

## ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 330.4+519.7

М. В. Коростелева

**ИМИТАЦИОННЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ  
ВНУТРЕННЕЙ НОРМЫ ДОХОДНОСТИ  
ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА**

Для исследования устойчивости того или иного проекта часто используется такой метод, как анализ чувствительности критериальных показателей (чистой настоящей стоимости, внутренней нормы доходности (*IRR*), индекса прибыльности и др.) к изменениям различных факторов, т. е. переменных, параметров, определяющих значения этих показателей. Предполагается, что надежные оценки значений переменных, особенно на длительный срок, получить невозможно. Поэтому возникают ошибки прогнозов относительно этих значений. В процессе анализа чувствительности (проверки устойчивости) исследуется влияние этих ошибок на соответствующие показатели.

Анализ чувствительности удобно проводить на персональных компьютерах в системе электронных таблиц MS Excel, которые позволяют формировать таблицы исходных массивов характеристик проекта, определять значения критериальных показателей, строить соответствующие графики их поведения в зависимости от изменения основных характеристик проекта [1, с. 218].

Для очень большого класса инвестиционных проектов, *IRR* которых конечна и единственна, т. е. денежные потоки которых являются регулярными, когда первоначальные элементы денежного потока отрицательны, а остальные — положительные, *IRR* будет корректно определять решение о принятии или отклонении проекта. *IRR* проще вычислять, и с практической точки зрения она более понятна и логична: в частности, проект принимается, если его ожидаемая *IRR* превышает скорректированную на риск стоимость капитала проекта. Поэтому мы будем рассматривать анализ чувствительности именно *IRR* к изменению различных факторов.

Анализ чувствительности можно рассматривать в рамках двух подходов к количественной оценке устойчивости.

1. *Аналитический подход.* В основу идеи аналитического подхода положен механизм построения такой формулы, которая в явном виде будет представлять соотношение параметров инвестиционного проекта и значения *IRR*, таким образом можно оценить

---

**Мария Вячеславовна КОРОСТЕЛЕВА** — канд. экон. наук, доцент кафедры экономической кибернетики Экономического факультета СПбГУ. В 1995 г. окончила Экономический факультет СПбГУ, в 2003 г. защитила кандидатскую диссертацию. Неоднократно участвовала в программах повышения квалификации, в том числе за рубежом. Сфера научных интересов — методы оценки риска при принятии инвестиционных решений. Автор более 20 публикаций.

© М. В. Коростелева, 2011

устойчивость проекта, определив, насколько изменится внутренняя норма доходности при изменении значений различных параметров (подробнее об аналитическом подходе см.: [2]).

2. *Имитационный подход.* Данный подход позволяет моделировать различные изменения в параметрах денежного потока, на базе которых проводится оценка устойчивости *IRR* на ЭВМ. Обычно в имитационном подходе используют моделирование пошагового изменения параметров денежного потока проекта и проведение последовательных расчетов *IRR* при небольших изменениях компонент денежного потока и выделение интервалов изменения данных параметров, в пределах которых проект устойчив к изменению параметров в указанных интервалах [3, р. 475]. Однако для того чтобы использовать имитационный подход к анализу чувствительности, необходимо ограничить интервалы значений каждого параметра денежного потока, но это не противоречит действительности, так как процентные ставки, к примеру, не могут быть меньше нуля и бесконечно большие значения они принимать также не могут [4, с. 123]. В действительности в качестве интервалов возможных значений параметров денежного потока можно взять наиболее вероятные: так, например, следует проверять все значения процентных ставок не из максимально возможного интервала, а из более узкого, если этот интервал не будет противоречить ожиданиям инвестора. Такой подход позволяет значительно уменьшить расходы ресурсов, затраты труда, время работы компьютеров и т. д. Также для данного подхода характерна дискретность значения каждого параметра денежного потока, что менее реально, но на практике, например, различия в процентных ставках в 0,001% будут не существенными для анализа ситуации, поэтому можно задать минимальный шаг изменения в 0,1%.

Достоинством имитационного подхода является то, что можно наглядно определить, при каких вариантах развития событий проект останется достаточно выгодным для инвестора.

