УДК 519.86

Вестник СПбГУ. Сер. 5. 2011. Вып. 3

В.К.Тютюкин

ФОРМИРОВАНИЕ СБАЛАНСИРОВАННЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ОПЕРАЦИЙ

Однопредметное производство в промышленности осуществляется обычно поточными методами, т.е. на однопредметных поточных линиях (ОПЛ). При этом целесообразно превратить их в непрерывные линии (ОНПЛ), ибо это способствует снижению издержек производства, а следовательно, и повышению эффективности работы фирмы в целом. Для такого превращения необходимо сбалансировать (синхронизировать) выполняемые на ОПЛ производственные операции, т.е. добиться кратности их трудоемкостей ритму (такту) работы линии.

Первоначально эта задача ставилась только для сборочной стадии производства (т.е. для сборочных ОПЛ и участков) [1–5]. Получение удовлетворительного решения для нее проще, чем для обрабатывающей стадии ввиду следующих ее особенностей. Сборочные операции выполняются в основном вручную. При этом используются инструмент и приспособления, т.е. специальная технологическая оснастка. Оборудование (станки) или вообще не привлекается, или привлекается незначительно. Таким образом, структура штучного времени операции на сборке такова, что оно состоит целиком из ручных работ.

Весь технологический процесс сборки предмета может быть расчленен на отдельные элементарные части (трудовые приемы). Степень расчленения этого процесса зависит от выбранной величины ритма r, а именно: чем меньше эта величина, тем в большей степени расчленяется процесс на отдельные составные части, и наоборот. Для ручных работ эти части могут быть довольно мелкими (для машинных работ дробление их на мелкие части невозможно). Полученные таким образом части технологического процесса, не подлежащие дальнейшему расчленению (отдельные элементарные трудовые приемы или их группы), называются технологическими переходами или, короче, *переходами*.

В дальнейшем было предложено рассматривать названную задачу и для обрабатывающей стадии производства, т.е. для ОПЛ в механических цехах [6]. Здесь уже, в отличие от сборочной стадии, преобладает станочный труд и поэтому роль переходов играют технологические операции. Они являются неделимыми, достаточно крупными и трудоемкими частями производственного процесса, что и затрудняет формирование сбалансированных групп технологических операций.

Виктор Константинович ТЮТЮКИН — д-р экон. наук, профессор кафедры экономической кибернетики Экономического факультета СПбГУ, профессор Международной высшей школы экономики (МВШУ) при СПбГПУ. Окончил Математико-механический факультет ЛГУ (1964) и аспирантуру кафедры экономической кибернетики ЛГУ (1972). В Университете работает с 1965 г. Кандидатскую диссертацию защитил в 1973 г., докторскую — в 1989 г. Стажировался в университетах Франции (1976). Область научных интересов — производственный менеджмент, гибкие автоматизированные производства, микроэкономика. Автор около 50 научных публикаций, в том числе одного учебного пособия с грифом Министерства (в соавторстве) и одной монографии.

В случае применения здесь специализированных станков, т.е. таких, на каждом из которых выполняется только одна («своя») операция, формирование сбалансированных операций (превращение ОПЛ в ОНПЛ), как правило, невозможно: решение по алгоритму для сборочной стадии является неудовлетворительным из-за больших значений так называемых «остаточных трудоемкостей» (их определение см. ниже).

Передовые фирмы в современных производственных условиях используют в механических цехах (в частности, в роботизированных комплексах) универсальные станки, например с ЧПУ или типа «обрабатывающий центр» [7; 8]. Большие простои такой дорогостоящей техники (единица ее стоит примерно 60 тыс. долл.) являются крайне нежелательными. На таких станках могут последовательно выполняться разнообразные технологические операции (токарные, фрезерные и т.п.) за счет наличия у них целого магазина разнообразных инструментов (резцов, сверл и т.п.). В таких условиях «остаточные трудоемкости» являются уже достаточно мелкими (как и на сборочной стадии производства). Это и позволяет использовать для данной ситуации модель и алгоритм, разработанные для сборочной стадии производства, и тем самым показать их достаточную универсальность.

В настоящей статье разработана соответствующая модификация понятий для указанной новой производственной ситуации и предложена обобщенная, универсальная экономико-математическая модель указанной задачи и изложен корректный метод ее решения.

Изложение осуществим в терминах, для определенности, сборочной стадии производства, указав лишь необходимую корректировку понятий для обрабатывающей стадии производства.

