ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 330.45+519.865.7

Р. О. Смирнов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ ШКАЛЫ ПОДОХОДНОГО НАЛОГА

Самое сложное в мире для понимания — подоходный налог.

А. Эйнштейн (1879–1955)

Мировая практика показывает, что одной из основных проблем проведения налоговых реформ является обоснование выбора конкретных ставок налогов. При использовании прогрессивных и регрессивных налогов указанная проблема значительно усложняется, поскольку, в отличие от пропорционального налога, в данном случае необходимо обосновать выбор не одной, а нескольких предельных ставок[1]. При этом нужно также определить выбор границ диапазонов налогооблагаемой базы, в которых действуют соответствующие ставки. Особую остроту имеет вопрос обоснования выбора ставок индивидуального подоходного налога. Это объясняется рядом причин. Во-первых, именно подоходный налог в основном определяет величину налогового бремени граждан. Кроме того, сборы по подоходному налогу в развитых странах составляют один из основных источников доходов государственного бюджета[2]. Во-вторых, государство использует прогрессивное подоходное налогообложение в качестве важнейшего инструмента перераспределения доходов с целью достижения большей социальной справедливости. В этой связи отметим, что в большинстве развитых стран взимается именно прогрессивный подоходный налог. В России после десятилетнего использования так называемой плоской шкалы налога на доходы

[1] Например, количество предельных ставок шкалы подоходного налога, как правило, колеблется от трех до шести.

[2] Так, в США доля этого налога устойчиво составляет более 40% (см.: [1, с. 76]).

Ростислав Олегович СМИРНОВ — канд. экон. наук, доцент кафедры экономической теории и социальной политики Экономического факультета СПбГУ. Работает на Экономическом факультете с 1985 г. после окончания факультета Прикладной математики — процессов управления ЛГУ (СПбГУ). В 1993 г. защитил кандидатскую диссертацию. Сфера научных интересов — экономика государственного сектора, теория оптимального подоходного налогообложения. Автор и соавтор 49 научных и учебно-методических работ, в том числе одной индивидуальной и одной коллективной монографий.

физических лиц (НДФЛ)[3] все чаще ставится вопрос о возврате к прогрессивной форме данного налога[4], использовавшейся в РФ с 1990 по 2000 г. [2, с. 109–110].

Злободневность проблемы обоснования выбора указанных выше параметров шкалы подоходного налога обусловлена еще и тем, что существующая теория оптимального подоходного налогообложения, восходящая к работам Дж. Миррлиса [9], не дает исчерпывающего ответа ни на вопрос об оптимальной степени прогрессии шкалы подоходного налога, ни на вопрос о величине предельных ставок и диапазонах их применения. Кроме того, полученные в ней аналитические результаты очень чувствительны ко всем сделанным предположениям и допущениям. При этом сами упрощающие предположения слабо мотивированы (см., напр., [10]).

В статье исследуются вопросы практического использования теоретико-игровой модели выбора прогрессивной шкалы ставок подоходного налога, которая впервые была описана в [11] и представляет собой развитие более ранней вариационной модели [12]. Модификация этой модели позволяет выбирать регрессивные налоговые шкалы [13; 14].

Приведем краткое описание данной модели. Прогрессивная шкала средних (эффективных) ставок[5] подоходного налога моделируется в виде абсолютно непрерывной функции $y = y(x) \in (0,1)$, $x \in (0,+\infty)$, которая почти всюду на заданном отрезке $[x_-, x_+]$ удовлетворяет дифференциальным неравенствам

$$0 < \frac{dy}{dx} < \frac{1-y}{x} \tag{1}$$

и является постоянной на каждом из промежутков $(0, x_-]$ и $[x_+,+\infty)$, т. е.

$$y(x) = 0, \ \ \forall x \in (0, x_-], \tag{2}$$

$$y(x) = y_+, \ \ \forall x \in [x_+, +\infty), \tag{3}$$

где x — суммарный доход физического лица, x_- — необлагаемый налогом минимум дохода[6], а x_+ — пороговый уровень дохода, начиная с которого налог взимается по максимальной средней ставке y_+.