Ожидаемая внутренняя норма доходности ( $r$ ) инвестиционного проекта с денежным потоком  $(CF_1, \dots, CF_T)$ , где  $CF_t$  — ожидаемая компонента денежного потока в период  $t$ ,  $T$  — ожидаемый плановый период инвестора,  $t = 0, \dots, T$ , определяется путем решения уравнения

$$-CF_0 + \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1+r)^t} = 0, \quad (1)$$

где  $CF_0$  — ожидаемые инвестиционные затраты.

Очевидно, что на самом деле вполне вероятно возникновение ошибок в прогнозах относительно ожидаемых значений параметров, и при осуществлении проекта значения параметров могут отличаться от ожидаемых, что существенно влияет на результирующий показатель. Задавая диапазон изменения параметров, можно вычислить их новые значения. Попытаемся определить влияние изменения значений различных факторов на изменение внутренней нормы доходности путем исследования влияния отклонений новых значений параметров от ожидаемых значений, которые будем считать базовыми.

Предполагая, что переменные в уравнении (1) являются базовыми величинами, запишем это уравнение с использованием новых значений переменных:

$$-CF_0^* + \sum_{t=1}^{T^*} \frac{CF_t^*}{(1+r^*)^t} = 0, \quad (2)$$

где переменные со знаком (\*) являются новыми по сравнению с базовыми величинами.

Точное значение переменной  $r$  для большой величины  $T$  определить из уравнения (1) алгебраическим путем невозможно (подробнее о приближенных методах расчета внутренней нормы доходности см., напр.: [5, с. 450–451]), поэтому будем предполагать, что элементы денежного потока в течение всего срока рассматриваемого проекта меняются с постоянным темпом.

Как в зарубежной, так и в отечественной литературе принято считать, что инвестиционные проекты имеют денежные потоки, компоненты которых увеличиваются с течением времени.

В условиях выхода из финансового кризиса логично предположить, что в отличие от стабильной экономической ситуации компоненты денежного потока, представляющие собой сальдо доходов и расходов по инвестиционному проекту, не будут увеличиваться с течением времени, а, скорее всего, будут снижаться от периода к периоду. Мы будем предполагать, что компоненты денежного потока инвестиционного проекта меняются с постоянным темпом снижения, который мы обозначим через  $d$ .

Проанализируем влияние различия между базовыми и новыми значениями параметров инвестиционного проекта на различие между базовым и новым значением его внутренней нормы доходности в этих условиях.

Для денежного потока с постоянным темпом снижения элементов его базовая компонента  $CF_t$  и новая  $CF_t^*$  могут быть выражены как функции от базового и нового значения компонент денежного потока в 1-й период и базового и нового темпа снижения соответственно:

$$CF_t = CF_1(1 - d)^{t-1}, \quad t = \overline{1, T},$$

$$CF_t^* = CF_1^*(1 - d^*)^{t-1}, \quad t = \overline{1, T},$$

где  $CF_1$  и  $CF_1^*$  — базовое и новое значения компоненты денежного потока в 1-й период соответственно,  $d$  и  $d^*$  — базовое и новое значения темпа снижения компоненты денежного потока за период соответственно, оно постоянно и лежит в отрезке  $[0, 1]$ .

Подставив выражения для компонент денежного потока в уравнения (1) и (2) и преобразовав уравнения, получим

$$-1 + \frac{CF_1}{CF_0} \sum_{t=1}^T \frac{(1 - d)^{t-1}}{(1 + r)^t} = 0, \quad (3)$$

$$-1 + \frac{CF_1^*}{CF_0^*} \sum_{t=1}^T \frac{(1 - d^*)^{t-1}}{(1 + r^*)^t} = 0. \quad (4)$$

Выражения  $\frac{CF_1}{CF_0}$  и  $\frac{CF_1^*}{CF_0^*}$  назовем коэффициентами денежного потока.

Уравнения (3) и (4) являются переформулировками уравнений (1) и (2). В данном случае компоненты денежного потока снижаются год от года с постоянным темпом и являются независимыми от абсолютной величины инвестиционных затрат, в то время как коэффициенты денежного потока представляют собой величину базовой и новой компонент денежного потока в 1-й период относительно инвестиционных затрат.

Обозначим  $k_r$  ошибку в прогнозе значения переменной. Положительная ошибка определяется как такая ошибка, которая дает новое значение большее, чем базовое, т. е.  $k_r > 0$ , если  $r^* > r$ . Отрицательная ошибка — это ошибка, которая дает новое значение меньшее, чем базовое, т. е.  $k_r < 0$ , если  $r^* < r$ .