Исходные данные, параметры ОПЛ и ограничения на них

N — программа выпуска (количество экземпляров) предмета за плановый период $T_{пл}$ ($T_{пл}$ = 1 год); Φ — эффективный (действительный, полезный) фонд времени (каждой единицы оборудования) за $T_{пл}$ (мин); m — количество технологических (основных) операций (в дальнейшем будем рассматривать только их и поэтому называть их для краткости операциями), выполняемых на линии (i — номер операции, $i = 1{:}\ m$); I — множество всех этих операций ($I = \{1, 2, \ldots, i, \ldots, m\}$); a_i — трудоемкость (нормативная) выполнения i-й операции одного предмета, т.е. штучная трудоемкость, принимаемая и за фактическое время выполнения операции, мин ($i = 1{:}\ m$); r — штучный ритм линии, т.е. любой ее операции (сквозной параметр линии, увязывающий все операции с разной трудоемкостью); c_i — количество рабочих мест-дублеров на i-й операции ($i = 1{:}\ m$). Если ОПЛ еще только проектируется, то эти ее параметры являются неизвестными.

Для выполнимости заданной программы выпуска предмета (N) за плановый период ($T_{пл}$) необходимо, чтобы параметры ОПЛ удовлетворяли следующим ограничениям [9, с. 135]:

$$N r \leq \Phi, \tag{1}$$

$$c_i r \geq a_i \ (i = 1{:}\ m). \tag{2}$$

Заметим, что при рассмотрении задачи для обрабатывающей стадии производства указанные выше для сборки параметры будут иметь следующий смысл: m — количество рабочих позиций (i — номер рабочей позиции, i = 1: m); I — множество всех этих рабочих позиций ($I = \{1, 2, \ldots, i, \ldots, m\}$); a_i — трудоемкость (нормативная) выполнения группы операций на i-й рабочей позиции одного предмета (суммарная трудоемкость всех технологических операций, попавших в эту группу), т.е. штучная трудоемкость, принимаемая и за фактическое время выполнения этой группы операций, мин (i = 1: m); c_i по-прежнему есть количество рабочих мест-дублеров (универсальных станков) на i-й рабочей позиции (i = 1: m). Синхронность групп операций означает, как отмечено выше, что все неравенства (2) выполняются как равенства: $c_i r = a_i$ (i = 1: m), или, другими словами, трудоемкость любой группы операций кратна ритму ($a_i \vdots r$, i = 1: m), т.е. делится на него нацело (отношения a_i / c_i, i = 1: m являются натуральными числами).

Задача синхронизации сборочных операций на ОПЛ

Эта задача является одной из производственных задач в товарной концепции, лежащей в основе производственного менеджмента.

Выберем одно из решений системы неравенств (1), (2) с учетом некоторой целевой функции (ЦФ) для сборочной стадии производства. Известным считаем штучный ритм r ($0 < r \le r^{max}$, где $r^{max} = Ф/N$ — наибольшее допустимо возможное значение ритма), а искомыми — значения всех остальных параметров: m, a_i, c_i (i = 1: m).

Постановка задачи. *Исходные данные задачи.* Задан, как отмечено выше, штучный ритм r ($0 < r \le r^{max}$). Пусть при этом ритме в результате расчленения технологического процесса получилось, что для сборки предмета (каждого его экземпляра) необходимо выполнить n переходов (j = 1 : n). Для каждого перехода определяется необходимая для его выполнения оснастка (инструмент, приспособления), а иногда и оборудование, и на основе этого — нормативная трудоемкость (мин) t_j выполнения (целиком вручную) j-го перехода (j =1 : n) (на обрабатывающей стадии это трудоемкость j-й операции). Задается технологический процесс (схема) сборки предмета, т.е. технологические взаимосвязи переходов. Эта схема может быть простой (когда все переходы строго упорядочены, образуют цепочку) или сложной (когда переходы лишь частично упорядочены, образуют граф без контуров, пример которого приведен на рис. 1, n = 13).

Вербальная формулировка задачи. Ограничениями на формирование операций (агрегирование переходов в операции) являются следующие.

1. Любой переход должен быть назначен только в одну какую-либо операцию.

2. Распределение переходов по операциям должно не противоречить заданной схеме сборки предмета.

