ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.86

В. К. Тютюкин

МИНИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ЦИКЛА ДЛЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКИ С НЕСКОЛЬКИМИ РОБОТАМИ

Задача минимизации производственного цикла для технологической ячейки (ТЯ) была решена нами в предположении только единственного промышленного робота (ПР) [1]. Однако в таких условиях производственная программа выпуска изделий в плановом периоде может оказаться невыполнимой. В настоящей статье задача решается при отказе от указанной жесткой предпосылки, что значительно расширяет область применения результата.

Предварительные общие сведения и результаты для однопредметного производства

Технический состав ТЯ и характеристика ее элементов. *Технологическая ячейка* – это такая ячейка, в которой выполняется только одна технологическая операция, причем это осуществляется на нескольких станках (с ЧПУ), являющихся одинаковыми (т. е. дублерами).

Эта операция является одной из всего комплекса разнообразных технологических операций, выполняемых на некоторой однопредметной поточной линии (ОПЛ).

Технологическое оснащение ТЯ представляет собой указанные одинаковые станки (основное оборудование), вспомогательное оборудование – питатели (П), накопители (Н) и погрузо-разгрузочные ПР. Наличие этих ПР означает, что рассматриваемую операцию на ОПЛ удалось роботизировать («островок автоматизации»). Принимаем, что все указанные технические элементы ТЯ работают безотказно. П предназначается для размещения в нем заготовок или деталей (полуфабрикатов), Н — для изготовленных на станке деталей.

Виктор Константинович ТЮТЮКИН — д-р экон. наук, профессор кафедры экономической кибернетики Экономического факультета СПбГУ. Окончил Математико-механический факультет ЛГУ (1964) и аспирантуру кафедры экономической кибернетики ЛГУ (1972). В Университете работает с 1965 г. Кандидатскую диссертацию защитил в 1973, докторскую — в 1989 г. Стажировался в университетах Франции (1976). Область научных интересов — производственный менеджмент, гибкие автоматизированные производства, микроэкономика. Автор более 40 научных публикаций, в том числе одного учебного пособия с грифом Министерства высшего и среднего специального образования СССР (в соавторстве) и одной монографии.

Так как в ТЯ выполняется всего одна технологическая операция, то передавать детали со станка на станок не нужно и поэтому около каждого станка имеется свой Н и П (в результате чего дополнительные устройства перед станками для временного хранения межоперационных оборотных заделов не требуются). Обе единицы этого вспомогательного оборудования в каждой их паре располагаются вблизи друг от друга, но на некотором расстоянии от станка.

Станки (обозначим через c их количество в ТЯ, $c > 1$) располагаются по линейной схеме, т. е. вдоль некоторой прямой. Они должны быть разбиты на группы, каждая из которых (вместе с имеющимися около них Н и П) поручается для обслуживания «своему» роботу. Таким образом, ПР являются подвижными многостаночниками, так как они должны передвигаться вдоль фронта «своих» станков, П и Н. Если в группе имеется более одного станка, то их целесообразно считать соседними (смежными, расположенными подряд друг за другом), ибо тогда маршруты движения ПР являются непересекающимися (ПР «не мешают» друг другу).

ПР являются специализированными, ибо функционируют с группой одинаковых станков. Действительно, они выполняют обслуживающие (вспомогательные) операции (а именно, как видно из их названия, загрузку и разгрузку) для всего остального оборудования ТЯ — как основного (станков с ЧПУ), так и вспомогательного (П и Н). Полное обслуживание данного станка означает выполнение для него роботом следующих четырех операций: доставка из П заготовки или детали к станку, загрузка станка соответственно заготовкой или деталью, разгрузка станка по окончании изготовления детали на нем, перенос изготовленной на данном станке детали в Н. При этом, как уже отмечено выше, учитывается обслуживание и вспомогательного оборудования (разгрузка П и загрузка Н и необходимые повороты манипулятора робота). Так как все эти обслуживающие операции одинаковы по содержанию, т. е. не зависят от того, для какого станка они выполняются, то такие ПР являются *взаимозаменяемыми* (могут обслуживать любой станок). В терминах теории массового обслуживания это означает, что пучок линий (роботов) априори является *полнодоступным* (т. е. любая линия может обслужить любой поступающий вызов), и, следовательно, имеется единая система массового обслуживания (СМО) и *бригадная* форма многостаночного обслуживания. Однако она должна быть разбита на несколько однолинейных СМО с *индивидуальной* формой многостаночного обслуживания.