Левое из неравенств (1), как известно, представляет собой достаточное условие возрастания функции $y = y(x)$ на отрезке $[x_-, x_+]$, т. е. означает, что шкала является прогрессивной[7]. В свою очередь, правое из этих неравенств гарантирует, что на том же про-

[3] С 1 января 2001 г. в соответствии с гл. 23 Налогового кодекса РФ изменено название «Подоходный налог с физических лиц» на «Налог на доходы физических лиц», при этом налогообложение основных видов доходов осуществляется по единой для всех ставке 13%.

[4] Только в 2010 г. на рассмотрение в Госдуму РФ были внесены два законопроекта о введении прогрессивного налога на доходы физических лиц: первый — депутатом Госдумы от фракции КПРФ А. В. Багаряковым [3], второй — фракцией «Справедливая Россия» [4]. Вопрос о необходимости введения прогрессивной шкалы НДФЛ периодически обсуждается в научной литературе [1, с. 78; 5; 6]. См. также работы [7; 8].

[5] Как известно, средняя (эффективная) ставка представляет собой отношение суммы налога к величине налоговой базы (в частности, общего дохода физического лица).

[6] В России необлагаемый налогом минимум дохода носит название «стандартные налоговые вычеты» (ст. 218 Налогового кодекса РФ).

[7] Мы используем наиболее распространенное определение термина «прогрессивный налог», в соответствии с которым прогрессивным называется налог, средняя ставка которого возрастает при увеличении налоговой базы. Подробнее об измерении степени прогрессии см. в работе [15].

межутке возрастает и функция $D(x) = [1 - y(x)]x$, т. е. с ростом дохода x возрастает и часть дохода, остающаяся после уплаты налога, несмотря на рост средней ставки налога.

Далее в модели используется тот факт, что в области $y \in (0, 1)$, $x \in (0, +\infty)$ множество всех абсолютно непрерывных решений системы дифференциальных неравенств (1) совпадает с множеством решений параметрического семейства дифференциальных уравнений (см.: [16])

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{1-y}{x}, \tag{4}$$

которые соответствуют всевозможным измеримым по Лебегу функциям

$$u = u(x) \in (0,1). \tag{5}$$

Поскольку одной из важнейших функций налогов является фискальная функция, то в качестве критерия оптимальности при выборе шкалы подоходного налога рассматривается задача на максимум функционала, описывающего суммарный объем налоговых поступлений в государственный бюджет. Как показано в работе [11, с. 8–13], указанный функционал имеет вид

$$T(y,\ f) = \int_0^{+\infty} y(x)df(x),\ \ y \in Y,\ \ f \in F, \tag{6}$$

где функция $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ — это так называемая функция распределения доходов, значение которой $f(x)$ в точке $x \in (0,+\infty)$ представляет собой суммарный доход всех тех налогоплательщиков, чей личный доход не превышает x; F — множество допустимых функций распределения доходов граждан $f=f(x)$; Y — множество всех абсолютно непрерывных функций $y=y(x)$, удовлетворяющих условиям (1)–(3).

Здесь возникает проблема, связанная с тем, что функция распределения доходов $f=f(x)$ зависит от выбора налоговой шкалы $y=y(x)$. Однако в аналитическом виде она не может быть определена в силу чрезвычайной сложности соответствующего явления (подробнее см. [17]). Следовательно, в данной оптимизационной задаче неизвестным является целевой функционал (6). Поэтому рассматриваемая задача относится к классу задач принятия решений в условиях неопределенности. Стандартным инструментом решения указанных задач являются антагонистические игры, которые в этом случае называются играми против природы [18]. Поиск решения игры осуществляется только за одного игрока, а именно за того, кому «противодействует» природа.

Таким образом, в качестве модели выбора шкалы средних ставок подоходного налога рассматривается задача об отыскании оптимальной стратегии 1-го (максимизирующего) игрока в антагонистической игре $\Gamma = \langle Y,\ F,\ T\rangle$, в которой функция выигрыша T имеет вид (6), F — множество стратегий 2-го игрока, а множество стратегий 1-го игрока представляет собой множество всех абсолютно непрерывных функций $y=y(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{1-y}{x}, \tag{7}$$

$$u = u(x) \in [\delta, \sigma], \tag{8}$$

$$0 < \delta \le \sigma < 1, \tag{9}$$

$$y\left(x_-\right) = 0, \tag{10}$$

$$y(x_+) = y_+, \ \ (0 < x_- < x_+, \ 0 < y_+ < 1). \tag{11}$$

Отметим, что переход к замкнутому множеству значений функции управления $u = u(x)$, т. е. переход от условия (5) к (8) и (9) обеспечивает существование точного решения задачи, а также дает возможность выбирать еще два экзогенных параметра модели δ и σ, которые представляют собой соответственно минимальное и максимальное (на отрезке $[x_-, x_+]$) значения эластичности налоговой шкалы $y = y(x)$ по доходу x.

