ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.85

П. В. Конюховский

ПРИМЕНЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР ПРИ ОБОСНОВАНИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

В условиях современной экономической ситуации все большую актуальность приобретают исследования, посвященные закономерностям возникновения и последующего развития инвестиционных проектов, предполагающих вложения значительных финансовых и материальных ресурсов. Такие проекты нередко характеризуются достаточно разнообразным составом участников как по масштабам, так и по организационно-правовым формам.

Особое значение за последние годы приобрели проекты, реализуемые в рамках отношений государственного и частного партнерства, а также крупные межгосударственные проекты, предполагающие привлечение разнообразных и разноплановых инвесторов. В традиционных «классических» исследованиях в области инвестиций внимание в первую очередь фокусируется на проблемах их оценивания, а также на вопросах учета факторов риска и неопределенности, объективно существующих на всех стадиях реализации серьезных инвестиционных проектов (мероприятий).

В то же время достаточно интересным для научных исследований является изучение кооперативных эффектов, неизбежно возникающих при формировании и последующем развитии коалиций инвесторов — особенно в тех ситуациях, когда участники данных коалиций имеют отличия не только по организационным или имущественным параметрам, но и по объективно присущим им системам экономических интересов.

В этих случаях весьма актуальными являются математические модели и методы, которые предоставляют возможности для анализа закономерностей возникновения объединений (коалиций) инвесторов.

Достаточно естественной и органичной выглядит идея применения методов теории кооперативных игр в качестве инструментов решения данных задач. Упрощен-

Павел Владимирович КОНЮХОВСКИЙ — д-р экон. наук, профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета СПбГУ. В 1987 г. окончил экономический факультет Ленинградского государственного университета. Д-р экон. наук (2003 г.), профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета СПбГУ (2004 г.). Область научных интересов — теория игр, применение разностных уравнений в моделировании динамики экономических процессов, стохастические модели динамики финансово-экономических показателей. Автор 42 публикаций.

но ситуацию, в рамках которой исследуются возможности объединения инвесторов с целью реализации некоторого крупного инвестиционного проекта, мы можем описать классической кооперативной игрой с трансферабельной полезностью (I, v), где $v(i)$ — полезности (выигрыши, платежи), на которые могут рассчитывать отдельные игроки ($i \in 1 \ldots m$) в ситуации, когда они пытаются действовать по отдельности; $v(S)$ — полезности всевозможных коалиций игроков ($S \subset 2^I$).

Традиционно для наименования значений характеристической функции кооперативной игры используются такие термины, как «платежи», «выигрыши», «полезности» («utilities»). В рамках предлагаемой модели под выигрышами (полезностями) игроков $v(i)$ и коалиций $v(S)$ мы будем понимать суммарные доходы от проектов, доступных им для реализации. При этом считается, что данные величины могут быть приведены к одному моменту времени и соотнесены с сопоставимыми временными периодами. Разумеется, если каким-либо коалициям доступны сразу несколько потенциальных проектов, то в процессе построения характеристической функции должен быть проведен содержательный анализ по выделению наиболее предпочтительного из них. По его параметрам и производится расчет значения характеристической функции $v(S)$.

Использование определения «крупный» в термине «крупный инвестиционный проект» объясняется, в первую очередь, желанием выделить необходимость объединения усилий всех субъектов рассматриваемой экономической подсистемы для его осуществления. Соответственно, в предлагаемой модели полезность полной («большой») коалиции $v(I)$ из всех участников ($I = \{1 \ldots m\}$) совпадает с доходом от реализации данного проекта.

Среди «принципиальных» недостатков данной, безусловно, исключительно теоретичной, ограниченной и примитивной модели может быть особо выделена предпосылка о возможности представления доходов как отдельных участников, так и их разнообразных коалиций в виде детерминированных значений. Более правдоподобным, а следовательно, и более привлекательным выглядит допущение о том, что эти доходы являются случайными величинами $\tilde{v}(S\}$ с некоторыми известными функциями распределения:

$$F_{\tilde{v}(s)}(x) = \mathbf{P}\{\tilde{v}(s) \le x\}.$$

При этом мы приходим к необходимости модификации классических кооперативных игр в направлении учета фактора случайности в значениях их характеристических функций. Таким образом, под *стохастической кооперативной игрой* (СКИ) мы будем понимать пару множеств $\Gamma = (I, \tilde{v})$, где

$I = \{1 \ldots m\}$ — множество участников;

$\tilde{v}(S)$ — случайные величины, имеющие известные плотности распределения $p_{\tilde{v}(s)}(x)$ и интерпретируемые как доходы, получаемые соответствующими коалициями $S \subset I$.

