

## ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.6

*А. В. Воронцовский*

### СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Экономический рост является важнейшей характеристикой общественного производства при любых хозяйственных системах. Экономический рост — это наиболее полное выражение количественного и качественного совершенствования общественного производства за определенный период времени. Экономический рост означает также, что в каждый рассматриваемый период времени в какой-то степени удается в той или иной форме преодолеть существующую ограниченность имеющихся ресурсов и обеспечить увеличение объемов производства и удовлетворение более широкого круга потребностей человека. В связи с трудностями измерения всего процесса экономического развития в макроэкономике чаще всего анализируют экономический рост, хотя это лишь один из критериев экономического развития. Экономический рост есть важнейшая составляющая экономического развития. Но быстрый или, наоборот, нулевой и даже отрицательный экономический рост не всегда говорит о быстром экономическом развитии или экономической деградации. Для этого требуется дополнительный специальный анализ.

Экономический рост в настоящее время является наиболее часто применяемым критерием экономического развития, который может измеряться как в натуральном, так и в стоимостном выражении. Первый способ позволяет исключить влияние инфляции, но не позволяет получить обобщающий показатель экономического роста. Недостатками второго такого способа являются невозможность полностью избежать влияния инфляции, а также проблемы структурных и качественных изменений в материальных и человечес-

---

**Алексей Владимирович ВОРОНЦОВСКИЙ** — д-р экон. наук, профессор кафедры экономической кибернетики. Окончил Экономический факультет ЛГУ (1970). Канд. экон. наук (1975), д-р экон. наук (1990), профессор (1993). Основные научные интересы — теория инвестиций и финансирования, управление рисками, макроэкономическое моделирование. Автор более 186 научных публикаций, в том числе 2 монографий (одна в соавторстве) и 15 учебных пособий (соавтор 2 пособий с грифом Минвуза). Получил грант Института «Открытое общество» на подготовку и издание учебного пособия «Инвестиции и финансирование», имел гранты Минвуза РФ для исследований по методам обоснования инвестиционных решений (1994–1996), стипендии Немецкого общества академических обменов для стажировки в Германии (1996, 1999, 2002, 2005, 2008 гг.). Награжден знаком «Почетный работник высшего образования РФ», Почетной грамотой Минвуза РФ, медалью в память 300-летия Санкт-Петербурга.

ких факторах производства. Тем не менее именно стоимостные показатели в основном используются во всем мире при измерении, анализе и моделировании процессов экономического роста.

### **Закономерности развития современной экономики, оказывающие влияние на моделирование экономического роста**

В процессе развития теории и моделирования экономического роста необходимо учитывать процессы, проходящие в современной экономике. В экономике развитых стран мира можно выделить ряд закономерностей и тенденций, наличие которых в конечном итоге потребовало изменения представлений об экономическом росте и разработки новых подходов к его моделированию. К их числу можно отнести следующие.

Во-первых, речь идет о развитии процессов глобализации, которые оказывают достаточно противоречивое влияние на развитие макроэкономики и экономический рост.

Развитие процессов глобализации представляет собой объективный процесс, который, с одной стороны, приводит к относительному выравниванию спроса и предложения, а также других параметров на различных рынках, а с другой — порождает взаимное влияние изменения рыночной конъюнктуры на различных национальных или международных рынках. Процесс глобализации оказывает относительно стабилизирующее влияние на экономические условия развитых и развивающихся стран. Первые получают возможность за счет экспорта капитала и товаров и т. п. поддерживать устойчивое экономическое положение, а вторые повышают свой технический и технологический уровень за счет привлечения товаров и технологий из заграницы, обеспечивают экономическое развитие в значительной части за счет зарубежного капитала и миграции рабочей силы. Но глобализация порождает и определенные дестабилизирующие проблемы, связанные с тем, что в ее условиях локальные проблемы и кризисы в отдельных странах могут оказывать существенное негативное влияние на экономический рост и стабильность макроэкономических условий, на равновесие на товарных, финансовых и иных рынках, других стран и регионов.