Это означает, что если согласно схеме сборки какой-либо переход должен выполняться после другого перехода, то в результате агрегирования переходов в операции должно быть то же самое. Так, например, в случае технологии сборки в виде графа на рис. 1 нельзя назначить в одну операцию переходы 1, 5 и 12.

3. Слишком много переходов (тем более все) нельзя назначать в одну операцию.

Это ограничение вызвано тем, что на линии желательно иметь некоторую специализацию рабочих-сборщиков, т.е. разбить весь технологический процесс сборки на несколько операций, пойдя при этом, возможно, на некоторое увеличение количества рабочих мест на линии и, соответственно, суммарного их простоя. Учет этих ограничений осуществим в следующей форме: для всех переходов j определим «остаточную трудоемкость» t'_j следующим образом: $t'_j = t_j - [t_j / r]\, r = \{t_j / r\} r$, где символы $[x]$ и $\{x\}$ означают, соответственно, целую и дробную части числа x. Так как $\{x\}<1$ для $\forall x$, то $t'_j < r$. Тогда потребуем, чтобы сумма остаточных трудоемкостей всех назначаемых в любую операцию переходов не превосходила ритма линии.

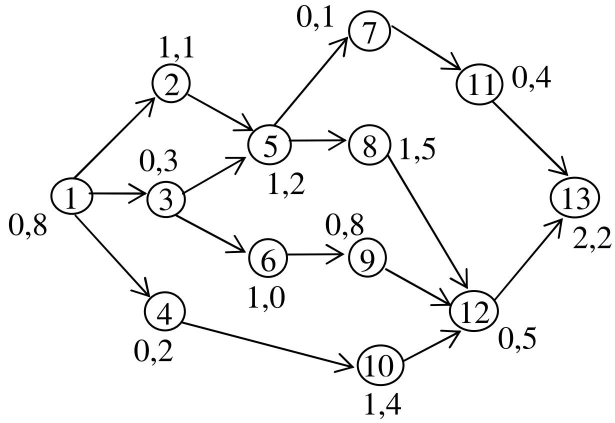


Рис. 1. Схема сборки и трудоемкости переходов
(в кружках — номера переходов, рядом — трудоемкости).

ЦФ (критерием) формирования операций является, как отмечено выше, их синхронность (т.е. кратность их трудоемкостей ритму линии). Таким образом, встает вопрос об измерении (т.е. введении некоторого уровня) синхронности. Для его решения заметим, что синхронность (максимальная, полная) равносильна отсутствию (минимальности, нулевым значениям) простоев всех рабочих мест (это имеет место на ОНПЛ). Таким образом, зависимость между ними естественно принять обратной: чем меньше суммарные простои рабочих мест, тем выше уровень синхронности операций. Итак, уровень синхронности операций будем охарактеризовывать этим косвенным способом, т.е. с помощью суммарного простоя рабочих мест (аналогично оценке уровня ритмичности с помощью периода оборота). Этот простой является одинаковым в каждом ритме. Достаточно рассматривать простой только за один ритм и соответствующую его величину принять в качестве ЦФ задачи.

Такая ЦФ одновременно позволяет, как будет показано ниже, уменьшить количество рабочих мест (в частности, оборудования, станков) и, следовательно, повысить их загрузку.

В результате формирования операций выявится их количество — m и трудоемкость каждой из них (как суммарная трудоемкость переходов, попавших в каждую из них) — a_i (i =1: m). Количество же рабочих мест на операциях (c_i , i =1: m) определим вне модели как минимально возможные, удовлетворяющие неравенствам (2) (ибо их суммарные простои, согласно ЦФ, должны быть минимальными), т.е. положим $c_i =]a_i / r[$ (i =1: m).

В случае *простой* схемы сборки имеем следующее достаточно очевидное решение задачи. Для формирования операции 1 накапливаем переходы подряд (чтобы не нарушать схему сборки) до тех пор, пока сумма их остаточных трудоемкостей не превосходит величины ритма r (она должна быть как можно ближе к r по недостатку), т.е. находим такое натуральное число n_1, что $t_1^{'} + ... + t_{n_1}^{'} \le r$, а $t_1^{'} + ... + t_{n_1}^{'} + t_{n_1+1}^{'} > r$. Аналогично формируем операцию 2 (находим соответствующее n_2) и все последующие операции. Результат решения показан на рис. 2. В результате будут определены величины m, a_i ($a_i = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} t_j$, $n_0 = 0$) и c_i ($c_i =]\ a_i / r\ [$), $i = 1{:}\ m$.