Из сказанного выше следует, что структура рассматриваемой ТЯ (т. е. взаимное расположение в пространстве всего ее оборудования, компоновка всех единиц ее оборудования между собой) имеет вид, показанный на рис. 1, на котором d означает время движения ПР от любого станка к соседнему (предыдущему или последующему) порученному ему (для обслуживания) станку.

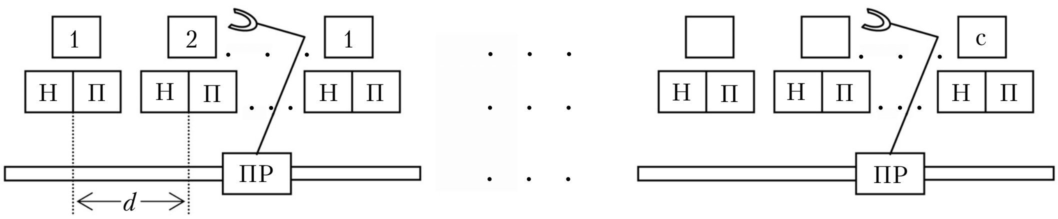


Рис. 1. Структура ТЯ.

Исходные данные для ТЯ. Для ТЯ известны следующие значения: a — трудоемкость (нормативная) выполнения операции (на любом станке-дублере внутри нее) одного предмета, т. е. штучная трудоемкость, принимаемая и за фактическое время выполнения операции, мин; $r^{\max}$ — наибольшее допустимо возможное значение ритма; c — количество станков в ТЯ (уже введенное выше) является известным, ибо выбирается минимально возможным, удовлетворяющим стандартным ограничениям однопредметного производства, т. е. вычисляется, как известно, с помощью величины $r^{\max}$ по формуле

$$c =]a/r^{\max}[, \tag{1}$$

где d — время движения ПР (уже введенное выше) от любого станка к соседнему (предыдущему или последующему) порученному ему (для обслуживания) станку.

Для штучного времени справедливо представление $a = v + m$, где v — время обслуживания роботом любого станка-дублера (выполнения для него указанных выше четырех обслуживающих операций с учетом обслуживания П и Н перед ним); m — машинное время выполнения операции по изготовлению детали на любом станке-дублере.

Заметим, что все компоненты времени v не накладываются друг на друга во времени и их трудоемкости являются известными величинами [1, с. 136–137], однако априори неизвестно, выполняются ли они непрерывно (подряд) друг за другом, т. е. сконцентрированы ли они (а следовательно, и время a) в одном интервале времени.

Целесообразно считать, что машинное время является достаточно большим по сравнению со временем обслуживания станка: $m \gg v$, ибо только в этом случае имеет смысл пытаться организовать многостаночное обслуживание в ТЯ.

Формулы расчета показателей загруженности отдельной технологической операции, т. е. частного случая многооперационного процесса, справедливые как для штучной, так и для партионной ритмичности производственного процесса, примут вид, приведенный в табл. 1. Справедливость их для ТЯ будет показана ниже.

Таблица 1

Формулы расчета показателей загруженности ТЯ

Показатели	Операции (ТЯ):	
	загрузка	простой
Среднее время (за r)	$Z=a$	$P=cr-Z$
Коэффициент	$\xi = Z/(cr)$	$\eta = 1-\xi$

Ритмичность производства и искомые параметры ТЯ. Производственный процесс в ТЯ, как и в любом роботизированном комплексе, организуется как ритмичный, т. е. циклический, периодически повторяющийся. Уровень ритмичности производственного процесса в данном производственном подразделении (в рассматриваемом случае — на любом отдельном станке или на операции в целом) измеряется, как известно, таким календарно-плановым нормативом, как *период оборота (*продолжительность цикла), т. е. (по определению) промежутком времени наименьшей длины, через который повторяются все выполняемые в нем работы в одной и той же последовательности.

Ритмичность в ТЯ, как и в любом роботизированном комплексе, является *штучной*, т. е. на любом станке через один и тот же промежуток времени (период оборота для станка) повторяется изготовление отдельной штуки предмета. При этом штучные ритмичности (периоды оборота, циклы) на дублерах внутри операции будем считать *одинаковыми* — R. Это допущение означает следующее.

1. Программа выпуска предмета распределяется *поровну* между дублерами внутри рассматриваемой операции (и, следовательно, они загружены одинаково).

