Вестник СПбГУ. Сер 5. 2010. Вып. 1

УДК 519.6

А. А. Бабаев

ФОРМАЛИЗАЦИЯ И МЕТОД РЕШЕНИЯ «ЗАДАЧИ ИНКАССАТОРА»

Рост доли комбинированной деятельности банков по принятию депозитов и выдаче кредитов [1] в свою очередь повышает роль своевременного инкассационного обеспечения. Исходя из этого Сбербанк России развивает услуги по инкассации и доставке денежной наличности клиентам банка [2]. Наблюдается устойчивая тенденция увеличения общего объема ценностей, перевезенных подразделениями инкассации Сбербанка России для филиалов банка и его клиентов. Для расширения сферы предоставляемых клиентам банка услуг, а также улучшения качества и культуры их обслуживания филиалы Сбербанка России ведут работу по организации касс пересчета и вечерних касс. Для оказания широкого спектра банковских услуг населению филиалами банка проводится работа по внедрению перспективной формы обслуживания физических лиц передвижными операционными кассами.

Аналогичная работа проводится и в других банках различной организационной принадлежности и разных форм собственности. Управления, отделы или службы инкассации различных финансовых институтов и охранных фирм, как правило, предлагают юридическим и физическим лицам услуги инкассации следующих видов:

— сбор и перевозка ценных бумаг, банкнот, монет, иностранной валюты, ювелирных изделий, драгоценных металлов (камней);

— инкассация торговой выручки с последующей доставкой в кассу банка или денежной выручки, направляемой в банк на конвертацию;

— доставка заработной платы и денежной наличности;

— подкрепление операционных касс, обменных пунктов, кредитных организаций;

— обслуживание банкоматов и игровых автоматов.

Александр Александрович БАБАЕВ — канд. техн. наук, доцент кафедры информационных систем в экономике Экономического факультета СПбГУ. Окончил факультет радиоэлектроники Военной артиллерийской академии (1972) и адъюнктуру по кафедре автоматизации управления (1976). Служил в Вооруженных силах СССР (1960–1993), полковник в отставке. На Экономическом факультете работает с 2002 г. Стажировался в Гамбургском университете Германии. Сфера научных интересов — исследование операций, комбинаторная оптимизация, алгоритмизация и программирование прикладных задач, информационные технологии в учебном процессе. Автор более 200 научных работ, имеет 7 авторских свидетельств и патентов на изобретения.

Перевозка ценностей и инкассация денежной выручки производится на бронированном автотранспорте с вооруженной охраной [3]. Время и периодичность заезда устанавливаются обслуживаемой организацией по согласованию с подразделением инкассации. Руководитель подразделения оценивает ситуационную обстановку, производит аналитическую отработку возможных путей передвижения и техники инкассации, составляет графики и маршруты заездов инкассаторов в организации (пункты, точки).

Некоторое представление о масштабности рассматриваемого вопроса дает, например, следующий материал об управлении инкассации Северо-Западного банка [4], в состав которого входят: отдел организации инкассаторской работы, сектор обеспечения, отдел инкассации и подразделения инкассации в составе отделений банка на территории Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской, Калининградской областей и Республики Карелия. Общая численность сотрудников инкассации составляет более 1000 человек, на маршруты инкассации ежедневно выходит более 150 спецавтомобилей.

При определении маршрутов инкассации могут быть использованы различные критерии для оценки их оптимальности (целесообразности):

1) минимум суммарных отклонений от установленных сроков доставки;
2) минимум межоперационных простоев спецтранспорта;
3) минимум времени нахождения на маршруте;
4) минимум пройденного спецтранспортом расстояния;
5) максимум вероятности успешной доставки наличности и др.

В свете обозначенного вопроса определенный теоретический и практический интерес представляет предлагаемая далее математическая модель оптимизации маршрута инкассатора, существенно отличающаяся по своему критерию от перечисленных критериев, в частности от задачи коммивояжера [5] (третий и четвертый критерии).

Постановка задачи

Вербальное описание модели заключается в следующем. Некоторый банк обслуживает m обменных пунктов (операционных касс, банкоматов). В установленное время спецмашина осуществляет доставку заказанных сумм денег s_j в n пунктов, $j = 1,...,n$; $n \le m$. Известно время или математическое ожидание времени следования машины между пунктами t_{ij}, $i = 0,..., n; j = 0,..., n$ и время передачи денег на каждый пункт τ_j, $j = 1,...,n$.