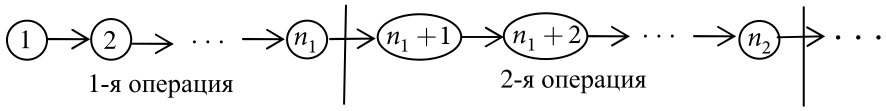


Рис. 2. Формирование операций при простой схеме сборки.

В случае *сложной* схемы сборки решение задачи уже не является очевидным. Для этого случая построим соответствующую экономико-математическую модель (ЭММ) и найдем для нее приближенное решение.

Экономико-математическая модель. Для построения этой модели сначала введем искомые переменные и сформируем ограничения на них.

y — количество операций на ОПЛ:

$$y = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

x_{ij} — индикатор, показывающий, включается или нет в i-ю операцию j-й переход (булевы переменные):

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \ (i = 1 : y\,, j = 1 : n)\,. \qquad (4)$$

$x_{ij} = 1$ означает утвердительный ответ (да, назначается j-й переход в i-ю операцию), $x_{ij} = 0$ — отрицательный ответ (нет, не назначается, т.е. противный случай).

Сформируем другие ограничения на введенные переменные, а именно вербально описанные выше в постановке задачи.

Назначение любого (j-го) перехода только в одну какую-либо операцию формализуется в виде следующего ограничения:

$$\sum_{i=1}^{y} x_{ij} = 1 \ \ (j = 1 : n)\,. \qquad (5)$$

Это означает, что в каждом столбце матрицы $\| x_{ij} \|$ имеется только одна единица.

Требования по соблюдению схемы сборки при распределении переходов по операциям трудно выразить аналитически (для возможности такого выражения необходимо формальное описание графа, задающего схему сборки, чего нет в наших исходных данных). Поэтому их не будем формализовывать, но учтем непосредственно в алгоритме формирования операций.

Требование по непревышению ритма линии для суммы остаточных трудоемкостей всех переходов, назначаемых в операцию, формализуется неравенством $\sum_{j=1}^{n} t'_j x_{ij} \le r$ $(i = 1{:}\, y)$ или, после выбрасывания нулевых слагаемых, т. е. с учетом того, что $x_{ij} = 1$ или 0, и замены выражения для остаточной трудоемкости перехода через его полную трудоемкость, т. е. с учетом равенства $t'_j = \{t_j / r\} r$ в его левой части, следующим неравенством:

$$\sum_{j: x_{ij}=1} \{t_j / r\} \le 1 \ (i = 1 : y) \,. \tag{6}$$

Из ограничения (6) следует, что в каждой строке матрицы $\| x_{ij} \|$ должно быть не слишком много единиц.

Заметим, что если неравенство (6) реализуется как строгое (<), то оно равносильно следующему равенству:

$$\left\{ \sum_{j: x_{ij}=1} (t_j / r) \right\} \sum_{j: x_{ij}=1} \{t_j / r\} \,,$$

т. е. реализации неравенства ($\le$) в известном свойстве о том, что дробная часть суммы не превосходит суммы дробных частей как равенства (=). Это равенство означает, по существу, совпадение остаточной трудоемкости операции (определяемой аналогично остаточной трудоемкости перехода, т. е. следующим образом: $a'_i = \{a_i / r\} r$) с суммой остаточных трудоемкостей переходов, образующих эту операцию, что получается после домножения обеих частей этого равенства на *r*.

Далее найдем выражение для ЦФ задачи.

Так как эта функция характеризует рабочие места (их суммарные простои за один ритм), то введем временно следующие неизвестные: z_i — количество рабочих мест на *i*-й операции (*i* = 1 : *y*). Тогда для ЦФ имеем выражение $r \sum_{i=1}^{y} z_i - \sum_{j=1}^{n} t_j$. Из него видно, что минимизация суммарных простоев (рабочих мест на линии) равносильна задачам: 1) максимизации коэффициента загрузки линии ($\zeta \to$ max), для которого имеем выражение $\zeta = \sum_{j=1}^{n} t_j / r \sum_{i=1}^{y} z_i$; 2) минимизации суммарного количества рабочих мест на линии ($\sum_{i=1}^{y} z_i \to$ min).