Во-вторых, существенная особенность современной экономики связана с ускоренным обновлением производства, интенсивным внедрением новой техники и технологии, что является также характерной чертой современного научно-технического прогресса. Подобные условия порождают дополнительные риски для отдельных предпринимателей и отдельных стран и регионов в целом, которые в конечном итоге могут приводить к нарушению условий стабильного макроэкономического роста.

В-третьих, предприниматели для защиты от неожиданностей и угрозы разорения вынуждены диверсифицировать свои вложения, расходовать значительные суммы капитала на обоснование перспективных направлений развития технологии и технического оснащения производства, разнovidностей выпускаемой продукции. При этом возникают дополнительные риски, также обуславливающие возможные нарушения условий стабильного экономического роста.

Важнейшей особенностью всех этих процессов является существенное возрастание влияния факторов неопределенности и риска на макроэкономический рост, что требует учета влияния подобных факторов при формировании моделей макроэкономического роста.

В-четвертых, специфика современной инновационной экономики и особенности развития научного технического прогресса обуславливают значительное сокращение жизненного цикла поколений техники и технологии [1]. Это приводит к относительному снижению роли и значения чисто технологических моделей роста при прогнозировании

экономического роста и требует переноса центра тяжести проблемы прогнозирования экономического роста с учета прошлого развития за определенный период на повышение роли и значения текущего или исходного состояния экономики.

В этих условиях для оптимального регулирования экономики и анализа условий ее развития необходимо иметь методы, позволяющие прогнозировать развитие экономики в целом и ее отдельных секторов с учетом указанных выше особенностей. Использовать при этом экономико-математические модели экономического роста должны учитывать влияние факторов неопределенности и риска, прежде всего связанные с влиянием постоянно изменяющейся конъюнктуры различных внутренних и внешних рынков, а также воздействие других факторов, обусловленных развитием процессов глобализации.

В качестве такого аппарата могут быть использованы экономико-математические модели макроэкономического роста с использованием стохастических уравнений динамики основных показателей.

В данной статье рассматриваются основные подходы к моделированию экономического роста при условии учета неопределенности макроэкономического развития, обусловленной колебаниями будущей конъюнктуры различных товарных, финансовых и других рынков, предполагающие непрерывный учет фактора времени. Теоретические основы непрерывного моделирования макроэкономических процессов были заложены в работах Р. Солоу и Т. Свена, посвященных построению известной модели Солоу–Свена [2; 3], общая парадигма которой определила развитие непрерывных моделей макроэкономического роста на протяжении всей второй половины XX в.

В настоящее время можно выделить два основных направления развития моделирования экономического роста, которые основаны на непрерывном учете фактора времени и предполагают учет влияния факторов неопределенности и риска в форме использования стохастических процессов для описания ряда переменных.

Во-первых, речь идет о построении и анализе единой оптимизационной модели экономического роста экономики в целом, заданной на бесконечном периоде, предполагающей применение специальных математических методов ее анализа.

Во-вторых, можно отметить подход, основанный на выделении тех или иных основных экономических агентов и предполагающий учет взаимосвязей между ними. Основы этого подхода были заложены довольно давно и связаны с анализом условий равновесия в детерминированных моделях с множеством экономических единиц или, говоря современным языком, экономических агентов<sup>1</sup>, в числе которых выделяют потребителей (домашние хозяйства), производителей (фирмы), государство, внутренние и внешние товарные и финансовые рынки и т. п.

В настоящее время модели экономического роста, учитывающие тех или иных отдельных агентов, предполагают либо использование оптимизационных моделей агентов с учетом случайных процессов, либо описание поведения отдельных агентов на основе случайных процессов. Взаимосвязи агентов в процессе макроэкономического моделирования, определяющие условия общего экономического равновесия и формирования оптимальных равновесных траекторий, представлены на рис. 1.