В рамках настоящего подхода отдельный интерес представляют вопросы распространения на стохастические кооперативные игры таких понятий, как «супераддитивность», «выпуклость», «дележ», «решение», «ядро». Обратим внимание на то, что вопросы и задачи, связанные со стохастическими кооперативными играми, рассматривались, например, в работах [1–7]. Однако в рамках настоящей статьи термин «стохастические кооперативные игры» употребляется несколько в ином контексте.

Почти все учебники по кооперативным играм начинаются с определения свойства супераддитивности игр (см., напр. [1; 8; 9]). Под супераддитивными понимаются игры, в которых для любых коалиций S и T выполняется условие

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Другими словами, доход (выигрыш) объединенной коалиции не хуже полезностей ее частей. Вполне естественными и логичными представляются попытки ввода аналогичного термина и для стохастических кооперативных игр. Здесь с учетом того обстоятельства, что $\tilde{v}(S)$ являются случайными величинами, мы получаем, по меньшей мере, два подхода к определению супераддитивности.

Первый из них основывается на использовании математических ожиданий величин $\tilde{v}(S)$. В соответствии с ним игра является супераддитивной, если в ней для любых коалиций $S, T \subset I \; (S \cap T = \varnothing)$ выполняется условие

$$\mathbf{E}\{\tilde{v}(S \cup T)\} \geq \mathbf{E}\{\tilde{v}(S)\} + \mathbf{E}\{\tilde{v}(T)\}. \qquad (1)$$

При такой трактовке супераддитивности происходит замена случайных значений характеристической функции $\tilde{v}(S)$ на их математические ожидания $\mathbf{E}\{\tilde{v}(S)\}$, что, по существу, означает возврат от стохастических кооперативных игр к традиционным детерминированным. Недостатки подобного подхода в первую очередь связаны с тем, что в общем случае математическое ожидание (взвешенное среднее) не является единственной характеристикой случайной величины.

С другой стороны, определение данного термина может быть основано не на математических ожиданиях, а на функциях распределения. При этом игра будет называться *супераддитивной*, если в ней с некоторой вероятностью α для любых коалиций $S, T \subset I \; (S \cap T = \varnothing)$ выполняется условие

$$\mathbf{P}\{\tilde{v}(S \cup T) \geq \tilde{v}(S) + \tilde{v}(T)\} \geq \alpha. \qquad (2)$$

Игру будем называть *строго супераддитивной*, если для нее условие (2) выполняется при любых α.

Очевидно, что выполнение либо невыполнение условия супераддитивности (2) зависит от вида функций распределения случайных величин $\tilde{v}(S), \tilde{v}(T), \tilde{v}(S \cup T)$.

В данной связи следует обратить внимание еще на одно существенное свойство стохастических кооперативных игр. Как известно, классическую кооперативную игру с трансферабельной полезностью называют *несущественной*, если в ней для любой коалиции $S \subset I$:

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(i).$$

В то же время, когда значения характеристической функции игры $\tilde{v}(i)$ являются случайными величинами с некоторыми функциями распределения $F_{\tilde{v}(i)}(x)$, то даже их простое сложение приводит к появлению некоторой новой случайной величины

$\sum_{i\in S}\tilde{v}(i)$ с собственной функцией распределения, возможно, достаточно сложно связанной с функциями распределения $F_{\tilde{v}(i)}(x)$.