Основным результатом анализа рассматриваемой теоретико-игровой модели является то, что в этой игре у 1-го игрока существует доминирующая стратегия, т. е. оптимальная шкала средних ставок налога, которая определяется следующим образом (см.: ([11, с. 26]):

$$y_{\mathrm{opt}}(x) = \begin{cases} y_-, \quad 0 \le x < x_-, \\ 1 - \left(\dfrac{x_-}{x}\right)^{\sigma}, \quad x_- \le x < x_0, \\ 1 - (1 - y_+)\left(\dfrac{x_+}{x}\right)^{\delta}, \quad x_0 \le x \le x_+, \\ y_+, \quad x > x_+, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$x_0 = \left(\left(1 - y_+\right)\frac{x_+{}^{\delta}}{x_-{}^{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\delta - \sigma}}, \tag{13}$$

при этом предполагаются справедливыми неравенства

$$\left(\frac{x_-}{x_+}\right)^{\sigma} \le 1 - y_+ \le \left(\frac{x_-}{x_+}\right)^{\delta},$$

которые гарантируют совместность системы условий (7)–(11).

Для использования на практике описанной выше модели (6)–(11) в качестве основы интерактивной диалоговой системы поддержки принятия решений плановым органом должны быть определены условия допустимого выбора входных параметров модели, а именно x_-, x_+, y_+, δ и σ. Эти условия являлись бы ограничениями на действия лица, принимающего решения (ЛПР). Описание указанных ограничений и составляет основной предмет настоящей работы.

Прежде всего отметим, что параметр x_-, представляющий собой, как отмечалось, необлагаемый налогом минимум дохода, предлагается выбирать равным прожиточному мнимуму, что обеспечивает выполнение неравенства $x_- > 0$.

Параметр x_+ $(x_+ > x_-)$ может рассчитываться экспертами правительства, например, как верхняя граница доходов среднего класса по статистическим данным о фактическом распределении доходов граждан. Параметр y_+, с одной стороны, определяет степень прогрессии налоговой шкалы (скорость возрастания функции $y_{\text{opt}}(x)$), а с другой — отражает фискальные потребности бюджета. При этом в рамках модели данный параметр должен выбираться так, чтобы точка $M_+ = M(x_+, y_+)$ принадлежала интегральной воронке параметрического семейства уравнений (4), (5) с начальным условием

$$y\left(x_-\right) = 0, \tag{14}$$

т. е. чтобы данная точка лежала выше оси Ox и ниже интегральной кривой уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{x} \tag{15}$$

с тем же начальным условием. Интегрируя уравнение (15) с начальным условием (14), получим следующий вид искомой интегральной кривой:

$$y = y^*(x) = 1 - \frac{x_-}{x}. \tag{16}$$

Очевидно, что $0 < y^*(x) < 1$ при $x > x_-$.

Следовательно, параметр y_+ должен выбираться ЛПР исходя из ограничения

$$0 < y_+ < y^*(x_+) = 1 - \frac{x_-}{x_+}. \tag{17}$$

Попутно отметим, что условия (17) гарантируют разрешимость рассматриваемой краевой задачи (4), (5), (10), (11) (и, соответственно, задачи (7)–(11)) в классе измеримых по Лебегу (и даже в классе постоянных) управлений $u = u(x)$.

Определенную трудность представляет собой выбор входных параметров δ и σ, поскольку, несмотря на общеизвестный смысл понятия эластичности в экономической теории, дать обоснованные рекомендации по выбору значений этих показателей проблематично.

Возможный выход из этого затруднения, как отмечалось в работе [19, с. 29], видится в том, чтобы заменить выбор параметров δ и σ выбором производной от них пары параметров, которые, с одной стороны, допускали бы содержательную экономическую трактовку, позволяющую определить их количественные значения, а с другой —допускали возможность восстановления по ним исходных параметров. В качестве такой производной пары параметров предлагается выбирать параметры x_0 и y_0, первый из которых связан с данными входными параметрами уравнением (13), а второй представляет собой значение функции (12) в точке x_0.