Экономический смысл ошибок в прогнозах заключается в том, что их возникновение влияет на конечный результат анализа инвестиционного проекта с точки зрения устойчивости его внутренней нормы доходности к изменению различных факторов.

Положительные (отрицательные) ошибки в прогнозе планового периода инвестора и коэффициенте денежного потока приводят к недооценке (переоценке) величины  $T$  и  $CF_1/CF_0$ , однако положительные (отрицательные) ошибки в темпе снижения приводят к переоценке (недооценке)  $d$ .

Определим выражения для ошибок:

$$k_{CF} = \frac{CF_1^*/CF_0^* - CF_1/CF_0}{CF_1/CF_0},$$

$$k_T = \frac{T^* - T}{T},$$

$$k_d = \frac{d^* - d}{d},$$

$$k_r = \frac{r^* - r}{r}.$$

Тогда уравнение (4) можно записать следующим образом:

$$-1 + \frac{CF_1(1 + k_{CF})}{CF_0} \sum_{t=1}^{T(1+k_T)} \frac{[1 - d(1 - k_d)]^{t-1}}{[1 + r(1 + k_r)]^t} = 0. \quad (5)$$

Уравнения (3) и (5) можно использовать для анализа чувствительности  $IRR$  путем имитационного моделирования.

Уравнение (3) может быть использовано для того, чтобы установить уровни  $CF_1/CF_0$ ,  $T$ ,  $d$  и  $r$ . Тогда чувствительность  $IRR$  к ошибкам в этих переменных может быть измерена выбором репрезентативного диапазона выражений процентных ошибок ( $k_{CF}$ ,  $k_T$  и  $k_d$ ) и определением  $k_r$  из уравнения (5). Существует бесконечное множество комбинаций  $CF_1/CF_0$ ,  $T$ ,  $d$  и  $r$ , которые можно анализировать. Мы выберем для ограничения анализа такую, которая является репрезентативной относительно широкого класса инвестиционных проектов, а именно: в качестве репрезентативного диапазона величины планового периода инвестора выберем 5, 10 и 20 лет. В качестве репрезентативных значений темпа снижения выберем 10 и 50%. Большинство инвестиционных проектов имеют  $IRR$ , находящуюся в пределах от 10 до 20%. Этот диапазон и выберем в качестве репрезентативного. Множества нашего анализа описываются следующими (произвольными) выражениями:

$IRR$ : низкая (10%) — высокая (20%);

плановый период инвестора: короткий (5 лет) — средний (10 лет) — длинный (20 лет);

темп снижения: низкий (10%) — высокий (50%).

Например, можно рассмотреть следующий условный инвестиционный проект: основание нового филиала фирмы, занимающейся обследованием гидротехнических сооружений и предоставлением лицензий на их использование. Проект рассчитан на 10 лет ( $T = 10$ ), по истечении которых будет составлен новый инвестиционный проект с учетом изменившейся экономической ситуации. Данный проект предполагает

единовременное вложение 20 тыс. у.е. на начальном этапе, за счет которого происходит открытие филиала. Сюда же добавляются единовременные затраты на покупку оборудования, оформление документов (регистрация, получение лицензии и проч.), затраты на обучение персонала также в размере 20 тыс. у.е. Таким образом, перед началом осуществления деятельности (в нулевой период) необходимо инвестировать 40 тыс. у.е.

Предполагается, что в первый год осуществления проекта будет получен доход от оказания услуг (единицей объема услуг будем считать контракт на обследование гидротехнического сооружения и предоставление лицензии) в размере 126 000 у.е. (заключение 9 контрактов, стоимость одной услуги составляет 14 000 у.е.), а также будут осуществлены расходы, включающие в себя постоянные затраты (аренда помещения, зарплата персоналу, коммунальные расходы, расходы на рекламу, страховка) и переменные затраты (командировочные, расходы на бензин, техническое обслуживание оборудования и автомобиля) в размере 113 200 у.е. Таким образом, сальдо доходов и расходов в первый год осуществления проекта составляет 12 800 у.е., а в дальнейшем предполагается снижение компонент денежного потока с каждым годом на 10%, т.е. в данном случае  $d = 10\%$ . Получим денежный поток (ДП) инвестиционного проекта (у. е.): ДП = (-40 000; 12 800; 11 520; 10 368; 9331; 8398; 7558; 6802; 6122; 5510; 4959).

