

*Н. Д. Чернышев*

## ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНКОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ ТОВАРОВ

Традиционно высокий уровень конкуренции, характерный для большинства товарных рынков, приводит к тому, что продавцы, работающие на них, прибегают к самым разнообразным маркетинговым стратегиям при позиционировании товаров, их продвижении и т. д. В частности, одной из подобных стратегий, имеющих место на товарных рынках, является осуществление продаж некоторой продукции по повышенной по сравнению с аналогами цене, причем данное увеличение происходит в большей степени за счет транзакционных затрат. Соответствующие товары, продаваемые в рамках описанного подхода, носят название дифференцированных. Они традиционно изучаются на основе подхода, базирующегося на использовании модели Ланкастера [1] и моделей двухальтернативного выбора, где в качестве одного из потребительских качеств выступает марка, «бренд» товара, обладающий своей ценой [2].

С учетом специфики дифференцированных товаров особое внимание может быть также уделено тому, как потребители реагируют на успешность продаж данного товара, и ответным действиям продавца, учитывающим наличие определенной схемы потребительского поведения.

Среди возможных вариантов механизма потребительского реагирования перечислим следующие:

1. Высокий уровень продаж стимулирует покупателей более активно приобретать данный товар (традиционно проявление данного механизма называется эффектом присоединения к большинству — эффект «позитивной памяти»).

2. Низкий уровень продаж стимулирует покупателей более активно приобретать данный товар (обратная предыдущей ситуации) (в экономической науке ее наличие получило название эффекта снобизма — эффект «негативной памяти»).

3. Покупатели нейтральны по отношению к успешности продаж товара, т. е. она не оказывает влияния на их потребительское поведение («независимость динамики продаж»).

В зависимости от того, обладает ли рассматриваемый товар свойством делимости, могут быть использованы различные подходы к моделированию динамики его продаж. В настоящей статье будет рассмотрен вариант, при котором речь идет о продаже партий товаров, со свойством делимости.

В данном случае специфика исследования потребует рассмотрения семейства случайных процессов, для которых будут применимы понятия «позитивная память», «независимость исходов» и «негативная память». Один из классов подобных процессов был введен в научный оборот Б.-Б. Мандельбротом и Дж.-У. Ван Нессом и получил название процессов дробного броуновского движения (ДБД) [3].

---

**Николай Дмитриевич ЧЕРНЫШЕВ** — аспирант кафедры экономической кибернетики экономического факультета СПбГУ. Сфера научных интересов — теория случайных процессов, макроэкономическое моделирование.

© Н. Д. Чернышев, 2012

Ковариация между распределениями значений ДБД в различные моменты времени определяется выражением

$$\text{Cov}(W_t^H; W_s^H) = \sigma^2 (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad (1)$$

характеризующим его динамику и описывающим связь между распределениями процесса в заданные моменты времени.

Из формулы (1) следует, что при  $H = 0,50$  процесс будет представлять собой классическое броуновское движение (КБД) с независимыми приращениями, а при  $H = 1,00$  график процесса будет иметь вид прямой линии, проходящей через точку с координатами  $(1; N(0;1))$ , где  $N(0;1)$  — реализация случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение. В явном виде данные утверждения выводятся из вида функции корреляции между приращениями процесса ДБД в различные моменты времени [4; 5].

$$\rho(t; s) = \text{Cor}(\Delta W_t^H; \Delta W_s^H) = \frac{1}{2} \frac{(1+t+s)^{2H} + 1 - (1-t)^{2H} - (1-s)^{2H}}{(ts)^H}. \quad (2)$$

$$\Delta W_t^H = W_t^H - W_{t-1}^H.$$

Введем дополнительные обозначения для переменных модели. Пусть  $n$  — количество дифференцированных товаров;  $c$  — объем дополнительных транзакционных затрат на единицу продукции;  $p$  — цена единицы товара без учета транзакционных вливаний  $c$ ;  $\tilde{Q}$  — случайная величина, значения которой соответствуют успеху ( $\tilde{Q} = 1$ ) и неудаче ( $\tilde{Q} = 0$ ) при продаже единицы товара;  $q(c)$  — функция вероятности продажи единицы продукции при данной цене  $q(c) = f(c; t) = \text{Pr}(\tilde{Q} = 1 | c; p)$ .

В дальнейших рассуждениях для обеспечения наглядности будем использовать конкретный вид функции  $q(c)$

$$q(c) = \alpha(c) \cdot e^{-\alpha \cdot (p+c)}, \quad (3)$$

причем показатель  $\alpha(c)$  является возрастающей функцией от  $c$ , отражающей прирост вероятности осуществления сделки при дополнительных транзакционных вливаниях. С учетом введенных обозначений динамика продаж товара в простейшем случае может быть описана в следующем виде:

$$\tilde{Q} = n \cdot q(c) (1 + \kappa t), \quad (4)$$

где  $n \cdot q(c)$  — средняя выручка продавца, а  $\kappa$  — темпы ее прироста за период.