В зависимости от целей налоговой политики параметру x_0 может быть придан разный экономический смысл. Так, например, его можно интерпретировать как нижнюю границу доходов среднего класса и рассчитывать аналогично параметру x_+. В этом случае параметр y_0, в свою очередь, представляет собой среднюю ставку налога с дохода x_0.

Итак, исключая из числа экзогенно заданных параметры δ и σ и вводя вместо них параметры x_0 и y_0 с целью использования оптимальной шкалы (12), необходимо разрешить относительно δ и σ следующую систему уравнений:

$$x_0 = \left(\left(1 - y_+\right) \frac{{x_+}^{\delta}}{{x_-}^{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\delta - \sigma}}, \tag{18}$$

$$y_0 = 1 - (1 - y_+) \left(\frac{x_+}{x_0} \right)^{\delta}, \tag{19}$$

при ограничениях

$$0 < \delta \leq \sigma < 1, \tag{20}$$

$$0 < x_- < x_0 < x_+, \tag{21}$$

$$0 < y_0 < y_+ < 1. \tag{22}$$

Из (19) имеем $\left(\frac{x_+}{x_0} \right)^{\delta} = \frac{1 - y_0}{1 - y_+}$. Отсюда выражаем параметр

$$\delta = \frac{\ln \frac{1 - y_0}{1 - y_+}}{\ln \frac{x_+}{x_0}}. \tag{23}$$

В свою очередь из (18) имеем

$${x_0}^{\delta - \sigma} = (1 - y_+) \frac{{x_+}^{\delta}}{{x_-}^{\sigma}} \Leftrightarrow \left(\frac{x_-}{x_0} \right)^{\sigma} = \left(1 - y_+\right) \left(\frac{x_+}{x_0} \right)^{\delta}.$$

Откуда, прологарифмировав и преобразовав, получим

$$\sigma = \frac{\ln\left(1 - y_+\right)}{\ln \frac{x_-}{x_0}} + \delta \frac{\ln \frac{x_+}{x_0}}{\ln \frac{x_-}{x_0}}. \tag{24}$$

Подставив выражение (23) в (24), находим параметр

$$\sigma = \frac{\ln\left(1 - y_0\right)}{\ln \frac{x_-}{x_0}}. \tag{25}$$

Формулы (23) и (25) являются решением системы уравнений (18), (19), т. е. мы выразили входные параметры δ и σ через параметры x_0 и y_0. Теперь необходимо определить ограничения на выбор средней ставки налога y_0, гарантирующие выполнение неравенств (20).

Вначале заметим, что, как следует из (23) с учетом ограничений (21) и (22), левое из неравенств (20) заведомо выполняется.

Далее из (21), (22) и (25) нетрудно видеть, что правое из неравенств (20) выполняется при условии

$$y_0 < 1 - \frac{x_-}{x_0}. \tag{26}$$

Наконец, из (23) и (25) получаем, что среднее неравенство (20) имеет место при выполнении следующего условия:

$$\frac{\ln\dfrac{1-y_0}{1-y_+}}{\ln\dfrac{x_+}{x_0}} \le \frac{\ln\left(1-y_0\right)}{\ln\dfrac{x_-}{x_0}}. \tag{27}$$

При выполнении ограничений (21) и (22) неравенство (27) после ряда несложных преобразований можно привести к виду

$$\ln\left(1-y_0\right) \le \frac{\ln\left(1-y_+\right)\ln\dfrac{x_-}{x_0}}{\ln\dfrac{x_-}{x_+}}.$$

Откуда имеем

$$1-(1-y_+)^{\frac{\ln x_- - \ln x_0}{\ln x_- - \ln x_+}} \le y_0. \tag{28}$$

Объединяя неравенства (22), (26) и (28), окончательно получим, что параметр y_0, соответствующий определенному параметру $x_0 \in (x_-, x_+)$, должен выбираться исходя из следующих ограничений:

$$1-(1-y_+)^{\frac{\ln x_- - \ln x_0}{\ln x_- - \ln x_+}} \le y_0 < \min\left\{y_+, 1-\frac{x_-}{x_0}\right\}. \tag{29}$$