Используя финансовую функцию ВСД электронных таблиц MS Excel, получаем ожидаемое значение  $IRR$  для данного проекта 20%, т.е. в данном случае  $r = 20\%$ . Значения  $NPV$  инвестиционного проекта для ставок расчетного процента 10%, 14%, 18%, 22% равны 15396,44; 8317,13; 2668,80; -1909,36 соответственно.

Мы представили инвестиционный проект, соответствующий одной из комбинаций  $IRR$ , планового периода инвестора и темпа снижения. Рассмотрение всех возможных комбинаций этих трех параметров дает 12 точек, для которых будем исследовать чувствительность  $IRR$  к ошибкам в прогнозе  $CF_1/CF_0$ ,  $T$ , и  $d$  (например, фиксируя  $r$ ,  $T$  и  $d$ , определяем уровень  $CF_1/CF_0$ ). Теоретически не существует предела диапазона возможных значений ошибок прогноза, но мы выберем для ограничения анализа ошибки в пределах  $\pm 50\%$ . Так, для рассматриваемого нами инвестиционного проекта базовое значение коэффициента  $CF_1/CF_0$  составляет 0,317902. Если предположить, что эксперты ошиблись в прогнозе значения этого коэффициента на  $-50\%$  (это могут быть ошибки в прогнозе относительно либо значения инвестиционных затрат, либо суммы расходов в первый год осуществления проекта, либо заниженная оценка обоих этих показателей), т.е. новое значение этого коэффициента оказывается равным 0,158951, то новое значение  $IRR$  меньше базового более чем на 96%, и проект очевидно оказывается невыгодным. Аналогично можно рассчитать значения отклонений новых значений  $IRR$  от базовых для остальных значений ошибок прогноза и в зависимости от изменения остальных параметров.

Результаты исследования чувствительности для трех из 12 точек представлены в табл. 1, 2, 3, а рис. 1, 2, 3 отражают графическое представление чувствительности  $r$ -ошибок к трем переменным, т.е. отображают результаты компьютерного анализа значений  $k_r$ , получаемых при изменении значений  $k_{CF}$ ,  $k_T$  и  $k_d$  для трех из 12 исследуемых точек ( $T=5$ ,  $d=10\%$ ,  $r=10\%$ ;  $T=10$ ,  $d=10\%$ ,  $r=20\%$ ;  $T=20$ ,  $d=10\%$ ,  $r=20\%$ ).

Таблица 1  
 Результаты компьютерного анализа значений  $k_r$ ,  
 получаемых при изменении значений  $k_{CF}$ ,  $k_T$  и  $k_d$   
 для  $T = 5$ ,  $d = 10\%$ ,  $r = 10\%$

Изменение	$k_{CF}$	$k_d$	$k_T$
-50%	-2,38067	-0,38099	-2,64375
-40%	-1,84404	-0,30239	-1,76303
-30%	-1,34662	-0,22662	-1,12181
-20%	-0,87759	-0,15213	-0,64028
-15%	-0,65193	-0,11	-0,4483
0%	0	0	0
10%	0,415399	0,074267	0,217309
20%	0,819032	0,14918	0,388591
30%	1,212934	0,225052	0,524067
40%	1,59766	0,299487	0,63171
50%	1,976479	0,371167	0,722764

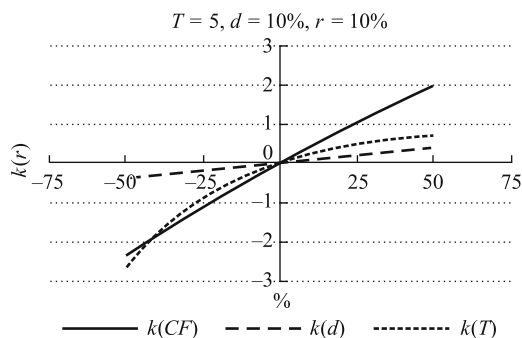


Рис. 1. Результаты компьютерного анализа значений  $k_r$ , получаемых при изменении значений  $k_{CF}$ ,  $k_T$  и  $k_d$  для  $T = 5$ ,  $d = 10\%$ ,  $r = 10\%$ .