Опишем теперь концентрационные эффекты с помощью аппарата процессов ДБД. Будем полагать, что продавец дифференцированной продукции имеет горизонт планирования  $T$ , решение об объеме транзакционных затрат принимается перед началом

осуществления деятельности и позволяет обеспечить некоторый средний уровень продаж, однако также данное решение оказывает влияние на последующую динамику продаж за счет того, что ожидаемый объем продаж в первый период является функцией от  $c$ .

Пусть динамика продаж дифференцированного товара описывается следующим образом:

$$\tilde{Q} = n \cdot q(c)(1 + \kappa t) + \sigma \cdot \tilde{W}_t^H. \quad (5)$$

Случайный процесс  $\tilde{W}_t^H$ , фигурирующий в (5), является процессом ДБД с фиксированным начальным состоянием, которое является функцией от  $c$

$$\tilde{W}_1^H = n \cdot q(c) - n \cdot a = n(q(c) - a). \quad (6)$$

В выражении (6) параметр  $a \in (0; 1)$  отражает потребительские ожидания относительно того, какой объем дифференцированной продукции удастся сбыть ее продавцу в первый период. Последующая динамика процесса  $\tilde{W}_t^H$  будет определяться тем, насколько и в какую сторону отклонились объемы продаж товара от величин, соответствовавших потребительским ожиданиям. Будем считать, что, принимая решение об объеме транзакционных затрат, продавец стремится максимизировать свою ожидаемую выручку за период, ограниченный горизонтом планирования.

В формализованном виде задача продавца имеет вид

$$\sum_{t=1}^T (p + c) n \cdot q(c)(1 + \kappa t) + \sum_{t=1}^T (p + c) n \cdot \sigma \rho(t; 1) t^H (q(c) - a) \rightarrow \max_c. \quad (7)$$

Дифференцируя выражение (7), получаем оптимальное значение величины транзакционных затрат  $c^*$ , причем можно показать, что решение задачи продавца описывается выражениями (8)–(9).

$$P^* = p + c^* = -\frac{q(c)}{q'(c)} + \frac{a \cdot \sigma \xi(H; T)}{q'(c)(1 + \kappa \xi(1; T) + \sigma \xi(H; T))}, \quad (8)$$

где

$$\xi(H; T) = \sum_{t=1}^T \rho(t; 1) t^H = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( (2+t)^{2H} + 1 - (1+t)^{2H} - 2^{2H} \right). \quad (9)$$

Проанализируем вид решения в зависимости от значения показателя  $H$ . При наличии «позитивной памяти» будет выполняться неравенство

$$A(c) = \frac{a \cdot \sigma \xi(H; T)}{q'(c)(1 + \kappa \xi(1; T) + \sigma \xi(H; T))} < 0. \quad (10)$$

Для случая КБД будет иметь место равенство

$$A(c) = \frac{a \cdot \sigma \xi \left( \frac{1}{2}; T \right)}{q'(c) \left( 1 + \kappa \xi(1; T) + \sigma \xi \left( \frac{1}{2}; T \right) \right)} = 0. \quad (11)$$

Аналогично (10), для случая «негативной памяти» верным является неравенство

$$A(c) = \frac{a \cdot \sigma \xi(H; T)}{q'(c) (1 + \kappa \xi(1; T) + \sigma \xi(H; T))} > 0. \quad (12)$$

Таким образом, принимая во внимание различные знаки значений  $A(c)$  в (10) — (12), получаем расчетные цены: с учетом (10) для случая «позитивной памяти»

$$P_{Pos}^* = p + c^* = -\frac{q(c)}{q'(c)} - |A(c)|, \quad (13)$$

при отсутствии эффектов памяти, учитывая (11), имеем

$$P_{Ind}^* = p + c^* = -\frac{q(c)}{q'(c)}, \quad (14)$$

наконец, исходя из (12), цена для ситуации «негативной памяти» определяется

$$P_{Neg}^* = p + c^* = -\frac{q(c)}{q'(c)} + |A(c)|. \quad (15)$$

Из выражений (13)–(15) следует соотношение цен

$$P_{Pos}^* < P_{Ind}^* < P_{Neg}^*. \quad (16)$$

Определим влияние параметра  $\kappa$ , характеризующего скорость роста среднего объема продаж, на полученное решение. При увеличении темпов прироста выручки цена дифференцированного товара будет снижаться, так как продавец будет стремиться прежде всего обеспечить ее максимум в первый период для получения большего потока платежей в следующие периоды и меньше обращать внимания на «стохастическую составляющую» динамики объемов продаж. Низкие же значения показателя  $\kappa$  вынудят продавца дифференцированных товаров расставить приоритеты иным образом и стремиться максимизировать объем выручки за счет высокой цены, а не торгового оборота.

Рассмотрим пример применения модели на данных о продажах бензинов марки АИ-95 и АИ-95 VPower на станциях ООО «Шелл АЗС» в Санкт-Петербурге в период с 1.09.2009 по 28.02.2010 (рисунок).