В рамках моделей роста с учетом выделения агентов обычно рассматривают модели так называемых репрезентативных, или типичных, агентов, для которых могут быть сформированы те или иные агрегированные оптимизационные задачи или выделены отдельные уравнения, описывающие поведение выделенных агентов. В рамках подобного подхода важной дополнительной задачей является обоснование условий конкурентного равновесия в рассматриваемой экономической системе. Основы анализа этого равновесия

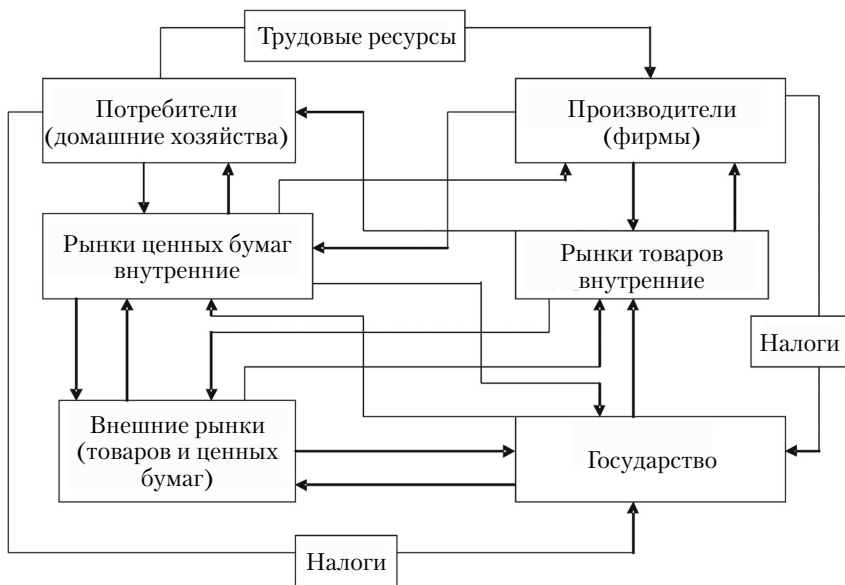


Рис. 1. Принципиальная схема взаимосвязей агентов в процессе макроэкономического моделирования.

применительно к технологическим детерминированным моделям и были представлены в указанных выше работах М. Моришимы и Х. Никайдо. В настоящее время формальный анализ условий экономического роста на основе моделей репрезентативных агентов существенно осложняется тем фактом, что часть переменных представляет собой стохастические процессы.

### Базовая стохастическая модель экономического роста

В данном разделе рассмотрим одну из современных моделей экономического роста, предложенных американским экономистом С. Тарновским, в рамках которой находят свое отражение несколько случайных факторов [6]. Эта модель опирается на неоклассический подход, т. е. представляет собой замкнутую агрегированную модель, но, с другой стороны, позволяет в определенной степени учесть факторы неопределенности и макроэкономического риска в форме стохастических уравнений и стохастических процессов.

К предпосылкам модели относятся следующие: 1) объектом моделирования выступает единая экономика, которая объединяет домашние хозяйства и производство; 2) при анализе производства учитывается только производственный капитал, ресурсы труда отдельно не учитываются; 3) объем потребления изменяется с не стохастической скоростью; 4) ставка процента по облигациям является детерминированной; 5) прирост выпуска продукции рассматривается с учетом стохастического фактора; 6) прирост налогов зависит от случайного фактора; 7) в качестве критерия используется максимизация потребления на бесконечном периоде.

Введем следующие обозначения:  $B(t)$  – стоимость государственных облигаций на момент  $t$ ;  $K(t)$  – сумма производственного капитала на момент  $t$ ;  $dY$  – изменение выпуска продукции за период  $(t, t+dt)$ ;  $C(t)$  – объем потребления в момент  $t$ ;  $C(t)dt$  – прирост (скорость изменения) потребления за период  $(t, t+dt)$ ;  $i$  – ставка процента по облигациям,

$iBdt$  — процентный доход по облигациям за период  $(t, t+dt)$ ;  $dN$  — сумма налогов, которая выплачивается за период  $(t, t+dt)$ .

Задача состоит в том, чтобы максимизировать потребление на бесконечном периоде при условии выполнения бюджетного ограничения, которое учитывает стохастический характер переменных и предполагает, что доходы от вкладываемого капитала в форме роста выпуска продукции и процентного дохода по облигациям расходуются на потребление и уплату налогов.