Из второй из этих двух задач следует, что значения z_i должны быть выбраны минимально возможными, удовлетворяющими неравенствам (2):

$$z_i = \left] \left(\sum_{j: x_{ij}=1} t_j \right) / r \right[\ (i = 1 : y).$$

Таким образом, эти неизвестные действительно можно не включать в список неизвестных, ибо их значения являются, как видно из последней формулы, следствием введенных выше неизвестных x_{ij} и y. Избавимся от них в ЦФ. Для этого преобразуем выражение для z_i, прежде всего поделив на r каждое слагаемое в имеющейся в нем суммы:

$$z_i =]\sum_{j:x_{ij}=1}(t_j/r)[=]\sum_{j:x_{ij}=1}([t_j/r]+\{t_j/r\})[= \sum_{j:x_{ij}=1}[t_j/r]+]\sum_{j:x_{ij}=1}\{t_j/r\}[=$$

$$\sum_{j:x_{ij}=1}[t_j/r]+1 \ (i=1:y).$$

В этой цепочке равенств предпоследнее из них справедливо в силу того, что целое число можно выносить из-под знака округления, а последнее — в силу ограничения (6). Как видно из последнего выражения в этой цепочке равенств, под каждый ритм, входящий в трудоемкость любого перехода, выделяется самостоятельное рабочее место, а под все остаточные трудоемкости переходов, включаемых в ту или иную операцию, выделяется еще одно (дополнительное) рабочее место.

Так как в ЦФ входит $\sum_{i=1}^{y} z_i$, то преобразуем эту сумму с учетом полученного выражения для z_i:

$$\sum_{i=1}^{y} z_i = \sum_{i=1}^{y}(\sum_{j:x_{ij}=1}[t_j/r]+1) = \sum_{i=1}^{y}\sum_{j=1}^{n}[t_j/r]x_{ij} + y =$$

$$\sum_{j=1}^{n}[t_j/r]\sum_{i=1}^{y} x_{ij} + y = \sum_{j=1}^{n}[t_j/r] + y\,.$$

В этой цепочке равенств последнее из них получено с учетом условия (5).

Подставляем полученное выражение для $\sum_{i=1}^{y} z_i$ в первоначальное выражение для ЦФ и преобразуем его дальше:

$$r\left(\sum_{j=1}^{n}[t_j/r]+y\right)-\sum_{j=1}^{n}t_j = ry-\sum_{j=1}^{n}(t_j-[t_j/r]r) = ry-\sum_{j=1}^{n}t_j' \,.$$

Из последнего выражения в этой цепочке равенств, обозначив через t' сумму остаточных трудоемкостей всех переходов ($t' = \sum_{j=1}^{n} t_j'$), получим следующий вид ЦФ:

$$ry - t' \,. \tag{7}$$

Таким образом, в ней мы избавились от временных переменных $z_i \ (i=1:y)$ и получили ее выражение через переменную y (в виде линейной функции). Из него можно сделать два следующих вывода.

1. Задача $ry - t' \to \min$ равносильна задаче $y \to \min$.

Это вытекает из того, что у прямой (7) угловой коэффициент положителен ($r > 0$), а свободный член является постоянной величиной ($t' = \text{const}$), не влияющей, следовательно, на оптимизацию.

2. Ввиду неотрицательности ЦФ ($ry - t' \geq 0$) имеем оценку снизу для искомого количества операций: $y \geq \ ]\ t'/r\ [$. Из нее получается следующее достаточное условие оптимальности: если для какого-либо допустимого распределения переходов по операциям окажется, что $y = \ ]\ t'/r\ [$ (т.е. указанная оценка снизу реализуется), то оно является оптимальным.

Полученная ЭММ (3)–(7) в математическом программировании относится к классу задач целочисленного программирования (линейной она не является, поскольку неизвестное y входит в предел суммирования в ограничении (5)). По существу задача относится к экстремальным комбинаторным. Искусственно же она сформулирована в виде задачи математического программирования. Ввиду недостаточной разработанности решения таких задач приходится решать их лишь приближенно. Рассмотрим один из таких методов.

Алгоритм приближенного решения. Этот алгоритм предложен немецким организатором производства Кляйном и является аналогичным рассмотренному выше алгоритму для простой схемы сборки, обобщает его.

Предварительный этап осуществляется за несколько следующих шагов, на которых выполняются некоторые подготовительные действия.