2. R является штучной ритмичностью (периодом оборота) и операции в целом (т. е. некоторой характеристикой всей операции или, все равно что, ТЯ).

3. R выражается через штучный ритм r по следующей очевидной формуле:

$$R = cr. \tag{2}$$

Значение r — это искомое неизвестное. Следовательно, неизвестным является, как следует из формулы (2), и значение вспомогательного (производного от r) параметра R. Другими искомыми неизвестными выступают значения следующих параметров: S — количество роботов-многостаночников ($s = 1:S$), k_s — количество станков, которое целесообразно поручить для обслуживания s-му ($s = 1:S$) многостаночнику.

Требования к действиям (КГ работы) многостаночников. Эти требования являются одинаковыми для всех многостаночников. Поэтому укажем требования для одного из них (s, $1 \le s \le S$), причем это достаточно сделать только на один цикл. Продолжительность его (R) является пока неизвестной.

Так как производство на каждом из станков, поручаемых данному роботу-многостаночнику (впрочем, как и на всех станках, имеющихся в ТЯ), продвигается на одну штуку за каждый цикл R, то в течение него робот должен проделать следующие действия (три требования к нему).

1. Побывать на всех k_s поручаемых ему станках (возможно, даже несколько раз на каждом из них — с целью полного их обслуживания). Заметим, что в случае $k_s = 1$ (т. е. когда роботу поручается только один станок) робот является, естественно, стационарным (неподвижным).

2. Полностью обслужить при этом каждый из них (в частности, запустив на нем в производство одну деталь), затратив на это время v (необязательно сконцентрированное, как уже отмечалось выше, в одном интервале времени).

3. Вернуться (в силу ритмичности работы многостаночника) в конце цикла R к первому станку (из числа обслуживаемых им станков).

Как видно из этих требований к работе многостаночника, маршрут его движения от первого поручаемого ему станка до возвращения к нему же в конце цикла можно разбить на две части: путь от этого первого станка до последнего поручаемого ему — путь «туда» (вперед) и путь от последнего до первого поручаемого многостаночнику станка — путь «обратно» (назад).

Очевидно, что каждый станок, поручаемый для обслуживания многостаночнику, кроме последнего, посещается им в каждом цикле более одного раза, даже если маршрут движения многостаночника является прямолинейным, при котором имеет место двухразовое посещение станков: первый раз – на пути «туда» и второй – на пути «обратно». Последний же поручаемый ему станок посещается им только один раз, ибо у него он совершает поворот и начинает движение в обратную сторону.

В связи с требованием 2 заметим, что обслуживающие операции для всех закрепленных за многостаночником станков должны выполняться им, очевидно, в непересекающиеся промежутки времени, т. е. последовательно друг за другом, не накладываться друг на друга во времени (как это должно иметь место и для отдельного станка, что уже было отмечено выше), т. е. не должно быть накладок работ по исполнителю (в первом цикле, а следовательно, и во всех последующих циклах). При этом их суммарная трудоемкость с добавкой времени движения робота по пути «туда» и «обратно» (т. е. общий объем полезной работы в цикле) должна укладываться в период оборота R. Это неравенство является специфическим для организации многостаночного обслуживания, и в формализованном виде оно должно, очевидно, входить в экономико-математическую модель (см. ниже). При его выполнении соответствующий КГ работы многостаночника называется *допустимым*. При этом подразумевается, что нет накладок друг на друга во времени смежных работ и по станку (а в случае многооперационного производства – и по детали), что должно иметь место на любых линиях, т. е. даже и без многостаночного обслуживания).

Концентрация обслуживающих операций для станка. Все компоненты времени v выполняются, не накладываясь друг на друга во времени, но не обязательно непрерывно друг за другом. Однако, как показано в упомянутой выше статье [1, с. 137], для ТЯ имеется возможность выполнять их подряд (непрерывно) друг за другом, т. е. выполнять их и только их в некотором едином интервале времени (такая структура времени обслуживания называется *простейшей*) и обслуживать каждый станок за одно его посещение роботом, из чего вытекают *следствия*:

1) можно ограничиться прямолинейным маршрутом движения робота (являющимся кратчайшим по длине и времени на него) как на пути «туда», так и на пути «обратно»;

2) посещение, за которое происходит полное обслуживание станка, необходимо должно быть на пути «туда», т. е. обслуживание происходит в первое из двух посещений станка.

Выполнение этих двух свойств и способствует минимальности производственного цикла.