Таблица 2  
 Результаты компьютерного анализа значений  $k_r$ ,  
 получаемых при изменении значений  $k_{CF}$ ,  $k_T$  и  $k_d$   
 для  $T = 10$ ,  $d = 10\%$ ,  $r = 20\%$

Изменение	$k_{CF}$	$k_d$	$k_T$
-50%	-0,96335	-0,2374	-0,4866
-40%	-0,75152	-0,18951	-0,29392
-30%	-0,5518	-0,1419	-0,17003
-20%	-0,362	-0,09447	-0,09077
-15%	-0,26941	-0,07074	-0,06102
0%	0	0	0
10%	0,175113	0,047014	0,025478
20%	0,346174	0,093889	0,043646
30%	0,515679	0,140598	0,056925
40%	0,683772	0,187201	0,065188
50%	0,84846	0,233791	0,071793

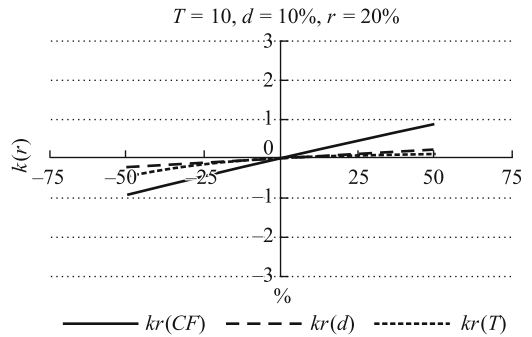


Рис. 2. Результаты компьютерного анализа значений  $k_r$ , получаемых при изменении значений  $k_{CF}$ ,  $k_T$  и  $k_d$  для  $T = 10$ ,  $d = 10\%$ ,  $r = 20\%$ .

Таблица 3  
**Результаты компьютерного анализа значений  $k_r$ ,  
получаемых при изменении значений  $k_{CF}$ ,  $k_T$  и  $k_d$   
для  $T = 20$ ,  $d = 10\%$ ,  $r = 20\%$**

Изменение	$k_{CF}$	$k_d$	$k_T$
-50%	-0,78743	-0,24959	-0,09461
-40%	-0,62318	-0,19944	-0,0478
-30%	-0,46335	-0,14948	-0,02362
-20%	-0,30713	-0,09961	-0,01088
-15%	-0,23014	-0,0759	-0,00678
0%	0	0	0
10%	0,153437	0,051244	0,002339
20%	0,303878	0,099367	0,00464
30%	0,455797	0,148946	0,004015
40%	0,60567	0,198504	0,004507
50%	0,756407	0,248129	0,004914

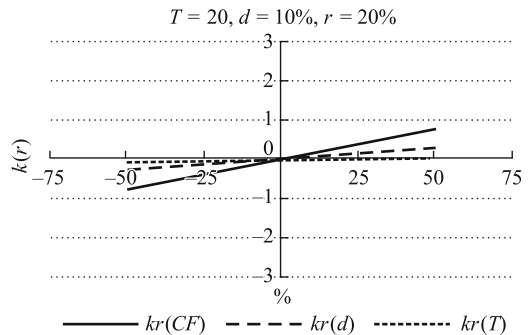


Рис. 3. Результаты компьютерного анализа значений  $k_r$ , получаемых при изменении значений  $k_{CF}$ ,  $k_T$  и  $k_d$  для  $T = 20$ ,  $d = 10\%$ ,  $r = 20\%$ .

### Анализ полученных результатов

При прочих равных условиях и внутри заданного диапазона значений исследуемых параметров анализ чувствительности показал следующее:

1. Чем больше (меньше) величина ошибки прогноза либо  $CF_1/CF_0$ , либо  $T$ , либо  $d$ , тем больше (меньше) получаемая ошибка прогноза  $IRR$ . Этот результат интуитивный, показывающий, что функциональное соотношение между  $k_r$  и каждой