Поскольку потребление не является случайной величиной, то общую форму записи критерия оптимальности можно представить так:

$$E_0 \int_0^{\infty} U(C) e^{-\rho t} dt \Rightarrow \max, \quad (1)$$

причем выполняются обычные предпосылки относительно производных функции полезности  $U'(C) > 0, U''(C) < 0$ .

Ограничения задачи формируются на основе приростов всех рассматриваемых показателей, причем стохастический характер ограничения определяется тем, что ряд из них представляют собой случайный процесс.

В общем случае бюджетное ограничение состоит в том, что приросты доходов за счет выпуска продукции и процентов по облигациям расходуются на финансирование приростов производства, потребления, вложений в облигации и уплаты налогов

$$dY + iBdt = dB + dK + Cdt + dN.$$

В оригинале это ограничение записывается в следующей форме:

$$dB + dK = dY + iBdt - Cdt - dN. \quad (2)$$

В уравнении (2) два параметра связаны со случайными факторами. Во-первых, выпуск продукции описывается стохастическим процессом, формальное уравнение которого имеет следующий вид:

$$dY = F(K)dt + H(K)dy. \quad (3)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (3) определяется детерминированной компонентой  $F(K)$ , которая характеризует средний выпуск продукции в течение периода  $(t, t+dt)$ . При этом функция  $F(K)$  должна удовлетворять обычным предпосылкам относительно производственных функций

$$F'(K) > 0, F''(K) < 0.$$

Второе слагаемое в правой части характеризует влияние случайного фактора, который определяется в данном случае компонентой  $dy$ , причем речь идет о независимом во времени нормальном стохастическом процессе с параметрами  $(0, \sigma_y^2 dt)$ .

Конкретные оценки влияния случайного фактора на выпуск продукции существенно зависят от параметра волатильности  $H(K)$ . Обычно используют две предпосылки относительно значения этого параметра.

Можно предположить, во-первых, что параметр  $H(K)$  имеет постоянное значение. При этом влияние случайного фактора не зависит от размера используемого производственного капитала. Во-вторых, функция  $H(K)$  линейно зависит от объема капитала. Тогда и влияние случайного фактора на объем производства пропорционально размеру капитала. От принятия той или иной предпосылки зависит получение конкретного решения поставленной задачи.

Кроме того, случайный фактор учитывается при определении суммы выплачиваемых налогов. Предполагается, что сумма налогов удовлетворяет следующему стохастическому уравнению:

$$dN = N(t) + dv, \quad (4)$$

где  $N(t)dt$  — это средний уровень налогов, которые будут заплачены за период  $(t, t+dt)$ , а  $dv$  — независимый во времени нормальный стохастический процесс с параметрами  $(0, \sigma^2_v dt)$ .

С учетом всех полученных ограничений поставленную задачу можно записать так:

$$\begin{aligned} E_0 \int_0^{\infty} U(C)e^{-\rho t} dt &\Rightarrow \max; \\ dB + dK &= dY + iBdt - Cdt - dN; \\ dY &= F(K) + H(K)dy; \\ dN &= Ndt + dv. \end{aligned} \quad (5)$$

Поставленную задачу можно преобразовать с учетом общей суммы капитала. Обозначим общий объем капитала через  $W=B+K$ , а долю производственного капитала в этой сумме через  $n$  и  $1-n$  соответственно, где

$$n = \frac{K}{W}, \quad 1-n = \frac{B}{W}.$$

Преобразуем теперь ограничения задачи (5) с учетом введенных параметров и подставим второе и третье условия задачи в первое. Тогда получим

$$dW = F(K)dt + H(K)dy + iBdt - Cdt - Ndt - dv = F(nW)dt + H(nW)dy + i(1-n)Wdt - Cdt - Ndt - dv = [F(nW) + i(1-n)W - C - N]dt + H(nW)dy + dv.$$

Тогда задачу (5) можно переписать так:

$$\begin{aligned} E_0 \int_0^{\infty} U(C)e^{-\rho t} dt &\Rightarrow \max; \\ dW &= (F(nW) + i(1-n)W - C - N)dt + H(nW)dy + dv; \\ W(0) &= W_0, n(0) = n_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение задачи (6) требует использования специальных математических методов, необходимость применения которых обусловлена тем, что ограничения задачи содержат соответствующие стохастические процессы.