Правила построения КГ работы многостаночника. Указанные выше следствия из возможности концентрированного выполнения обслуживающих операций для станка позволяют уточнить сформулированные выше же требования к действиям многостаночника и сформулировать правила построения КГ работы на пути его движения как «туда», так и «обратно».

На пути «туда» этими правилами являются следующие.

1. Все k_s станков, поручаемых для обслуживания s-му многостаночнику, посещаются им последовательно друг за другом, т. е. в порядке возрастания их номеров (1, 2, ..., k_s) (при локальной их нумерации для каждого многостаночника), и следовательно, начиная со станка 1.

Это правило вытекает из прямолинейности маршрута движения робота.

2. При указанном посещении станка робот полностью обслуживает его, затратив на это v единиц концентрированного времени.

В КГ работы ТЯ величину v можно показывать в виде единого целого отрезка (являющегося горизонтальной стороной прямоугольника, изображающего это время обслуживания), не выделяя таким образом, в частности, время обслуживания П и Н, а следовательно, и не показывая само это вспомогательное оборудование, что упрощает КГ.

Так как за временем обслуживания (v) сразу начинается машинное время (m), то получается концентрация выполнения в едином интервале и штучного времени (a) и оно представляется в КГ в виде единого отрезка.

Согласно определению периода оборота, выполнение штучного времени a на любом дублере внутри рассматриваемой операции (а следовательно, и выполнение времени его обслуживания v роботом и, в частности, запуск каждого следующего экземпляра предмета) осуществляется через промежуток времени длиной R. Моменты запуска экземпляров предмета на данном станке внутри операции образуют арифметическую прогрессию с разностью R, т. е. имеем, в терминах теории массового обслуживания, регулярный входящий поток. Тогда можно выбирать момент запуска на станке только первого (на этом станке) экземпляра предмета. После такого выбора течение производственного процесса на этом станке является полностью детерминированным, однозначным.

3. Обслуживание первого из поручаемых роботу станков (станка 1) начинается, естественно, с начала цикла (продолжительностью R), а на всех последующих станках – исходя из принципа «непрерывности по исполнителю».

На пути «обратно» (т. е. при возвращении к первому станку из числа порученных роботу станков) робот обслуживающих операций не производит, а только движется (непрерывно, без простоев) в исходную позицию.

В конце периода оборота (R) у многостаночника может быть некоторый простой, который является, очевидно, концентрированным, что удобно для подналадки робота.

Задача о куче камней. Приведем здесь формулировку этой задачи, ибо она будет использована (хотя и в модифицированном, обобщенном виде) в дальнейшем изложении. Имеется n камней, вес каждого из которых известен — a_j ($j = 1 : n$). Требуется распределить их на заданное число куч m ($m < n$) так, чтобы вес самой тяжелой из них был минимальным. Для решения этой задачи известен весьма эффективный алгоритм [2].

Экономико-математическая модель многостаночного обслуживания

Экстремальная задача для ТЯ, как и для любого роботизированного комплекса, состоит в нахождении *схемы обслуживания* (т. е. порядка выполнения роботами всех обслуживающих операций, указанных выше), при которой величина производственного цикла минимальна.

Ограничения на основные искомые параметры ТЯ. Искомое значение штучного ритма (r) должно удовлетворять, прежде всего, следующим общим ограничениям однопредметного производства:

$$a/c \le r \le r^{\max}. \tag{3}$$

Число станков, поручаемых многостаночникам (k_s, $s = 1 : S$), удовлетворяет следующему уравнению:

$$\sum_{s=1}^{S} k_s = c. \tag{4}$$

Связь искомых k_s и R выражается неравенством

$$k_s v + 2d(k_s - 1) \le R \quad (s = 1 : S). \tag{5}$$

Оно является необходимым и достаточным условием существования допустимого КГ работы многостаночника, что вытекает из указанного выше требования к организации работы многостаночника, состоящего в том, что суммарное время его работы (обслуживания и поступательного движения «туда» и «обратно») на всех порученных ему станках (левая часть неравенства (5)) не превосходит периода оборота ТЯ (правая часть неравенства (5)). При этом в левой части неравенства (5) первое слагаемое (величина $k_s v$) является, в силу допустимости КГ (при которой обслуживание станков выполняется в непересекающиеся промежутки времени), временем обслуживания всех порученных многостаночнику станков, а второе слагаемое (величина $2d(k_s - 1)$) есть время для прямолинейного маршрута движения робота «туда» и «обратно» (который имеет место согласно указанному выше следствию 1 из возможности полного обслуживания станка за однократное посещение его роботом).