Шаг 1. Составляем так называемую *матрицу следования* переходов $||\alpha_{kj}||$ — квадратную матрицу порядка n, элементами которой являются числа 1 и 0. Элементы этой матрицы определяются следующим образом:

$$\alpha_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \succ j \text{ (} k \text{ следует или совпадает с } j\text{)}, \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Как видно, для построения матрицы следования должен быть использован заданный граф. На главной ее диагонали стоят, очевидно, единицы. Кроме того, заметим, что она является нижней треугольной (т.е. ее элементы выше главной диагонали равны нулю), если переходы в графе (схеме сборки) занумерованы естественным образом — слева направо, и, следовательно, любая стрелка в нем направлена от перехода с меньшим номером к переходу с бóльшим номером (хотя нумерация переходов может быть произвольной в общем случае).

Заметим, что в случае простой схемы сборки рассматриваемая нижняя треугольная матрица состоит целиком из единиц (и поэтому ее не надо было строить).

Шаг 2. Определяем остаточные трудоемкости всех переходов ($t'_k,\ k = 1:n$). Затем находим «вес» каждого перехода, т.е. сумму остаточных трудоемкостей этого перехода и всех следующих за ним. Как видно, для этого удобно использовать матрицу следования, найденную на предыдущем шаге. Именно, обозначив через p_j ($j = 1 : n$) веса переходов, для их нахождения имеем выражение (в матричной форме)

$$(t'_1,...,t'_k,...,t'_n)||\alpha_{kj}|| = (p_1,...,p_j,...,p_n).$$

В скалярной форме оно записывается в виде системы равенств:

$$p_j = \sum_{k=1}^{n} t'_k \alpha_{kj} = \sum_{k:\alpha_{kj}=1} t'_k \quad (j = 1 : n).$$

Таким образом, для нахождения p_j просматриваем j-й ($1 \le j \le n$) столбец матрицы $||\alpha_{kj}||$ и для тех его строк k, в которых стоят единицы, берем соответствующие t'_k.

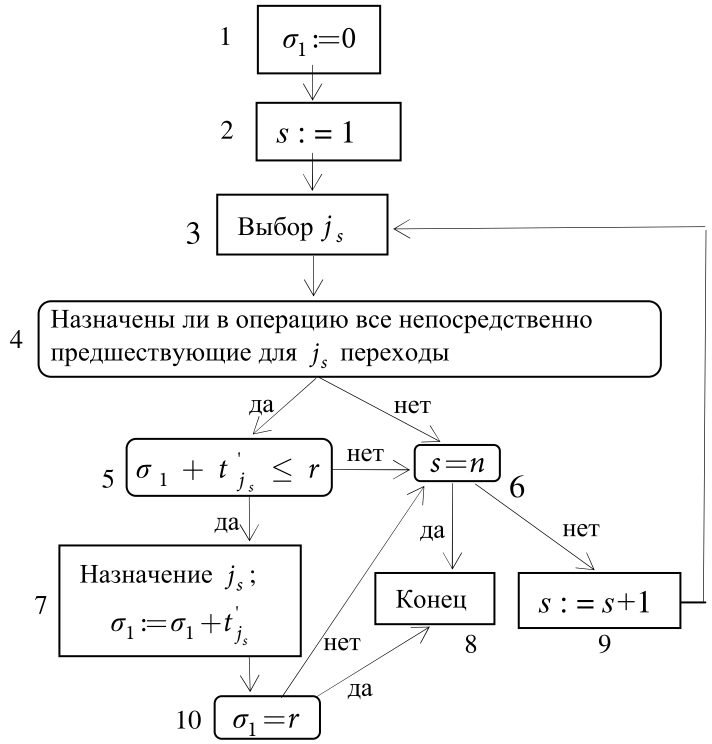
Шаг 3. Упорядочиваем переходы по невозрастанию их весов $p_{j_1} \geq p_{j_2} \geq ... \geq p_{j_s} \geq ... \geq p_{j_n}$ и тогда получаем их последовательность:

$$j_1, j_2, ..., j_s, ..., j_n. \qquad (*)$$

(Заметим, что в случае простой схемы сборки получился бы натуральный порядок переходов: 1, 2, . . . , *n*.)

Основной этап — формирование операций, т.е. распределение переходов по операциям (назначение переходов в операции).

Блок-схема алгоритма формирования операции 1



Соответствующий алгоритм формирования всех операций 1, 2, … однотипен. Поэтому рассмотрим его только для операции 1. Он представлен на приведенной блок-схеме (из десяти блоков), в которой вычислительные блоки обведены прямоугольниками, а логические — скругленными прямоугольниками. Поясним их содержание.