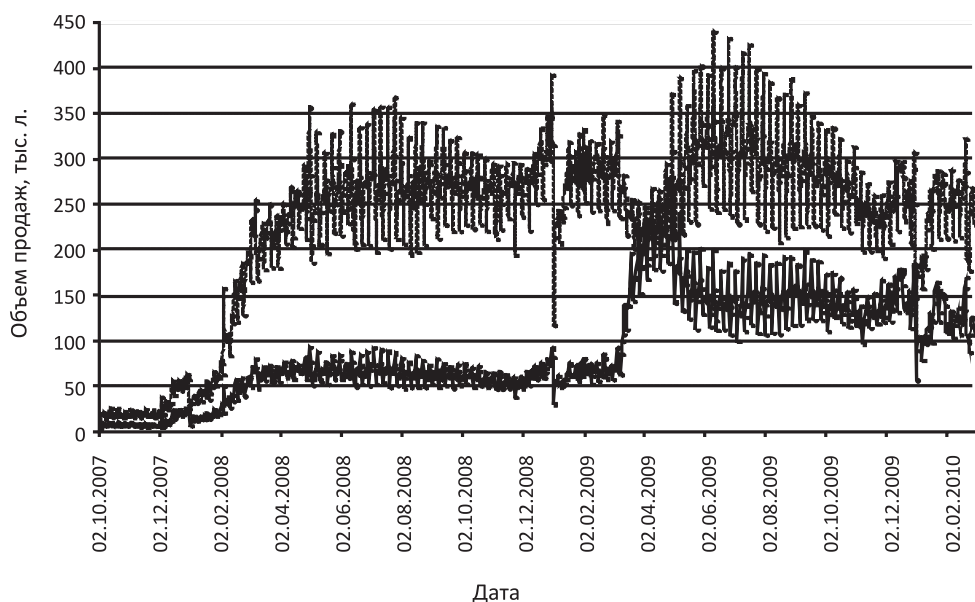


Рис. 1. Динамика продаж бензина марок АИ-95 и АИ-95 VPower в Санкт-Петербурге в период 1.09.2009 — 28.02.2010.

Источник: [6].

Обозначения: - - - объемы продаж бензина АИ-95-Power, — объемы продаж бензина АИ-95.

Данный выбор связан в большей степени именно с «прозрачностью» определения потребительских качеств бензина. Основным их индикатором является октановое число, причем большее октановое число соответствует бензину более высокого качества. Методики определения октанового числа описываются в ГОСТ 8226-82, что обеспечивает, с учетом вышесказанного, возможность получения объективного показателя качества топлива. Рассматривая в данном контексте взаимоотношения бензинов марок АИ-95 и АИ-95 VPower, приходим к заключению, что данные товары, имея одинаковые октановые числа, обладают сходными потребительскими качествами (что следует из регламентированности методики подсчета октанового числа).

Оценка параметров модели, проведенная с помощью пакета EViews 6, позволяет после их подстановки в формулы (8), (9) получить теоретические значения цен, сравнение которых с реальными данными приведено в таблице.

Таблица 1. Сопоставление результатов расчетов с реальными рыночными данными

Даты \ Цены	Теоретические цены	Реальные цены
01.07.08	23,82	27,90
17.08.08	25,36	29,70
20.10.08	23,97	28,70

Как видно из результатов сравнения, цены, получающиеся при использовании модели купли-продажи дифференцированных товаров, получаются ниже, чем реальные рыночные показатели. Возможные объяснения могут дать следующие гипотезы: в течение рассматриваемого периода менялась макроэкономическая конъюнктура — из-за колебаний стоимости нефти уровни цен могли корректироваться, определенное влияние на динамику цен оказывало расширение сети сбыта компании «ООО Шелл АЗС», начавшееся в 2008 г.

Отметим, что в случае рассмотренной модели купли-продажи дифференцированных товаров были получены выводы о том, что при действии эффекта «позитивной памяти» продавец будет устанавливать более низкую цену на продукт, так как по существу часть работы по продвижению товара возьмут на себя потребители, стимулируя своими покупками дальнейший рост продаж.

Для ситуации, когда потребители больше склонны покупать «эксклюзивные» товары, продавец, в соответствии с выводами моделей, будет устанавливать более высокую цену на свои товары в качестве, во-первых, платы за «уникальность» товара, и, во-вторых, компенсации за неэффективность своего функционирования и сравнительно более низкие продажи.

#### Литература

1. *Lancaster K.* A New Approach to Consumer Theory // *Journal of Political Economy*. 1966. N 74. P. 132–157.
2. *Song M.* A Hybrid Discrete Choice Model of Differentiated Product Demand with an Application to Personal Computers. URL: [faculty.chicagobooth.edu](http://faculty.chicagobooth.edu) (дата обращения: 1.12.2011).
3. *Mandelbrot B.-B., Van Ness J.-W.* Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications // *SIAM Review*. 1968. Vol. 10, N 4. P. 422–437.
4. *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable non-Gaussian Random Processes. New York: Chapman & Hall, 1994.
5. *Taqqu M. S., Teverovsky V., Willinger W.* Estimators for long-range dependence: an empirical study // *Fractals*. 1995. Vol. 3, N 4. P. 785–798.
6. URL: <http://www.shell.com.ru> (дата обращения: 1.12.2011).

Статья поступила в редакцию 10 мая 2012 г.