Проблемы решения задач вида (6) не опровергают принципиально возможности использования непрерывных стохастических моделей для описания развития экономики и совершенствования представления об экономическом росте и устойчивом развитии в условиях возрастающего влияния факторов риска в современных экономических условиях. Следует иметь в виду, что теория экономического роста в условиях детерминированных моделей носит более законченный и обоснованный характер, а современные подходы, основанные на стохастических моделях, безусловно, представляют собой развитие теории экономического роста.

Наиболее важный результат, который был сформулирован в рамках этого подхода, связан с расширением представления об устойчивом экономическом росте и экономической стабилизации. Условия этого не сводятся, как это получается при анализе модели

Солоу–Свена [7, S. 17–42] и двухсекторных моделей экономического роста [7, S. 200–233], только к поиску постоянных значений выделенных параметров и стационарных траекторий. Они должны быть сформированы как динамично меняющиеся состояния экономики, зависящие от факторов риска, но и обеспечивающие одновременно равновесие на товарных, финансовых и иных рынках. В моделях роста типа (6) и ее модификациях равновесие в экономической системе определяется как развитие вдоль оптимальной траектории, определяемой решениями поставленной оптимизационной задачи вида (6) с учетом условий функционирования различных рынков.

В более конкретном случае на базе условий задачи (6) могут быть сформированы те или иные агрегированные задачи для различных репрезентативных агентов, включая потребителей, производителей, государство, внешние рынки и т. п., о некоторых формах которых речь пойдет далее. В рамках подобного подхода состояние равновесия представляет собой сбалансированное развитие экономической системы, при условии достижения оптимальной траектории развития для каждого выделенного агента. Важную роль при этом играет учет случайных факторов, которые оказывают влияние как на решение задачи вида (6), так и более сложные стохастические модели равновесия, основанные на схеме, приведенной на рис. 1, некоторые особенности построения которых рассмотрим ниже. Однако постановка и анализ часто требуют более детального изучения их соответствия реальным процессам развития макроэкономической динамики, обоснования более адекватных макроэкономическому уровню мер риска и форм их учета в макроэкономических моделях.

### **Моделирование экономического роста с учетом выделения моделей агентов**

В данном разделе обратим внимание на возможности использования стохастических процессов при моделировании экономического роста на основе выделения моделей отдельных агентов. В принципе подобные модели могут быть представлены как в условиях непрерывного времени, так и в дискретном приближении. В современной литературе можно отметить достаточно много работ, которые посвящены построению моделей макроэкономического роста с учетом непрерывного времени, представляющих дальнейшее развитие или модификацию рассмотренной выше базовой модели С. Тарновского с учетом выделения экономических агентов. В ряде работ основное внимание уделяется выбору вида производственной функции и согласованию условий функционирования экономических агентов [8–11]. Другое современное направление моделирования экономического роста, с одной стороны, предполагает учет факторов неопределенности и риска, но с другой — исследует возможности макроэкономического моделирования в агрегированной форме, т. е. без детального рассмотрения процесса производства и учета особенностей деятельности отдельных фирм и других подобных агентов, но предполагает выделение и учет тех или иных аспектов макроэкономической политики, в том числе деятельность государства, в частности по вопросам сбора налогов, денежной политики и тому подобным аспектам [12; 13].

В настоящем разделе рассмотрим экономико-математическую модель, в которой производится совмещение идей, представленных данных в рамках двух указанных выше подходов. В основу предлагаемой модели положены ряд условий и факторов современных моделей экономического роста, рассмотренных в современных статьях [14–16], в том числе посвященных анализу двухсекторных моделей роста [17].

В проводимом исследовании выделим четыре основных агента: производство, потребление, государство и внешние рынки. Роль государства в процессе моделирования

макроэкономического роста связана с учетом его влияния на рынки производимой продукции, его взаимосвязей с внешними рынками в процессе экспорта и импорта. Большое значение имеют сбор налогов и возможности эмиссии государственных облигаций, а также монетарная политика государства.