На общем уровне для стохастических кооперативных игр выделим следующие принципиальные ситуации, которые могут возникнуть при конструировании их характеристических функций:

- доходы коалиций S и T при их объединении в коалицию $S\cup T$ являются некоторой новой случайной величиной $\tilde{v}(S\cup T)$ с функцией распределения $F_{\tilde{v}(S\cup T)}(x)$, порождаемой «содержательной» спецификой моделируемой ситуации (аналогичную ситуацию мы имеем в случае классических кооперативных игр, когда значения $v(S)$ и $v(T)$, с одной стороны, и $v(S\cup T)$, с другой, считаются экзогенными);
- доход объединенной коалиции $S\cup T$ представляет собой сумму доходов коалиций S и T (ситуация, с содержательной точки зрения представляющая интерес исключительно в контексте кооперативных стохастических игр).

В дальнейшем, для того чтобы различать перечисленные типы характеристических функций, условимся доход объединенной коалиции в первом случае обозначать как $\tilde{v}(S\cup T)$, а во втором — как $\tilde{v}^{+}(S\cup T)$.

Также необходимо отметить, что в ситуации суммирования доходов коалиций при объединении мы, опять-таки, получаем две качественно различные ситуации, а именно:

- случайные величины $\tilde{v}(i)$ (индивидуальные доходы игроков) являются независимыми;
- случайные величины $\tilde{v}(i)$ (индивидуальные доходы игроков) не являются независимыми.

Разумеется, нельзя исключать и возможность существования в игре на альтернативной основе обоих типов формирования коалиций: «полного» объединения, приводящего к качественно новой величине дохода $\tilde{v}(S\cup T)$, либо объединения на уровне договоренности о суммировании доходов $\tilde{v}^{+}(S\cup T)$. При этом возникает достаточно интересная задача сопоставления данных величин. В плане экономического содержания ее можно интерпретировать как проблему исследования целесообразной глубины слияния экономических субъектов, например, речь должна идти о полном поглощении одного предприятия другим либо просто о картельном соглашении между ними.

Рассмотрим более подробно специфику понятия супераддитивности (в смысле определения (2)) для стохастических кооперативных игр. Пусть некоторый игрок i в стохастической игре обладает индивидуальной полезностью (доходом) $\tilde{v}(i)$, а игрок j — полезностью $\tilde{v}(j)$. Тогда для кооперации типа «суммирование полезностей» проверка условия супераддитивности (2) при некотором уровне вероятности α сведется к сопоставлению суммы $(1-\alpha)$–квантилей случайных величин $\tilde{v}(i)$ и $\tilde{v}(j)$ с $(1-\alpha)$–квантилем случайной величины, представляющей собой сумму $\tilde{v}^{+}(i\cup j)=\tilde{v}(i)+\tilde{v}(j)$. Введем обозначения

$$v_{1-\alpha}(i)=F^{-1}_{\tilde{v}(i)}(1-\alpha),\quad F_{\tilde{v}(i)}(x)=\mathbf{P}\{\tilde{v}(i)\le x\},\tag{3}$$

$$v_{1-\alpha}(j)=F^{-1}_{\tilde{v}(j)}(1-\alpha),\quad F_{\tilde{v}(j)}(x)=\mathbf{P}\{\tilde{v}(j)\le x\},\tag{4}$$

$$v^{+}_{1-\alpha}(i \cup j) = F^{-1}_{\tilde{v}^{+}(i\cup j)}(1-\alpha), \quad F_{\tilde{v}^{+}(i\cup j)}(x) = \mathbf{P}\{\tilde{v}(i) + \tilde{v}(j) \le x\}. \tag{5}$$

В содержательном плане величина $v_{1-\alpha}(i)$ представляет собой тот объем полезности, меньше которого игрок i не получит с вероятностью 1 – α (получает меньше с вероятностью α). Если использовать термины современного риск-менеджмента, то $v_{1-\alpha}(i)$ представляет собой не что иное, как VaR (Value At Risk) стохастической величины полезности (дохода) i-го игрока (рис. 1).