Система ограничений (3)–(5) является совместной, но неопределенной, т. е. имеет бесчисленное множество решений.

Неравенства (5) запишем, с учетом формулы (2) для R, в следующем виде:

$$k_s \frac{v + 2d}{c} - \frac{2d}{c} \le r \quad (s = 1 : S). \tag{6}$$

С учетом этого запишем ограничения (3) и (5) в виде двустороннего ограничения на ритм:

$$\max(\bar{r}, \tilde{r}) \le r \le r^{\max}, \tag{7}$$

где

$$\bar{r} = a / c, \tag{8}$$

$$\tilde{r} = \frac{v + 2d}{c} \max_{1 \le s \le S} k_s - \frac{2d}{c}. \tag{9}$$

Итак, получили систему ограничений (4) и (7).

Целевая функция (ЦФ) задачи. В качестве ЦФ выберем период оборота производственного процесса в ТЯ, который следует минимизировать: $R \to \min$. Покажем, что для этого достаточно решить задачу

$$\tilde{r} \to \min, \tag{10}$$

где $\tilde{r}$ находится по формуле (9).

Для этого, прежде всего, заметим, что исходная задача $R \to \min$ равносильна задаче $r \to \min$, что вытекает из формулы (2), в правой части которой первый множитель является постоянной величиной. Эта новая задача показывает, что величина r должна принимать минимальное значение из интервала (7), т. е.

$$r = \max(\bar{r}, \tilde{r}), \tag{11}$$

и, следовательно, эта новая задача принимает вид $\max(\bar{r}, \tilde{r}) \to \min$. Величина $\bar{r}$, фигурирующая в этом выражении, как видно из формулы (8), выражается через исходные данные и, следовательно, она является постоянной, известной (причем не превосходящей величины $r^{\max}$). Поэтому для решения полученной задачи $\max(\bar{r}, \tilde{r}) \to \min$ и достаточно решить задачу $\tilde{r} \to \min$.

ЦФ (10) означает выравнивание времени работы (обслуживания и движения) многостаночников. Заметим, что для случая, когда многостаночниками являются рабочие (а не роботы), такая ЦФ способствует и выравниванию их зарплат, что является справедливым ввиду выполнения ими однотипных (обслуживающих) работ, требующих одинаковой квалификации.

Отметим связь полученной задачи (4), (7), (10) с задачей о куче камней. В ней следует считать: камнем — станок, исходной (большой) кучей камней — множество всех станков в ТЯ (и, следовательно, в этой куче имеется c камней), отдельной кучей камней –

множество станков, поручаемых тому или иному многостаночнику (k_s — количество камней в s-й куче). Для введения понятия «веса кучи камней» и далее «веса камня» запишем неравенство (5) или, все равно что, равносильное ему неравенство (6) в следующем виде:

$$k_s \hat{v} \le r + \frac{2d}{c} \ (s = 1{:}\ S), \tag{12}$$

где

$$\hat{v} = \frac{v + 2d}{c}. \tag{13}$$

Из неравенства (12) следует, что вес s-й кучи (суммарный вес камней, попавших в нее) – это величина в его левой части: $k_s\hat{v}$. Следовательно, весом любого камня следует считать величину $\hat{v}$, рассчитываемую по формуле (13).

Из формулировки задачи видно, что она чем-то похожа (имеет общее), а чем-то отличается (имеет специфическое) от задачи о куче камней.

Общими в обеих задачах являются следующие факторы:

— поручение станка только одному какому-либо многостаночнику (помещение камня в одну какую-либо кучу);

— поручение станка любому многостаночнику (помещение камня в любую кучу);

— совпадение ЦФ (выравнивание загрузки многостаночников и весов куч);

— исходная (большая) куча камней – известна заранее.

