23–36.
5. *Balbus L., Reffett K., Woźny L.* Stationary Markovian Equilibrium in Altruistic Stochastic OLG Models with Limited Commitment // *Journal of Mathematical Economics*. 2012. Vol. 48, Is. 2. P. 115–132.
6. *Bishnu M.* Linking Consumption Externalities with Optimal Accumulation of Human and Physical Capital and Intergenerational Transfers // *Journal of Economic Theory*. 2013. Vol. 148, Is. 2. P. 720–742.
7. *Федорова Е. А.* Индикаторы финансового кризиса российского фондового рынка // *Финансы*. 2009. № 6. С. 64–66.
8. *Tirole J.* Asset Bubbles and Overlapping Generations // *Econometrica*. 1985. N 53 (6). P. 1499–1528.
9. *Борисов К. Ю.* О проблеме неопределенности общего экономического равновесия // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика*. 2004. Вып. 1. С. 105–112.
10. *De la Croix, D., Michelle P.* A Theory of Economic Growth. Dynamics and Policy in Overlapping Generations. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
11. *Bruce N., Turnovsky S. J.* Social Security, Growth and Welfare in Overlapping Generations Economies with or without Annuities // *Journal of Public Economics*. 2013. Vol. 101. P. 12–24.

12. *Леви Д.* «Рефрешмент» в модернизации системы лоббирования в Европейском союзе // Политическая экспертиза: ПОЛИТЭКС. 2011. Т. 7, № 3. С. 73–87.
13. *Fehr H., Kallweit M., Kindermann F.* Should Pensions be Progressive? // *European Economic Review*. 2013. Vol. 63. P. 94–116.
14. *Weil P.* Overlapping Generations: The First Jubilee // *Journal of Economic Perspectives*. 2008. N 22(4). P. 115–134.
15. *Bréchet T., Lambrecht S., Prieur F.* Intertemporal Transfers of Emission Quotas in Climate Policies // *Economic Modelling*. 2009. Vol. 26, Is. 1. P. 126–134.
16. *Воронцовский А. В., Гиленко Е. В., Дубянский А. Н., Ефимова Е. Г.* Современная макроэкономика: избранные главы: учебник. М.: РГ-Пресс, 2013.
17. *Acemoglu D.* Introduction to Modern Economic Growth. MIT Press, 2008.
18. *Cass D.* On Capital Overaccumulation in the Aggregative, Neoclassical Model of Economic Growth: a Complete Characterization // *Journal of Economic Theory*. 1972. N 4. P. 200–223.
19. *Abel A., Mankiw N. G., Summers L. H., Zeckhauser R. J.* Assessing Dynamic Efficiency: Theory and Evidence // *Review of Economic Studies*. 1989. N 56. P. 1–20.
20. *Muench T.* Optimality, the Interaction of Spot and Futures Markets and the Nonneutrality of Money in the Lucas Model // *Journal of Economic Theory*. 1977. N 15. P. 325–344.
21. *Zilcha I.* Dynamic Efficiency in Overlapping Generations Models with Stochastic Production // *Journal of Economic Theory*. 1990. N 52. P. 364–379.
22. *Chattopadhyay S., Gottardi P.* Stochastic OLG Models, Market Structure and Optimality // *Journal of Economic Theory*. 1999. N 89. P. 21–67.
23. *Воронцовский А. В., Гиленко Е. В., Петрова Е. В.* Проблемы прогнозирования экономического роста в условиях воздействия внешних шоков // *Финансы и бизнес*. 2013. Вып. 1. С. 23–38.
24. *Barbie M., Hagedorn M., Kaul A.* On the Interaction between Risk Sharing and Capital Accumulation in a Stochastic OLG-model with Production // *Journal of Economic Theory*. 2007. N 137. P. 568–579.

Статья поступила в редакцию 30 сентября 2013 г.