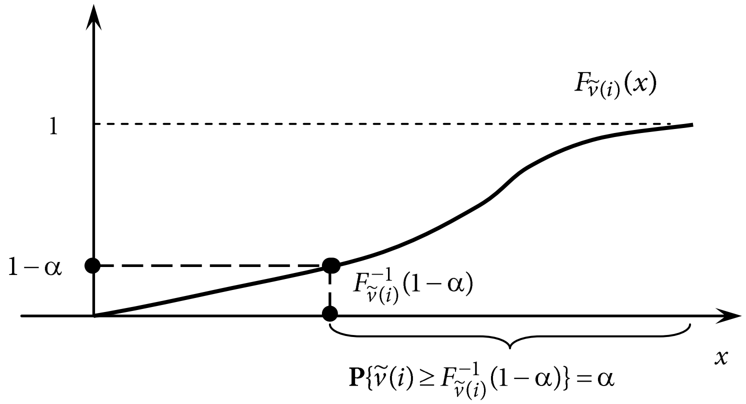

Рис. 1. VaR дохода i-го игрока в стохастической кооперативной игре.

Для иллюстрации возможных исследований супераддитивности в стохастических играх остановимся на некотором качественно важном частном случае, а именно рассмотрим игру, в которой доходы $\tilde{v}(i)$ являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону с параметрами m_i и σ_i^2 $(\tilde{v}(i) \in N(m_i, \sigma_i^2))$. Данное допущение вполне согласуется с объективными экономическими свойствами моделируемых величин, допустимые реализации которых мы можем описывать в виде симметричных интервалов $\pm 3\sigma_i$, расположенных относительно некоторого ожидаемого среднего m_i.

Очевидно, что параметры распределения случайной величины $\tilde{v}^{+}(i \cup j)$ определяются параметрами распределения $\tilde{v}(i)$ и $\tilde{v}(j)$. В случае нормально распределенных индивидуальных доходов мы имеем

$$v_{1-\alpha}(i) = m_i + \sigma_i \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha), \tag{6}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — интеграл Лапласа, соответственно функция распределения для $\tilde{v}(i)$ может быть выражена как

$$F_{\tilde{v}(i)}(x) = \Phi\left(\frac{x - m_i}{\sigma_i}\right). \tag{7}$$

При сделанных предположениях $\tilde{v}^+(i \cup j)$ также имеет нормальное распределение, а именно

$$\tilde{v}^+(i \cup j) \in N\left(m_i + m_j, \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}\right). \tag{8}$$

Тогда

$$v_{1-\alpha}^+(i \cup j) - \left(v_{1-\alpha}(i) + v_{1-\alpha}(j)\right) =$$

$$= \left(m_i + m_j + \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha)\right) - \left(m_i + \sigma_i \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha) + m_j + \sigma_j \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha)\right) =$$

$$= \left(\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} - (\sigma_i + \sigma_j)\right) \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha). \tag{9}$$

С учетом того, что $\sigma_i \geq 0$ и $\sigma_j \geq 0$, имеем

$$\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \leq \sigma_i + \sigma_j \tag{10}$$

или

$$\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} - (\sigma_i + \sigma_j) \leq 0. \tag{11}$$

Таким образом, принимая во внимание, что $\Phi^{-1}(1-\alpha) \leq 0$ при $\alpha \geq 0.5$ и $\Phi^{-1}(1-\alpha) \geq 0$ при $\alpha \leq 0.5$, получаем

$$v_{1-\alpha}^+(i \cup j) \geq v_{1-\alpha}(i) + v_{1-\alpha}(j) \text{ при } \alpha \geq 0.5, \tag{12}$$

$$v_{1-\alpha}^+(i \cup j) \leq v_{1-\alpha}(i) + v_{1-\alpha}(j) \text{ при } \alpha \leq 0.5. \tag{13}$$

Из условия (12), собственно говоря, и следует, что при выполнении гипотезы о распределении по нормальному закону индивидуальных доходов для игроков *i* и *j* у них возникает объективная целесообразность кооперативного поведения в форме суммирования доходов (значений характеристической функции). Эффект от такого объединения (превышение VaR суммы доходов над суммой VaR-ов с уровнем вероятности $\alpha \geq 0.5$)

$$v_{1-\alpha}^+(i \cup j) - \left(v_{1-\alpha}(i) + v_{1-\alpha}(j)\right) = \Phi^{-1}(1-\alpha) \cdot \left[\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} - (\sigma_i + \sigma_j)\right]. \tag{14}$$

Принимая во внимание, что величина $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ для фиксированного уровня α является постоянной, мы приходим к тому, что в формуле (14) величина «эффекта суммирования доходов» определяется сомножителем $\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} - (\sigma_i + \sigma_j)$, непосредственно зависящим от среднеквадратических отклонений σ_i, σ_j: при возрастании σ_i и σ_j, так как $\Phi^{-1}(1-\alpha) \le 0$ при $\alpha \ge 0.5$ $(1-\alpha \le 0.5)$, происходит возрастание $v_{1-\alpha}^{+}(i \cup j) - (v_{1-\alpha}(i) + v_{1-\alpha}(j))$.