Проверим выполнение последнего из этих факторов. Именно, покажем, что охватить многостаночным обслуживанием возможно все станки, имеющиеся в ТЯ. Действительно, из формул (12) и (13) (являющихся, напомним, необходимым и достаточным условием охвата группы станков многостаночным обслуживанием) и второго неравенства в (7) имеем следующую необходимую цепочку неравенств:

$$\frac{v + 2d}{c} = \hat{v} \le k_s \hat{v} \le r + \frac{2d}{c} \le r^{\max} + \frac{2d}{c}.$$

Сравнивая ее начало и конец, имеем необходимое условие охвата станка многостаночным обслуживанием: $v/c \le r^{\max}$. Это неравенство выполняется, ибо оно получается из формулы (1) таким образом:

$$c =]a / r^{\max}[\ge a / r^{\max} = (v + m) / r^{\max} \ge v / r^{\max} \text{ и, следовательно, } v/c \le r^{\max}.$$

Отличиями же первой задачи от второй являются:

— количество многостаночников (S), т. е. маленьких куч, заранее не задается;

— наличие ограничения на веса куч (ограничение (12)) и косвенного ограничения (снизу) на количество куч.

Решение задачи

Выбор значений искомых параметров ТЯ. Выбор количества многостаночников (S) и количества станков, поручаемых каждому из них (k_s, $s = 1{:}\ S$), осуществим на основе решения задачи о куче камней. Так как количество многостаночников (куч) в рассматриваемой задаче, как отмечалось выше, заранее неизвестно (в отличие от задачи о куче камней в стандартной постановке), то в качестве его начального (возможно, лишь предварительного) значения выберем оценку снизу для количества куч. Для получения этой оценки проделаем следующие два действия.

1. Найдем вес всех (т. е. исходной большой кучи) камней, используя формулу (13):

$$c\hat{v} = c\frac{v+2d}{c} = v + 2d.$$

2. Оценим сверху вес любой (s-й, $s = 1:S$) маленькой кучи камней, используя основное неравенство (12):

$$k_s\hat{v} \le r + \frac{2d}{c} \le r^{\max} + \frac{2d}{c}.$$

Обозначим последнюю величину (подправленное значение величины $r^{\max}$) в этой цепочке неравенств:

$$\hat{r} = r^{\max} + 2d/c. \tag{14}$$

Таким образом, вес каждой маленькой кучки должен не превосходить величины $\hat{r}$. Следовательно, искомой оценкой снизу является величина $S_0 =](v + 2d)/\hat{r}[$.

Далее решаем задачу о куче камней с этим количеством куч S_0, т. е. распределяем c камней на S_0 куч так, чтобы веса куч были, по возможности, одинаковыми.

Так как в рассматриваемой задаче все камни одинаковы по весу (см. формулу (13)), т. е. имеется частный случай задачи о куче камней, то выравнивание весов куч равносильно выравниванию количеств камней в кучах. При этом очевидно, что самой тяжелой кучей (т. е. вес которой не меньше, чем вес любой другой кучи) является та, в которой камней не меньше, чем в любой из остальных куч, т. е. в которой имеется K_{S_0} камней, где $K_{S_0} = \max\limits_{1\le s\le S_0} k_s$. Очевидно, что $K_{S_0} =]c/S_0[$. Так, например, при $c = 5$ и $S_0 = 3$ получим $K_3 = \max\limits_{1\le s\le 3} k_s =]5/3[= 2$ и, следовательно, в двух кучах имеется по два камня (две самые тяжелые кучи), а в третьей куче — один камень.

Таким образом, оптимальным значением ЦФ рассматриваемой задачи (весом самой тяжелой кучи) является величина $\hat{v}K_{S_0}$. Она либо не превосходит (первый случай), либо больше (второй случай) величины $\hat{r}$.

В первом случае, используя формулы (14), (13) и (9) при $S = S_0$, получим выполнение неравенства $\tilde{r} \le r^{\max}$, а следовательно, и неравенства (7) (т. е. интервал для выбора значения ритма не пуст), и тогда полагаем $S = S_0$.

Во втором случае получается, что количество куч S_0 является не достаточным, а лишь предварительным и, следовательно, его нужно увеличивать. Поэтому далее решаем задачу о куче камней с количеством куч S_0+1. В самой тяжелой куче имеется $K_{S_0+1} =]c/(S_0+1)[$ камней и, следовательно, ее вес равен величине $\hat{v}K_{S_0+1}$. Он либо не превосходит (первый случай), либо больше (второй случай) величины $\hat{r}$.

В первом случае полагаем $S = S_0$+1, а во втором — продолжаем аналогичный процесс.

В результате получим окончательное количество куч (многостаночников) – S и количество камней в каждой из них — k_s ($s = 1: S$). Кроме того, будет известно и оптимальное значение ЦФ (вес самой тяжелой кучи) в последней решенной задаче о куче камней — $\hat{v}K_S$, которое, согласно построению, не превосходит величины $\hat{r}$. В этом случае, как уже установлено выше, выполняется и неравенство $\tilde{r} \le r^{\max}$.