Основные предпосылки рассматриваемой модели: 1) в ее рамках выделены четыре основных агента: производство (фирма), потребитель, внешние рынки и государство; 2) существует внешний товарный рынок и рынок облигаций; 3) рассматривается модель открытой экономики, которая специализируется на производстве одного товара и в которой потребитель потребляет как продукт внутреннего производства, так и второй импортируемый продукт<sup>2</sup>; 4) производство конечной продукции осуществляется в соответствии со стохастической производственной функцией Кобба–Дугласа; 5) рассматриваются условия так называемой «АК» модели; 6) цена импортируемого товара и цена облигаций на внешнем рынке описываются броуновским движением.

### **Условия производства**

Производство продукции определяется стохастической производственной функцией Кобба–Дугласа, заданной неявно в следующей форме:

$$dY = \alpha(L\bar{K})^\beta K^{1-\beta}(dt + dy) = F(dt + dy), \quad 0 < \beta < 1, \quad (7)$$

где  $K$  – основной капитал,  $\bar{K}$  – средняя величина основного капитала в экономике,  $(L\bar{K})$  – предложение труда,  $dy$  – независимый во времени, нормально распределенный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_y^2 dt$  за период  $dt$ . Данная стохастическая производственная функция имеет постоянную эффективность от укрупнения масштабов производства. К тому же в условиях равновесия, когда  $K = \bar{K}$ , выпуск является линейной функцией от величины основного капитала. Тогда производственная функция имеет вид

$$d\bar{Y} = \alpha L^\beta \bar{K}(dt + dy) = \bar{F}(dt + dy) = f\bar{K}(dt + dy), \quad (8)$$

где  $f = F/K = \bar{F}/\bar{K} = \alpha L^\beta$  – постоянное число.

Предполагается, что ставка заработной платы  $a$  за период  $(t, t + dt)$  равна ожидаемому предельному физическому продукту труда за этот период, а именно:

$$a = E\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{K=\bar{K}} = \beta \alpha L^{\beta-1} \bar{K} = \frac{\beta f \bar{K}}{L}. \quad (9)$$

Общая доходность труда  $dA$  за данный период, таким образом, является не случайной величиной и определяется как

$$dA = a dt = E\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{K=\bar{K}} dt = \beta \alpha L^{\beta-1} \bar{K} dt = \frac{\beta f \bar{K}}{L} dt. \quad (10)$$

Индивидуальная доходность капитала  $dR_K$  за период  $(t, t + dt)$  с учетом обесценивания капитала  $\delta$  определяется по остаточному принципу

$$dR_K = \frac{d\bar{Y} - \delta \bar{K} - L dA}{\bar{K}} = r_K dt + du_K, \quad (11)$$

где

$$r_K = (1 - \beta)f - \delta; \quad du_K = f dy. \quad (12)$$



При этом ставка заработной платы постоянна в течение всего периода  $(t, t + dt)$ , а колебания выпуска влияют в основном только на доходность капитала.

### **Задача потребителя**

Потребитель в условиях рассматриваемой модели потребляет как продукт внутреннего производства, так и импортируемый продукт. Предполагается, что относительная цена импортируемого продукта  $P$  порождается процессом броуновского движения

$$\frac{dP}{P} = \pi dt + dp, \quad (13)$$

где  $\pi$  — ожидаемое изменение относительной цены в момент времени  $t$ ,  $dp$  — независимый во времени, нормально распределенный случайный процесс с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_p^2 dt$ .

У агента есть доступ к внешнему рынку капитала, на котором он может получать кредиты или продавать свои облигации. Предполагается, что величина долга измеряется в единицах иностранного товара, следовательно, цена покупаемых облигаций на внешнем рынке также определяется уравнением (13).