Требуется определить такой маршрут следования инкассатора, который минимизирует суммарное произведение времени и денег.

Проведем математическую формализацию задачи:

$$C = \min \sum_{j=1}^{n} (\tau_j + \sum_{i=0}^{n} t_{ij} x_{ij}) \sum_{k=1}^{n} s_k y_{jk} \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = 1; \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1, \ \ i = 1, 2, ..., n; \qquad (3)$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1, \ \ j = 1, 2, ..., n; \qquad (4)$$

$$q_i - q_j + nx_{ij} \le n-1,\ 1 \le i \ne j \le n, \tag{5}$$

$$x_{ij}, y_{jk} \in \{0, 1\}, \quad i = 0,1,\ldots,n; \quad j,k = 1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

где x_{ij} = 1, если инкассатор из i-го пункта следует в j-й пункт;

x_{ij} = 0 — в противном случае;

$$y_{jk} = \begin{cases} 1, \text{если } q_j < q_k; \\ 0, \text{если } q_j > q_k, \end{cases} \Big\rangle 1 \le j \ne k \le n;$$

q_j — очередность инкассации j-го обменного пункта, j = 1,..., n.

Формализованную задачу, в соответствии с классификацией [6], следует отнести к классу задач упорядочения работ. По своему физическому смыслу ее критерий оптимизации как бы объединяет противоречивые требования задач о коммивояжере и минимизации взвешенной средней длительности прохождения работ без переналадок [7]. Однако целочисленная формулировка задачи (1)–(6) существенно отличается от традиционной модели Таккера для задачи о коммивояжере. Поэтому она не может быть решена известными инструментальными средствами, в частности, в среде MS Excel.

Целевая функция (1) содержит принципиально новый сомножитель $s_k y_{jk}$, который представляет собой сумму денег, находящихся на спецтранспорте и не доставленных еще в обменные пункты. Экономический смысл целевой функции состоит в том, что сумма произведений денежных средств на время их доставки из исходного пункта в пункты назначения должна быть минимальной. В целевой функции заложен механизм учета не только времени, но и количества наличности, т. е. следование принципу «время — деньги». Ограничения (2), (4), (5) идентичны соответствующим ограничениям модели Таккера, в частности условие (5) предотвращает внутренние подциклы на маршруте спецтранспорта. Новым является ограничение (6), а ограничение (3) получено из аналогичного ограничения в задаче о коммивояжере заменой знака «=» на знак «≤». Это объясняется тем, что по условию задачи не оговариваются затраты на холостой пробег транспортного средства при возвращении его в исходный пункт.

Анализ физической сущности задачи показывает, что можно перейти от ее математической формализации в терминах переменных x_{ij} к формализации на перестановках [8]:

$$P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}.$$

$$C = C(P) = \sum_{k=1}^{n} T_{p_{k-1}p_k} \sum_{l=k}^{n} s_{p_l} \quad \Rightarrow \quad \min, \tag{7}$$

где $T_{p_{k-1}p_k} = \tau_{p_k} + t_{p_{k-1}p_k}$, $k = 1,\ldots,n$;

p_k — пункт, для которого инкассация производится в k-ю очередь, k = 1,..., n.

Преимущество формализации (7) состоит в том, что ограничения задачи в явном виде отсутствуют, и требуется указать такую перестановку, которая минимизирует эту целевую функцию. Отсутствие ограничений в явном виде объясняется тем, что они вошли в целевую функцию: перестановка пунктов объезда автоматически удовлетворяет ограничениям (5) — (6), а ограничения (2) — (4) неявно присутствуют во втором слагаемом целевой функции (7).

Интерпретацию физической сущности задачи рассмотрим на примере доставки наличности в 5 пунктов. Пусть временная матрица (минут) и суммы передаваемой наличности (млн рублей) заданы в табл. 1.

Таблица 1

i	T_{ij}				
0	25	35	15	10	30
1	–	35	30	15	50
2	30	–	50	25	40
3	30	45	–	25	35
4	15	20	25	–	35
5	55	40	35	30	–
j	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
s_j	4	5	2	3	1

В условиях примера необходимо найти такой маршрут доставки денег, который минимизирует минуто-рубли (мин-руб.). Из исходного пункта требуется вывезти в пункты назначения 4 + 5 + 2 + 3 + 1 = 15 млн рублей.