Блок 1. В нем σ_1 означает текущую сумму остаточных трудоемкостей переходов, назначаемых в формируемую операцию (операцию 1). В начале алгоритма она равна нулю.

Блок 2. В нем *s* — это порядковый номер перехода в последовательности ($*$).

Блоки 2 и 3. В них выбирается переход с наибольшим весом, т.е. предпочтение отдается переходу j_1.

Блок 4. Условие, содержащееся в этом блоке, является необходимым и достаточным для соблюдения схемы сборки и поэтому проверка его выполнения необходима для назначения в операцию любого очередного перехода. Для перехода j_1 ответ в блоке 4 всегда положительный («да»), ибо для него предшествующих переходов вообще нет. (Заметим, что в случае простой схемы сборки это условие не требуется включать в алгоритм, ибо оно всегда выполняется.)

Блок 5. Осуществляется проверка, не произойдет ли превышение ритма для суммы остаточных трудоемкостей переходов, если переход j_s назначить в формируемую операцию.

Блок 6. Проверяется, является ли переход j_s последним в последовательности $(*)$.

Блок 7. Происходит назначение перехода j_s в операцию, при этом текущая сумма остаточных трудоемкостей переходов увеличивается на величину остаточной трудоемкости назначаемого перехода. Для попадания в этот блок (т.е. назначения перехода в операцию), как видно из блок-схемы, должны быть выполнены два следующих условия:

1) соблюдение схемы сборки (блок 4),

2) не превышение ритма получающейся суммой остаточных трудоемкостей переходов (блок 5).

Блок 8. Попадание в этот блок означает, что формирование операции закончено.

Блок 9. Осуществляется выбор из последовательности $(*)$ очередного по весу перехода (для проверки возможности включения его в операцию).

Блок 10. Проверяется совпадение суммы остаточных трудоемкостей переходов, назначаемых в операцию, с ритмом линии ($\sigma_1 \le r$).

После формирования операции 1 (по приведенному алгоритму) номера всех попавших в нее переходов вычеркиваются из последовательности $(*)$. Из оставшихся переходов формируется операция 2 и т.д.

Итак, применив описанный алгоритм, получим значения искомых параметров m и a_i (i=1: m).

Далее вычисляем, как отмечалось выше, минимальные количества рабочих мест на операциях c_i =] a_i / r [(i = 1: m).

Для ответа на вопрос, удалась синхронизация или нет, подсчитываем коэффициент загрузки линии: ζ = a / (cr), где a — суммарная штучная трудоемкость всех операций или переходов ($a = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} t_j$), c — суммарное количество рабочих мест на линии, т.е. на всех операциях ($c = \sum_{i=1}^{m} c_i$). (Максимизация этого показателя, как показано выше, равносильна минимизации ЦФ — суммарного простоя рабочих мест на линии.) Если окажется, что ζ ≥ 0,9, то считается, что синхронизация удалась и, следовательно, ОПЛ является непрерывной (ОНПЛ). В противном же случае она является прерывной (ОППЛ).

Проиллюстрируем решение задачи для конкретных исходных данных.

Пример. Осуществить синхронизацию операций на ОПЛ, для которой n =13, r = 0,7, а схема сборки предмета и трудоемкости переходов приведены выше (см. рис. 2).

Решение. Выполняем предварительный этап. Для переходов строим матрицу следования ($\|\alpha_{kj}\|_{13}$), определяем остаточные трудоемкости (t'_k, k =1:13) и веса (p_j, j = 1 : 13).

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc|c}
k \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & t'_k \\
\hline
1 & 1 & & & & & & & & & & & & & 0{,}1 \\
2 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & & 0{,}4 \\
3 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & 0{,}3 \\
4 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & 0{,}2 \\
5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & & 0{,}5 \\
6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & 0{,}3 \\
7 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & 0{,}1 \\
8 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & & 0{,}1 \\
9 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & 0{,}1 \\
10 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & 0 \\
11 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & 0{,}4 \\
12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & 0{,}5 \\
13 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0{,}1 \\
\hline
p_j & 3{,}1 & 2{,}1 & 2{,}4 & 0{,}8 & 1{,}7 & 1{,}0 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 &
\end{array}
$$

Далее, упорядочиваем переходы по невозрастанию их весов (т.е. находим последовательность ($*$)) и для каждого перехода укажем номера всех непосредственно предшествующих ему переходов. Результат приведен в табл. 1.