Предполагается, что ставка процента по внешнему займу в объеме  $PZ$  имеет вид

$$dR_F = r_F dt + du_F, \quad (14)$$

где  $r_F = i^* + \pi + \omega(PZ/W)$ ;  $du_F = dp$ ; (15)

$i^*$  — экзогенно заданная процентная ставка на внешнем рынке, а  $\omega$  — премия за кредит, которая зависит от конкретной страны, причем  $\omega' > 0$ ;  $\omega'' > 0$ . Для развитой страны она предполагается равной нулю.

Определим прирост благосостояния потребителя за период  $(t, t+dt)$ . При этом будем учитывать, что потребитель покупает за этот период  $C_D(t)dt$  внутреннего товара и  $C_M(t)dt$  импортируемого товара; покупает акции и продает облигации на внешнем рынке, а также выплачивает налоги.

Налоговые платежи задаются следующим уравнением:

$$dT = \tau(t)dt + Wd\upsilon. \quad (16)$$

Ставка налогообложения  $\tau(t)$  взимается одновременно, независимо от решений агента, в то время как стохастическая компонента  $Wd\upsilon$  возрастает с ростом благосостояния агента, причем  $d\upsilon$  — стохастический процесс, распределенный по нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией  $\sigma_\upsilon^2 dt$ .

Тогда можно, учитывая условие (18), записать, что накопление благосостояния потребителя записывается следующим образом:

$$dW = W(n_K dR_K - n_F dR_F) + aLdt - (C_D + PC_M)dt - \tau dt - Wd\upsilon, \quad (17)$$

где  $n_K = K/W$  — доля стоимости портфеля ценных бумаг, сохраняемая в форме акций, а  $n_F = PZ/W$  — доля стоимости портфеля, сохраняемая в форме проданных облигаций<sup>3</sup>.

Выделим в качестве переменных модели, во-первых, соотношение потребления внутреннего и внешнего товара к объему благосостояния  $C_D/W$ ,  $C_M/W$ , а, во-вторых, параметры структуры портфеля ценных бумаг  $n_K$ ,  $n_F$ . Разделим правую и левую части условия (19) на объем благосостояния и преобразуем правую и левую части полученного соотношения к следующему виду:

$$\frac{dW}{W} = \psi dt + dw. \quad (18)$$

Можно показать, что детерминированная компонента накопления благосостояния, приведенная в условии (18), имеет следующий вид:

$$\psi = n_K r_K - n_F r_F + \frac{aL}{W} - \frac{(C_D + PC_M)}{W} - \frac{\tau}{W}. \quad (19)$$

Случайный процесс  $dw$ , приведенный в правой части условия (18), можно представить в следующей форме:

$$dw \equiv fn_K dy - n_F dp - d\upsilon, \quad (20)$$

при этом необходимо заранее определить доходности активов, а также значения дисперсий и ковариации их доходности.

Рассматриваемая задача потребителя заключается в выборе такого относительного объема потребления и структуры портфеля активов, чтобы максимизировать ожидаемое значение дисконтированной полезности за бесконечный период

$$E \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma} (C_D^\theta C_M^{1-\theta})^\gamma e^{-\rho t} dt, \quad -\infty < \gamma < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (21)$$

где  $\rho$  — непрерывная ставка дисконтирования,  $\gamma$  — коэффициент несклонности к риску,  $-\infty < \gamma < 1$ ;  $\theta$  — эластичность потребления внутреннего продукта,  $0 < \theta < 1$ .

Окончательно задача потребителя состоит в максимизации функции полезности (21) за счет выбора соотношений потребления и благосостояния и структуры портфеля ценных бумаг при условии, что его благосостояние накапливается в соответствии с условием (18):

$$\begin{aligned} E \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma} (C_D^\theta C_M^{1-\theta})^\gamma e^{-\rho t} dt &\Rightarrow \max, \\ \frac{dW}{W} &= \psi dt + dw; \\ n_K - n_F &= 1; \\ -\infty < \gamma < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned} \quad (22)$$

### Соотношения для государства

Предполагается, что государство планирует свои расходы  $G$  в соответствии со стохастическим уравнением

$$dG = F(K, L)[gdt + g' dy] + dz; \quad 0 < g < 1, \quad 0 < g' < 1, \quad (23)$$

где  $dz$  — независимый во времени нормально распределенный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_z^2 dt$ . В данное выражение включены две стохастические компоненты государственных расходов: первая ( $dy$ ) представляет собой государственное регулирование производственных шоков в процессе проведения стабилизационной политики, а вторая ( $dz$ ) — независимые стохастические источники государственных расходов.