Предположим, что мы будем доставлять наличность в порядке нумерации пунктов, т. е. из нулевого пункта в 1-й пункт, из 1-го — во 2-й,..., из 4-го — в 5-й, то значение целевой функции составит $C = 15 \cdot 25 + 11 \cdot 35 + 6 \cdot 50 + 4 \cdot 25 + 1 \cdot 35 = 1195$ млн мин-руб.

Если осуществлять развозку в порядке невозрастания сумм доставляемой наличности по маршруту $0 \to 2 \to 1 \to 4 \to 3 \to 5$, то целевой ресурс будет иметь следующее значение: $C = 15 \cdot 35 + 10 \cdot 30 + 6 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 1 \cdot 35 = 1025$ млн мин-руб.

В том случае, когда мы будем осуществлять доставку, выбирая ближайший пункт назначения, т. е. следовать по маршруту $0 \to 4 \to 1 \to 3 \to 5 \to 2$, то получим значение ресурса $C = 15 \cdot 10 + 12 \cdot 15 + 8 \cdot 30 + 6 \cdot 35 + 5 \cdot 40 = 980$ млн мин-руб.

Если будет производиться объезд пунктов назначения по маршруту, минимизирующему время доставки (критерий задачи коммивояжера): $0 \to 3 \to 1 \to 4 \to 2 \to 5$, то расход ресурсов составит $C = 15 \cdot 15 + 13 \cdot 30 + 9 \cdot 15 + 6 \cdot 20 + 1 \cdot 40 = 910$ млн мин-руб.

Вопрос о том, является ли последний из рассмотренных маршрутов оптимальным с точки зрения предложенного нами критерия, остается открытым.

Метод решения задачи

Сформулированная в виде (7) задача может быть решена с использованием одного из методов комбинаторной оптимизации — метода ветвей и границ [9].

Как известно, в методе ветвей и границ не существует общего способа нахождения оптимистической оценки перспективности вершин на дереве вариантов. В нашем случае для задачи минимизации оптимистической оценкой будет являться нижняя граница целевой функции. Для определения нижней границы необходимо найти, с одной стороны, достаточно простой способ, а с другой — способ, не дающий больших отклонений от оптимального значения целевой функции.

Предварительно проанализируем метод решения задачи минимизации взвешенной средней длительности прохождения работ без перенастроек [7]. Суть его заключается в построении упорядоченной по убыванию последовательности отношений важностей работ к их длительностям, причем расписание работ, соответствующее этой последовательности, будет оптимальным. Применительно к нашей задаче это будет последовательность отношений количества доставляемых денег на обменные пункты к наименьшим протяженностям участков маршрута между пунктами.

Подобный подход может быть использован при оценке нижней границы решения для нашей задачи. В связи с этим можно доказать справедливость следующих теорем.

Теорема 1. Если выполняются условия

$$T_{ij} = \min_{1\le k\le n} T_{ik} = \min_{0\le l\le n} T_{lj}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad i = j-1; \tag{8}$$

$$\frac{s_1}{T_{0,1}} \ge \frac{s_2}{T_{1,2}} \ge \dots \ge \frac{s_n}{T_{n-1,n}}, \tag{9}$$

то перестановка $P = (1, 2, ..., n)$ является оптимальным маршрутом инкассатора, а минимальное значение целевой функции (7) вычисляется по формуле

$$C = \sum_{i=1}^{n} T_{i-1,i} \sum_{j=i}^{n} s_j. \tag{10}$$

Теорема 2. Если некоторая перестановка $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ минимизирует целевую функцию

$$C(P) = \sum_{k=0}^{n} T_{p_k p_{k+1}} \sum_{l=k}^{n} s_{p_l}, \tag{11}$$

то эта же перестановка минимизирует и целевую функцию

$$C^*(P) = \sum_{k=0}^{n} T^*_{p_k p_{k+1}} \sum_{l=k}^{n} s_{p_l} + \sum_{k=1}^{n-1} s_{p_{k+1}} \sum_{l=k+1}^{n} w_{p_l}, \tag{12}$$

где

$$w_k = u_k + v_k, \quad k = 1, ..., n; \tag{13}$$

$$u_k = \min_{1\le j\le n} T_{ij}, \quad i = 0, 1, ..., n; \tag{14}$$

$$v_j = \min_{0\le i\le n} (T_{ij} - u_i), \quad j = 1, ..., n; \tag{15}$$

$$T^*_{ij} = T_{ij} - u_i - v_j, \quad i = 0, 1, ..., n,\ j = 1, ..., n. \tag{16}$$