Рассмотрим более подробно поведение сомножителя $\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} - (\sigma_i + \sigma_j)$. График поверхности, соответствующей ему при $\sigma_i, \sigma_j \in [0, 10]$, представлен на рис. 2.

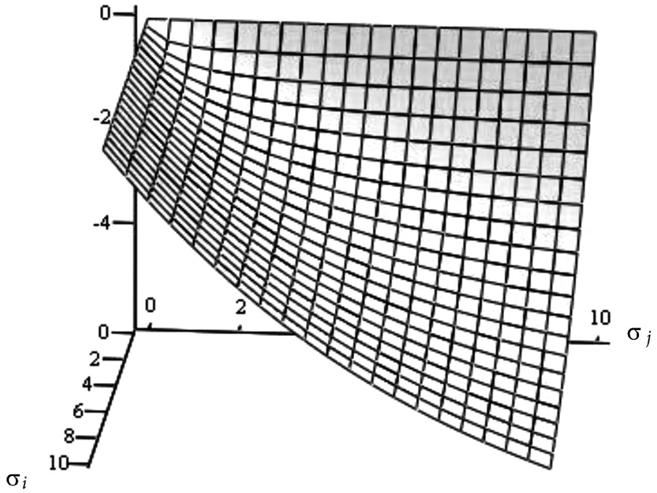

Рис. 2. График поверхности $\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} - (\sigma_i + \sigma_j)$.

Представим $\sigma_j = \lambda \cdot \sigma_i$. При этом без ограничения общности можно считать, что σ_i и σ_j выбираются таким образом, что $\sigma_i < \sigma_j$. Тогда выражение $\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} - (\sigma_i + \sigma_j)$ может быть представлено как функция от λ:

$$\phi(\lambda) = \sigma_i \cdot \left[\sqrt{1+\lambda^2} - (1+\lambda) \right]. \tag{15}$$

При $\lambda \to +\infty$ $\varphi(\lambda) \to -\sigma_i$, так как $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left[\sqrt{1+\lambda^2} - \lambda \right] = 0$. График функции $\varphi(\lambda)$ при $\sigma_i = 1$ представлен на рис. 3.

Таким образом, мы приходим к ряду существенных заключений относительно свойств стохастической кооперативной игры с нормально распределенными индивидуальными полезностями игроков.

Если руководствоваться критерием превышения VaR суммарной полезности над суммой VaR-ов индивидуальных полезностей, то игрок, чья стохастическая индивидуальная полезность $\tilde{v}(j)$ характеризуется большим среднеквадратическим отклонением, вносит «больший вклад» в величину «эффекта сложения полезностей»: $v_{1-\alpha}^{+}(i \cup j) - \left(v_{1-\alpha}(i) + v_{1-\alpha}(j)\right)$.