Таблица 1. **Упорядоченные переходы**

Вес перехода	3,1	2,4	2,1	1,7	1,0	0,8	0,7	0,7	0,6	0,6	0,6	0,5	0,1
Номер	1	3	2	5	6	4	8	9	7	10	12	11	13
Предшествующие переходы	–	1	1	2; 3	3	1	5	6	5	4	8; 9; 10	7	11; 12

Расчеты на основном этапе алгоритма (т.е. формирование операций) оформим в виде табл. 2, где σ_i означает сумму остаточных трудоемкостей переходов, назначаемых в операцию i (i = 1, 2, . . .).

Поясним начало формирования, например, операции 1. Переход 1, имеющий наибольший вес (а именно вес 3,1 — см. табл. 1, строки 1 и 2), назначаем в эту операцию (см. табл. 2). Его остаточную трудоемкость записываем в столбец 3, а полную трудоемкость — в столбец 4 табл. 2. Как видно из табл. 1, следующий по величине вес 2,4 (строка 1) имеет переход 3 (строка 2). Убеждаемся, что оба условия для его включения в операцию выполняются: непосредственно предшествующие ему переходы (это единственный переход 1 — см. строку 3 табл. 1) уже назначены в операцию, и добавление его остаточной трудоемкости (0,3) к остаточной трудоемкости (0,1) перехода 1 не приводит к превышению ритма ($0,1 + 0,3 = 0,4 < r = 0,7$ — см. табл. 2). И т.д.

Таблица. 2. **Формирование операций**

i	Номера переходов в операцию i	Накопление суммы σ_i, не превышающей r	a_i	c_i
1	1, 3, 6	$0,1 + 0,3 + 0,3 = 0,7 = r$	0,8 + 0,3 +1 = 2,1	3
2	2, 4, 9, 10	$0,4 + 0,2 + 0,1 + 0 = 0,7 = r$	1,1 + 0,2 + 0,8 +1,4 =3,5	5
3	5, 8, 7	$0,5 + 0,1 + 0,1 = 0,7 = r$	1,2 +1,5 + 0,1 = 2,8	4
4	12	$0,5 < r$	0,5	1
5	11, 13	$0,4 + 0,1 = 0,5 < r$	0,4 +2,2 = 2,6	4
		Сумма	$11,5 = a$	$17 = c$

После формирования всех операций (их получится $m = 5$) находим величины a, c (см. табл. 2) и коэффициент загрузки линии $\zeta = a/(cr) = 11,5/(17 \cdot 0,7) \approx 0,97$. Так как $\zeta > 0,9$, то синхронизация операций удалась.

Заметим, что так как полученное количество операций ($m = 5$) совпадает с оценкой снизу для количества операций на линии ($]\, t' / r\, [=]\, 3,1 / 0,7\, [= 5$ и, следовательно, выполняется достаточное условие оптимальности распределения переходов по операциям, то полученное приближенное решение является даже точным.

Литература

1. *Бигель Дж.* Управление производством. М., 1973. С. 214–219.

2. *Кузин Б. И.* Организация поточного производства в условиях научно-технического прогресса машиностроения. Л., 1977. С. 25–31.

3. *Кузин Б. И., Дуболазов В. А.* Организация и оперативно-календарное планирование машиностроительного производства в АСУП. Л., 1978. С. 42–49.

4. Экономико-математические модели в организации и планировании промышленного предприятия: учеб. пос. / под ред. Б. И. Кузина. Л., 1982. С. 36–39.

5. *Соколицын С. А., Кузин Б. И.* Организация и оперативное управление машиностроительным производством: учебник. Л., 1988. С. 109–111.

6. *Козловский В. А., Козловская Э. А., Макаров В. М.* Эффективность переналаживаемых роботизированных производств. Л., 1985. С. 73–85.

7. *Шонбергер Р.* Японские методы управления производством. Девять простых уроков. М.: Экономика, 1988.

8. *Монден Я.* «Тоёта»: методы эффективного управления. М.: Экономика, 1989.

9. *Тютюкин В. К.* Минимальный цикл однопредметной линии со сложной структурой // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2009. Вып. 2. С. 134–143.

Статья поступила в редакцию 15 июня 2011 г.