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 3. Оптимальное значение целевой функции (11) отличается от оптимального значения целевой функции (12) на величину

$$\Delta C = C(P) - C^*(P) = U + W,$$

где

$$U = u_0 \sum_{k=1}^{n} s_k; \ W = \sum_{k=1}^{n} w_k s_k.$$

Теорема 4. Если одновременно выполняются два условия:

$$\frac{s_1}{w_1} \ge \frac{s_2}{w_2} \ge \dots \ge \frac{s_n}{w_n}; \tag{17}$$

$$T^*_{01} = T^*_{12} = \dots = T^*_{n-1,n} = T^*_{n,0} = 0, \tag{18}$$

то перестановка $P^* = (1, 2, ..., n)$ является решением задачи. При этом минимальное значение целевой функции (12) вычисляется по формуле

$$C(P^*) = \sum_{k=1}^{n-1} w_k \sum_{l=k+1}^{n} s_l. \tag{19}$$

Теорема 2 дает нам право производить предварительные преобразования исходных данных задачи инкассатора и определять на дереве вариантов при поиске оптимального маршрута для вершины P_r нижнюю границу решения

$$H_r(P_r) = H_1 + H_2 + H_3. \tag{20}$$

Теорема 3 позволяет достаточно просто вычислять первую составляющую нижней границы по формуле

$$H_1 = \sum_{i=1}^{r-1} (w_{p_i} + t^*_{p_{i-1}p_i}) \sum_{j=i}^{r-1} s_{p_j}. \tag{21}$$

Теорема 4 дает возможность определять вторую составляющую нижней границы

$$H_2 = (w_{p_i} + t^*_{p_{i-1}p_i}) \sum_{i=r}^{n} s_{pi}. \tag{22}$$

Результат теоремы 1 позволяет использовать следующее выражение в качестве третьей составляющей нижней границы на дереве вариантов для вершин r-го яруса:

$$H_3 = \min \sum_{i=r+1}^{n-1} w_{p_i} \sum_{j \in \{r+1, \cdots, n\}}^{n} s_{p_j}. \tag{23}$$

Нижняя граница (20) позволяет исключать из дальнейшего рассмотрения как бесперспективные те вершины, нижняя граница которых удовлетворяет условию

$$H_r\left(P_r\right) \geq C^0, \quad 1 \leq r \leq n, \tag{24}$$

где C^0 — значение целевой функции для известного (приближенного) решения.

Перспективные вершины дерева вариантов подвергаются ветвлению по правилам выбранной стратегии с целью поиска лучшего решения, которое может быть получено в одной из конечных вершин. Полученное на n-м ярусе решение $C(P)$ сравнивается с уже известным решением C^0 и лучшее из них объявляется рекордом, а переменной C^0 присваивается соответствующее рекорду значение.

Процедура поиска оптимального решения заканчивается тогда, когда условие (24) выполняется для всех неветвленных вершин на всех ярусах дерева вариантов. В этом случае рекордное значение целевой функции C^0 объявляется оптимальным.

Демонстрация алгоритма

Рассмотрим процесс решения задачи (7) по исходным данным, представленным в табл. 1.

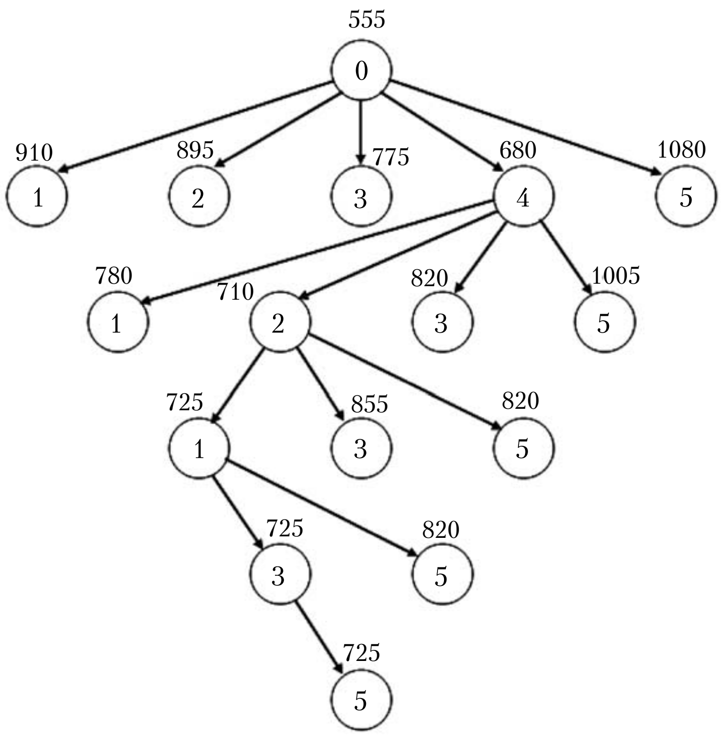
В соответствии с теоремой 2 по правилам (13) — (15) находим приводящие константы $\{u_i\} = \{10, 15, 25, 25, 15, 30\}$, $\{v_j\} = \{0, 5, 5, 0, 10\}$, $\{w_j\} = \{15, 30, 30, 15, 40\}$, а по формуле (16) преобразуем исходные данные к виду, показанному в табл. 2.