Значение ритма линии (r) находим по формуле (11), т. е. полагаем $r = \max(\bar{r}, \tilde{r})$. Такое значение ритма, естественно, удовлетворяет второму из ограничений (7): $r \le r^{\max}$.

Итак, найдены значения основных параметров ТЯ при организации на ней многостаночного обслуживания.

Далее находим значение вспомогательного параметра – периода оборота производственного процесса на любом станке, т. е. ТЯ в целом, по формуле (2): $R = cr$.

Используя эту формулу, проверим, что показатели загруженности ТЯ имеют вид, приведенный в табл. 1.

Абсолютные показатели загруженности (строка 1 табл. 1) достаточно рассмотреть, как обычно для ритмичного производства, за период оборота, в данном случае — за R. За промежуток времени такой длины (cr) время загрузки на операции (т. е. на всех ее c дублерах) составляет ca единиц времени (ибо на каждом дублере за этот промежуток времени изготавливается одна деталь, имеющая трудоемкость a единиц времени). Следовательно, среднее время загрузки за один ритм r составит $Z = (ca)/c = a$. Формула в клетке (1,1) табл. 1 выполняется. Формула в клетке (2,1) (коэффициент загрузки операции или, все равно что, любого дублера внутри нее, ибо все они загружены одинаково) этой таблицы тоже выполняется: $\xi = a/(cr) = Z/(cr)$. Итак, получили, что формулы в столбце 1 табл. 1 выполняются. Следовательно, выполняются формулы и в столбце 2, ибо они являются следствием (дополнительными показателями) формул в столбце 1.

Построение оптимального КГ работы ТЯ. КГ работы ТЯ складывается из КГ работы всех роботов-многостаночников, а также одностаночников, если таковые окажутся. Существование допустимых КГ для многостаночников обеспечивается выполнением для них условий (5). Для различных возможных случаев оптимальные КГ для многостаночников (учитывающие описанные выше требования к их действиям) показаны на рис. 2 и 3.

Случай 1: $\bar{r} \ge \tilde{r}$ (рис. 2).

Найдем величину цикла (R), используя формулы (2), (11) и (8):

$$R = cr = c\max(\bar{r}, \tilde{r}) = c\bar{r} = c\frac{a}{c} = a.$$

Как видно, рассматриваемый случай равносилен выполнению равенства $r = \bar{r}$ (штучный ритм r определяется величиной $\bar{r}$) или равенства $R = a$ (величина цикла определяется штучной трудоемкостью). Это означает, что «узким местом» (т. е. полностью загруженным и потому определяющим величину цикла) является станок (любой из них, ибо все они тождественны). Все же ПР имеют простои ($П_s$, $s = 1:S$).

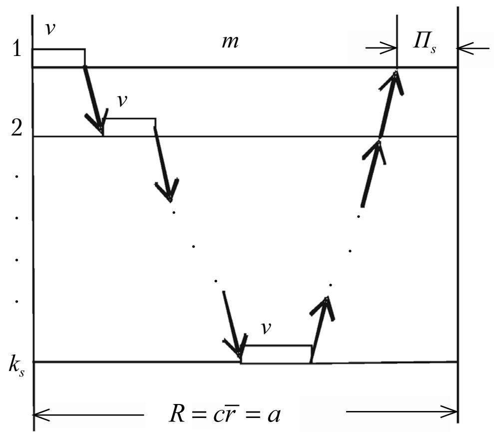
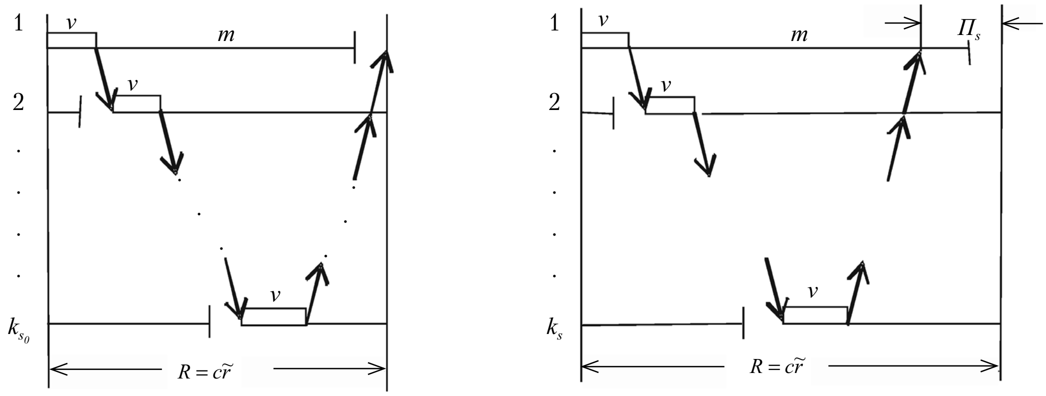


Рис. 2. КГ для робота-многостаночника при наличии его простоя.