- из трех процентных ошибок является монотонно возрастающим. Однако для проектов с большим плановым периодом соотношение между  $k_r$  и  $k_T$  выравнивается (см. рис. 3).
2. Чем выше (ниже)  $IRR$ , тем менее (более) она чувствительна к ошибкам прогноза  $CF_1/CF_0$ ,  $T$ , и  $d$  (это, а также результат п. 3 ниже можно видеть, сравнив наклоны линий на графиках на рис. 1 и 2 (3)).
  3. Чем выше (ниже)  $IRR$ , тем больше (меньше) ее чувствительность к ошибкам прогноза коэффициента денежного потока и темпа снижения относительно ошибок прогноза планового периода, т.е. с увеличением  $r$  ошибки  $k_{CF}$  и  $k_d$  становятся более важными относительно ошибок в плановом периоде.
  4. Чем длиннее (короче) плановый период, тем меньше (больше) чувствительность  $IRR$  к ошибкам прогноза коэффициента денежного потока и планового периода (это, а также результат п. 5 можно видеть, сравнив наклоны линий на графиках на рис. 1, 2 и 3). Заметим также сильное усиление или эффект рычага ошибок, вызванных в  $r$  отрицательными ошибками в  $CF_1/CF_0$  и  $T$  для краткосрочных проектов.
  5. Чем длиннее (короче) плановый период, тем больше (меньше) чувствительность  $IRR$  к ошибкам прогноза коэффициента денежного потока и темпа снижения относительно ошибок планового периода. Для всех результатов анализа средние и долгосрочных проектов влияние положительных ошибок в том или другом массиве денежного потока является более сильным, чем влияние сопоставимых положительных ошибок в плановом периоде. Это же справедливо для влияния отрицательных ошибок для всех типов долгосрочных проектов.
  6. Чем выше (ниже) темп снижения, тем больше (меньше) чувствительность  $IRR$  к ошибкам прогноза коэффициента денежного потока и темпа снижения, но тем меньше (больше) чувствительность  $IRR$  к ошибкам в плановом периоде.
  7. Чем выше (ниже) темп снижения, тем больше (меньше) чувствительность  $IRR$  к ошибкам прогноза коэффициента денежного потока и темпа снижения относительно ошибок планового периода. Для темпов снижения 30% и более тот или иной вид ошибок прогноза  $k_{CF}$  и  $k_d$  всегда является более критическим, чем ошибки планового периода.

### Выводы

Для большинства случаев, когда ошибки находятся в пределах  $\pm 50\%$ , ошибки в оценивании  $k_{CF}$  и  $k_d$  дают большие ошибки в  $IRR$ , чем ошибки такого же размера в плановом периоде. Однако существуют исключения: когда плановый период равен 10 годам или меньше, ошибки планового периода могут стать доминирующим фактором.

Ошибки  $IRR$  линейно связаны с ошибками  $k_{CF}$  и  $k_d$ , но нелинейно — с ошибками планового периода, следовательно, в то время как равные по модулю положительные и отрицательные ошибки  $k_{CF}$  и  $k_d$  вызывают пропорциональные положительные и отрицательные ошибки  $IRR$ , это не выполняется для ошибок планового периода: такие ошибки имеют более ярко выраженную отрицательную сторону, т.е.  $IRR$  более чувствительна к нижним значениям ошибок, чем к верхним.

Проекты с относительно более высокой ожидаемой  $IRR$  менее чувствительны к ошибкам  $k_{CF}$ ,  $k_T$  и  $k_d$ , чем проекты с относительно низкой ожидаемой  $IRR$ .

При прочих равных условиях самыми большими ошибки  $IRR$  оказываются в случае краткосрочных проектов.



Проведенный анализ обеспечивает некоторую основу для оценивания влияния, которое ошибки прогноза параметров, используемых в финансовом планировании, имеют на получаемую *IRR*. Анализ также показывает, в каком месте необходимо ставить акценты при оценивании таких параметров.

## Литература

1. *Воронцовский А. В.* Инвестиции и финансирование: методы оценки и обоснования. СПб., 2003.
2. *Коростелева М. В.* Некоторые методы анализа чувствительности внутренней нормы доходности инвестиционного проекта // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика.* 2007. Вып. 3. С. 145–152.
3. *Weston J. E., Copeland T. E.* *Managerial Finance.* Orlando: The Dryden Press, 1989.
4. *Воронцовский А. В.* Управление рисками. СПб., 2005.
5. *Ковалев В. В.* Введение в финансовый менеджмент. М., 2005.

Статья поступила в редакцию 31 марта 2011 г.