Процедура поиска оптимального решения иллюстрируется на дереве вариантов (рисунок). Вершины дерева (кружки) являются элементами перестановки пунктов искомого маршрута доставки наличности. Вершины расположены по ярусам $r = 0, 1, ..., 5$. Из корневой вершины осуществляются возможные ветвления к вершинам первого яруса, от исследуемой вершины первого яруса — к вершинам второго яруса, и т. д. Для каждой из вершин по формуле (20) осуществляется вычисление нижней границы (оптимистическая оценка перспективности исследуемой ветви маршрута). Значения нижних границ на рисунке проставлены над вершинами дерева вариантов. Концевая вершина последнего яруса завершается ветвью, которая и определяет маршрут инкассатора. Нижняя граница концевой вершины является значением целевой функции для рассматриваемого маршрута.

Таблица 2

i	T^*_{ij}				
0	15	20	5	0	10
1	–	15	10	0	25
2	5	–	20	0	5
3	5	15	–	0	0
4	0	0	5	–	10
5	25	5	0	0	–
j	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
s_j	**4**	**5**	**2**	**3**	**1**
w_j	15	30	30	15	40

При расчете нижней границы $H_0(P_0)$ для корневой вершины на нулевом ярусе дерева вариантов по формулам (21), (22) имеем: $H_1 = 0$; $H_2 = 0$. Что касается выражения (23), то следует учесть, что это своего рода вспомогательная оптимизационная задача. Для ее решения предварительно необходимо в соответствии с теоремой 4 добиться выполнения условия (17), упорядочив отношения s_j/w_j: 4/15 = 0,267; 3/15 = 0,200; 5/30 = 0,167; 2/30 = 0,067; 1/40 = 0,025. После чего, предположив, что выполняется условие (18), получим: H_3 = 10 (4 + 3 + 5 + 2 + 1) + 15 (3 + 5 + 2 + 1) + 15 (5+ 2 + 1) + 30 (2 + 1) + 30 (1) = 555. В итоге — $H_0(0)$ = 0 + 0 + 555 = 555.



Дерево вариантов.

При расчете нижней границы $H_1(P_1)$ на первом ярусе дерева вариантов для вершины $p_1 = 1$ по формулам (21), (22) имеем: $H_1 = 0$; $H_2 = (10 + 15)(4 + 5 + 2 + 3 + 1) = 375$. Для решения вспомогательной оптимизационной задачи (23) предварительно необходимо исключить строку и столбец табл. 2, соответствующие нулевому пункту отправления и 1-му пункту назначения, скорректировать значения приводящих констант (13) — (15) и в соответствии с теоремой 4 добиться выполнения условия (17). После чего, в предположение (18) получим: $H_3 = 15(3 + 5 + 2 + 1) + 30(5 + 2 + 1) + 30(2 + 1) + 40(1) = 535$. Тогда нижняя граница для первой вершины первого яруса будет следующей: $H_1(1) = 0 + 375 + 535 = 910$.

Аналогично определяются нижние границы и для остальных вершин первого яруса дерева вариантов. Последовательность расчетов показана в табл. 3. Анализ полученных оценок показывает, что вершина 4 первого яруса имеет наименьшее значение нижней границы. В соответствии со стратегией локально-избирательного ветвления [9] из этой вершины осуществляются возможные ветвления к вершинам второго яруса.