Примечание: стрелки — движение робота.

Случай 2: $\tilde{r} \ge \bar{r}$ (рис. 3).

В этом случае для величины цикла имеем: $R = cr = c\max(\bar{r}, \tilde{r}) = c\tilde{r}$. Как видно, рассматриваемый случай равносилен выполнению равенства $r = \tilde{r}$ (штучный ритм r определяется величиной $\tilde{r}$). Это означает, что «узким местом» является один из роботов, а именно тот из них, который выполняет больший объем работ (обслуживания станков и движения) по сравнению с другими роботами. Обозначим его номер через s_0 и покажем КГ его работы (рис. 3, а)). Как видно из этого рисунка, момент возврата робота s_0 в исходную позицию, т. е. к первому порученному ему для обслуживания станку, в конце цикла совпадает с моментом окончания цикла. Любой же из остальных роботов (менее загруженный, т. е.



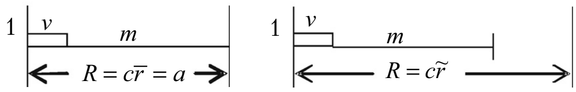
а) б)

Рис. 3. КГ для робота-«узкого места» (а)
и остальных роботов-многостаночников (б).

Примечание: жирные стрелки — движение робота.

не являющийся «узким местом») $s \neq s_0$ ($k_s < k_{s_0}$) уже будет иметь некоторый простой, сконцентрированный в конце цикла (рис. 3, б)) (Π_s, $s \neq s_0$).

Как видно, КГ, приведенные на рис. 2 и 3, являются допустимыми, ибо в них нет накладок друг на друга времен обслуживания станков соответствующим роботом.



а) б)

Рис. 4. КГ для робота-одностаночника
при «узком месте» — станке а)
и роботе-многостаночнике б).

КГ работы одностаночников (стационарных роботов), если таковые окажутся, т. е. при $k_s = 1$ (рис. 4), для случая, когда «узким местом» является станок (см. рис. 2) или робот-многостаночник (см. рис. 3, а)), приведены, соответственно на рис. 4, а) и б).

Показатели загруженности роботов (многостаночников и одностаночников). Формулы расчета этих показателей приведены в табл. 2.

Таблица 2

Формулы расчета показателей загруженности роботов

Показатели	Многостаночник *s* (за *r*):		Одностаночник (за *R*):	
	занятость	простой	занятость	простой
Среднее время	$Z_s^{мн} = k_s\hat{v} - 2d/c$	$P_s^{мн} = r - Z_s^{мн}$	$Z^{одн} = v$	$P^{одн} = R - Z^{одн}$
Коэффициент	$\xi_s^{мн} = Z_s^{мн}/r$	$\eta_s^{мн} = 1 - \xi_s^{мн}$	$\xi^{одн} = Z^{одн}/R$	$\eta^{одн} = 1 - \xi^{одн}$

Проверим формулу, например, в клетке (1,1) этой таблицы. Время занятости многостаночника за цикл R ($R = cr$), согласно левой части формулы (5), составляет величину $k_s v + 2d(k_s - 1)$. Следовательно, за один ритм (r) среднее время его занятости

$$Z_s^{мн} = \frac{k_s v + 2d(k_s - 1)}{c} = \frac{v + 2d}{c} k_s - \frac{2d}{c} = \hat{v} k_s - \frac{2d}{c},$$

т. е. доказываемая формула верна. Аналогично легко проверяется справедливость и остальных формул в табл. 2.

---

1. *Тютюкин В. К.* Минимизация производственного цикла для роботизированных ячеек и линий // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2008. Вып. 2. С. 133–139.
2. *Романовский И. В.* Алгоритмы решения экстремальных задач. М., 1977. С. 248–251.

Статья поступила в редакцию 6 мая 2010 г.