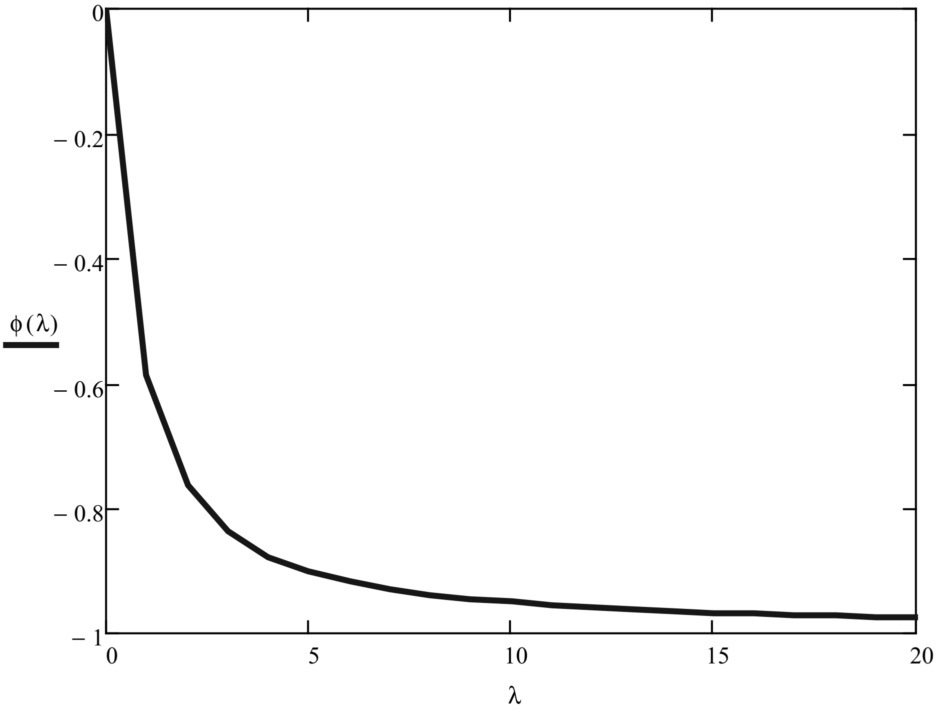

Рис. 3. График функции $\varphi(\lambda)$ при $\sigma_i = 1$.

При возрастании дисперсий индивидуальных полезностей эффект от их суммирования будет снижаться и стремиться к предельному значению $-\Phi^{-1}(1-\alpha)\cdot\sigma_i$, где $\sigma_i = \min\{\sigma_i, \sigma_j\}$.

Несложно заметить, что предложенные подходы достаточно просто могут быть распространены на ситуации, при которых происходит суммирование полезностей произвольного количества игроков $(S \subset I)$:

$$\tilde{v}^{+}(S) = \sum_{i\in S} \tilde{v}(i).$$

При этом выражение для оценки эффекта от суммирования доходов приобретает вид

$$v_{1-\alpha}^{+}(S) - \sum_{i\in S} v_{1-\alpha}(i) = \Phi^{-1}(1-\alpha)\cdot\left[\sqrt{\sum_{i\in S}\sigma_i^2} - \sum_{i\in S}\sigma_i\right]. \qquad (16)$$

Нельзя не признать, что значительная часть задач, возникающих при исследовании свойств стохастических кооперативных игр и их супераддитивности в смысле определения (2), в большей мере относится к теории вероятностей, чем к теории игр. Одновременно следует обратить внимание на то, что на настоящий момент существует относительно небольшое количество работ, посвященных проблемам соотношения квантиля суммы случайных величин и суммы квантилей (среди них, в частности, могут быть названы статьи [10; 11]).

При рассмотрении вопроса о том, что следует понимать под решением стохастической кооперативной игры, мы приходим к необходимости определения понятия дележа для данного класса игр. Логичным и естественным с точки зрения подходов, примененных ранее, выглядит определение в качестве *дележа в стохастической кооперативной игре* вектора $x(\alpha) \in R^m$, удовлетворяющего условиям:

а) индивидуальной рациональности

$$\mathbf{P}\{x_i(\alpha) \geq \tilde{v}(i)\} \geq \alpha \ \left(\text{или } x_i(\alpha) \geq F^{-1}_{\tilde{v}(i)}(\alpha) = v_\alpha(i)\right); \tag{17}$$

b) групповой рациональности игроков

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m} x_i(\alpha) \leq \tilde{v}(I)\right\} \geq \alpha \left(\text{или } \sum_{i=1}^{m} x_i(\alpha) \leq F^{-1}_{\tilde{v}(I)}(\alpha) = v_\alpha(I)\right). \tag{18}$$

Заметим, что определение (17)–(18) можно трактовать как развитие «классических» определений дележей (см., напр. [1; 8; 9]). Обратим внимание на ряд его принципиальных особенностей. Условие (17) по существу означает, что полезность x_i, которую получает i-й игрок в соответствии с дележом $x(\alpha)$, должна быть не меньше его индивидуальной случайной полезности $\tilde{v}(i)$ с вероятностью не меньшей, чем α.