В заключение проиллюстрируем полученные ограничения (29) на основе статистических данных по РФ. Необлагаемый налогом минимум дохода выберем равным общефедеральному прожиточному минимуму на душу населения: $x_- = 6473$ рублям[8]. Нижней границей дохода среднего класса будем считать доход в размере около трех прожиточных минимумов в месяц на одного члена семьи, соответственно верхней границей — около десяти прожиточных минимумов, т. е. $x_0 = 20\,000$ рублей, $x_+ = 65\,000$ рублей. Максимальную среднюю ставку подоходного налога y_+ представляется целесообразным устанавливать в размере 30%[9]. Тогда, подставив выбранные значения параметров в неравенства (29), получим, что выбор средней ставки налога, по которой

[8] Указанная величина прожиточного минимума установлена на I квартал 2011 г. Постановлением Правительства РФ от 14.06.2011. № 465.

[9] Очевидно, что выбранное значение удовлетворяет ограничениям (17).

взимается подоходный налог с нижней границы доходов среднего класса, должен осуществляться ЛПР исходя из следующих ограничений: $16\% \le y_0 < 30\%$.

Таким образом, полученные результаты позволяют свести проблему выбора предельных ставок подоходного налога и разрядов шкалы при подготовке налоговой реформы к вопросу выбора пяти входных параметров рассматриваемой модели. Данные параметры могут быть определены по статистическим данным с учетом целей налоговой политики и полученных ограничений на их выбор. При этом число указанных параметров меньше, чем в случае непосредственного выбора шкалы предельных ставок налога.

Литература

1. *Федорович В. А., Патрон А. П.* США: государство и экономика. М.: Междунар. отношения, 2005.

2. *Грачев М. С.* Налоговая система России: закономерности развития и перспективы реформирования. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009.

3. URL: http://asozd2.duma.gov.ru/main.nsf/%(Spravka)?OpenAgent&RN=332189-5&02 (дата обращения: 25.03.2011).

4. URL: http://www.spravedlivo-online.ru/zakon/news/zakon.php?news=11577 (дата обращения: 25.03.2011).

5. *Чичелёв М. Е.* К вопросу об альтернативе плоской и прогрессивной шкал налогообложения доходов физических лиц // Финансовый вестник. 2007. № 17. С. 29–49.

6. *Грачев М. С.* Формирование российской налоговой системы: проблемы эффективности и справедливости // Налоги и финансовое право. 2011. № 6. С. 165–170.

7. *Смирнов Р. О., Чистяков С. В.* Подоходное налогообложение: теория и практика взимания // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2002. Вып. 3. С. 61–66.

8. *Смирнов Р. О.* Проблемные аспекты формирования эффективной и справедливой системы подоходного налогообложения // Налоги и финансовое право. 2011. № 6. С. 155–159.

9. *Mirrlees J. A.* An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation // Review of Economic Studies. 1971. N 38. P. 175–208.

10. *Saez E.* Using Elasticities to Derive Optimal Income Tax Rates // Review of Economics Studies. 2001. Vol. 68. P. 205–229.

11. *Чистяков С. В., Ишханова М. В.* Математические модели выбора налоговых шкал: учеб. пособие. СПб., 1998.

12. *Смирнов Р. О., Чистяков С. В.* О ставках налогообложения как инструменте государственного регулирования // Экономика и математические методы. 1993. Т. 29. Вып. 2. С. 268–274.

13. *Смирнов Р. О., Чистяков С. В.* Моделирование выбора регрессивной шкалы единого социального налога // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2003. Вып. 4. С. 79–85.

14. *Смирнов Р. О.* Моделирование регрессивных налоговых шкал // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2005. Вып. 2. С. 147–153.

15. *Musgrave R. A., Tun T.* Income Tax Progression. 1929–1948 // Journal of Political Economy. 1948. Vol. 56. P. 498–514.

16. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.

17. *Некипелов Д. Н.* Распределительные свойства и искажающее воздействие налогов на индивидуальные доходы в России. М.: ИЭПП, 2005.

18. *Льюис Р. Д., Райфа Х.* Игры и решения. М., 1961.

19. *Смирнов Р. О.* Моделирование инструментов бюджетно-налоговой политики государства. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2011 г.