Таблица 3

r	P_r	H_1	H_2	H_3	$H_r(P_r)$	P^*_r	C^0
	1	0	375	535	910		
	2		525	370	895		
1	3		225	550	775		
	4		150	530	680		
	5		450	630	1080	4	
	1	150	180	450	780		
2	2		240	320	710		
	3		300	370	820		
	5		420	435	1005	2	
	1	390	210	125	725		
3	3		350	115	855		
	5		280	150	820	1	
4	3	600	90	35	725		
	5		150	70	820	3	
5	5	690	35	0	725	5	725

При расчете нижней границы $H_2(P_2)$ на втором ярусе дерева вариантов для вершины $p_2 = 1$ по формулам (21), (22) имеем: $H_1 = 10(4 + 5 + 2 + 3 + 1) = 150$; $H_2 = (15 + 0)(4 + 5 + 2 + + 1) = 180$. Для решения задачи (23) исключаем строку и столбец табл. 2, соответствующие 4-му пункту отправления и 1-му пункту назначения, корректируем значения приводящих констант (13)–(15) и добиваемся выполнения условия (17). С учетом таких преобразований получим: $H_3 = 40(5 + 2 + 1) + 30(2 + 1) + 40(1) = 450$. Это дает нам оптимистическую оценку для первой вершины второго яруса — $H_2(1) = 150 + 180 + 450 = 780$. Для второй, третьей и пятой вершин второго яруса расчеты проводятся аналогично. Наименьшую нижнюю границу имеет вершина 2. Она подвергается ветвлению на третий ярус.

Результаты расчета нижних границ для исследуемых вершин и последовательность их ветвления для остальных ярусов при поиске оптимального маршрута на дереве вариантов показаны в табл. 3. На третьем ярусе вершина $p_3 = 1$ имеет наименьшую нижнюю границу и подвергается ветвлению на 4-й ярус (см. рисунок). В результате на пятом ярусе получаем приближенное решение задачи со значением целевой функции $C^0 = H_5(P_5) = 725$.

Последовательный просмотр показывает, что на дереве вариантов не осталось ни одной неветвленной вершины, нижняя граница которой была бы меньше значения $C^0 = 725$. Отсюда делаем вывод, что в вершине $P_5 = (0, 4, 2, 1, 3, 5)$ достигается оптимальное решение со значением целевой функции $C = C^0 = 725$.

*   *
*

На основе предложенного алгоритма осуществлена программная реализация решения задачи инкассатора на алгоритмическом языке Паскаль.

Следует отметить, что в качестве дальнейших исследований представляется целесообразным обобщение задачи инкассатора на случай использования k транспортных средств при доставке наличности в m пунктов, $1 < k < m$, а также формализация и решение задачи в стохастических и теоретико-игровых постановках [10].

1. *Канаев А. В.* Банковская деятельность в свете теории финансового посредничества: традиции и инновации // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. Вып. 3. С. 113–123.

2. Сайт Сбербанка России. URL: http://www.sbrf.ru/ruswin/collect.htm (дата обращения: 21.12.2009).

3. Доставка и инкассация денежной наличности и других ценностей. URL: http://www.budgetrf.ru /Publications/Magazines/VestnikCBR/2002/vestnikcbr10122002/vestnikcbr10122002060.htm (дата обращения: 21.12.2009).

4. Сайт Северо-Западного банка Сбербанка России. URL: http://www.nwsbrf.ru/departaments/ukoi.asp (дата обращения: 21.12.2009).

5. *Таха Х. А.* Введение в исследование операций. 7-е изд. / Пер. с англ. М.: Вильямс, 2005. 902 с.

6. *Кузин Б. И., Юрьев В. Н., Шахдинаров Г. М.* Методы и модели управления фирмой. СПб.: Питер, 2001. 432 с.

7. *Бабаев А. А.* Упорядочение работ по степени их важности и времени переналадок //Экономика и математические методы. 1990. Т. 26. Вып. 5. С. 902–908.

8. *Бабаев А. А.* Процедуры кодирования и декодирования перестановок // Кибернетика. 1984. № 6. С. 75–76.

9. *Бабаев А. А.* Организация поиска решений на деревьях детерминированной структуры // Электронное моделирование. 1985. № 1. С. 19–25.

10. *Бабаев А. А.* Формализация задачи инкассатора // Актуальные проблемы экономики и новые технологии преподавания. Материалы VIII Международной научно-практической конференции. Т. 3. СПб.: МБИ, 2009. С. 88–90.

Статья поступила в редакцию 21 января 2010 г.