Таким образом, в соответствии с требованием индивидуальной рациональности дележи должны обеспечивать каждому пользователю полезность не меньшую, чем VaR полезности (для выбранного уровня вероятности α).

Условие (18) является обобщением условия групповой рациональности для классических кооперативных игр с трансферабельной полезностью. Как известно, в соответствии с ним дележ должен полностью распределять выигрыш полной («большой») коалиции:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(I).$$

Тогда вполне логичной для случая стохастических игр выглядит трансформация данного условия в требование, в соответствии с которым суммарная полезность, распределяемая дележом, должна не превышать случайной величины выигрыша большой коалиции (с заданным уровнем вероятности α):

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m} x_i(\alpha) \leq \tilde{v}(I)\right\} \geq \alpha.$$

Далее для стохастической кооперативной игры представляется логичным и обоснованным вводить дележ относительно некоторого уровня вероятности α. Другими словами, вектор $x(\alpha_1)$, являющийся дележом для уровня вероятности α_1, вообще говоря, может не быть дележом для уровня $\alpha_2 > \alpha_1$.

Наконец, на стохастические кооперативные игры естественным образом могут быть распространены подходы к определению решений. В частности, под стохастическим C_α -ядром будем понимать множество дележей:

$$C_\alpha(\tilde{v}) = \Big\{x \in R^{|I|} \;\Big|\; \forall S \neq \varnothing, I: \quad \begin{aligned} &\mathbf{P}\{\tilde{v}(S) \leq x(S)\} \geq \alpha; \\ &\mathbf{P}\{\tilde{v}(I) \geq x(I)\} \geq \alpha \Big\}. \end{aligned} \tag{19}$$

В заключение дополнительно подчеркнем, что, несмотря на безусловно абстрактный характер стохастических кооперативных игр как математических объектов и на необходимость существенного упрощения исходных экономических процессов и явлений при построении моделей, использующих данный класс игр, они, на наш взгляд, обладают достаточно высоким прикладным потенциалом. В частности, применительно к сфере реализации крупномасштабных экономических проектов они позволяют находить объяснения причин возникновения у потенциальных участников предпочтений к возникновению одних коалиций и, наоборот, неприятия других объединений, альтернативных по критерию ожидаемого дохода.

Литература

1. *Парилина Е. М.* Устойчивая кооперация в стохастических играх // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2, вып. 3. С. 21–40.
2. *Amir R.* Stochastic games in economics: The lattice-theoretic approach / eds A. Neyman and S. Sorin // Stochastic Games and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2003. Vol. 570. Chapter 29. P. 443–453.
3. *Baranova E. M., Petrosjan L. A.* Cooperative Stochastic Games in Stationary Strategies // Game theory and Applications. Nova Science Publishers. 2006. Vol. 11. P. 7–17.
4. *Dutta P.* A Folk Theorem for Stochastic Games // Journal of Economic Theory. 1995. Vol. 66. P. 1–32.
5. *Haller H., Lagunoff R.* Genericity and Markovian Behavior in Stochastic Games // Econometrica. 2000. Vol. 68, N 5. P. 1231–1248.
6. *Herings P. J.-J., Peeters R. J. A. P.* Stationary Equlibria in Stochastic Games: Structure, Selection, and Computation // Journal of Economic Theory. 2004. Vol. 118, N 1. P. 32–60.
7. *Yeung D. W. K., Petrosyan L. A.* Cooperative Stochastic Differential Games. Springer, 2006.
8. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М., 1991.
9. *Печерский С. Л., Яновская Е. Б.* Кооперативные игры: решения и аксиомы. СПб.: Изд-во Европ. ун-та в С.-Петербурге, 2004.
10. *Liu J., David H. A.* Quantiles of Sums and Expected Values of Ordered Sums // Austral Journal Statist. 1989. Vol. 31 (3). P. 469–474.
11. *Watson R., Gordon L.* On Quantiles of Sums // Austral Journal Statist. 1986. Vol. 28 (2). P. 192–199.

Статья поступила в редакцию 10 сентября 2012 г.