Предполагается, что государство поддерживает сбалансированный бюджет, и поступление налогов за период совпадает с государственными расходами

$$dG = dT. \quad (24)$$

Если подставить соответствующие части соотношений (16) и (23) в правую и левую части соотношения (24) и приравнять, соответственно, стохастическую и детерминированную части, то можно выделить детерминированную компоненту требуемой ставки налога

$$\tau = gfK \quad (25)$$

и соответствующий стохастический процесс

$$dv = fn_k(gdY + dz). \quad (26)$$

Заметим, что в условии (25) средняя ставка налога  $\tau$  растет вместе с равновесным ростом капитала и, следовательно, вместе с ростом благосостояния.

Дальнейший анализ представленной модели может быть связан с тем, что необходимо определить, насколько взаимосвязаны результаты решений, которые могут быть получены при отдельном анализе условий производства, оптимизации потребления и обоснования политики государства.

### **Некоторые возможности аппроксимации условий модели роста**

С. Тарновский отмечает, что при анализе стохастических уравнений предлагается нормальное распределение остаточных членов соответствующих стохастических уравнений, что означает, что моделируемые случайные процессы будут винеровскими процессами или броуновским движением. Он указывает, что на это предположение опирается практически вся непрерывная стохастическая оптимизация, в том числе и макроэкономическая [7].

При этом с точки зрения условий представленных моделей, а также отдельных стохастических уравнений, которые содержатся в их описаниях или в моделях отдельных агентов, можно отметить различные методы их решения.

Во-первых, речь может идти о возможностях использования тех или иных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. Во-вторых, могут быть использованы определенные преобразования стохастических уравнений к виду, допускающему применение леммы Ито, для которого решение существует. В-третьих, при анализе функции полезности, заданной на бесконечном периоде, может быть использован специальный подход, основанный на построении так называемого стохастического уравнения Беллмана, которому при определенных условиях должны удовлетворять параметры оптимальных траекторий задачи (6) или (22).

Применение методов подобного типа к условиям представленных моделей часто требует введения специальных условных формальных дополнительных предпосылок, только при выполнении которых искомое решение может существовать.

В данной работе для построения и анализа непрерывных траекторий развития рассматриваемых экономических показателей предлагается использовать дискретную аппроксимацию соответствующих непрерывных уравнений, учитывающих те или иные стохастические процессы, в форме рекуррентных соотношений. Подобные уравнения позволяют строить траектории, учитывающие начальное состояние экономики и его изменение по узлам рассматриваемой временной решетки. Для получения реализаций соответствующего стохастического процесса предлагается использовать компьютерную имитацию соответствующих случайных величин при заданной форме его определения.

Покажем возможности преобразования стохастических уравнений рассмотренных выше моделей в дискретную форму рекуррентных соотношений, которые позволяют осуществлять анализ траекторий экономического роста в режиме имитации [19, с. 340].

Проиллюстрируем предлагаемый подход на примере представленной выше производственной функции в форме (8), которую представим в следующей форме:

$$dY = fKdt + fKdy. \quad (27)$$

Для преобразования уравнения (27) возьмем интеграл от правой и левой части этого уравнения по некоторому фиксированному промежутку времени длительностью  $\Delta$ , который начинается в момент  $t$  и заканчивается в момент  $t + \Delta$ . Тогда получим

$$\int_t^{t+\Delta} dY = \int_t^{t+\Delta} fKdt + \int_t^{t+\Delta} fKdy = fK\Delta + fK \int_t^{t+\Delta} dy. \quad (28)$$

Левую часть уравнения (28) представим в форме

$$\int_t^{t+\Delta} dY = Y_{t+\Delta} - Y_t.$$

Учитывая, что  $dy$  есть приращение винеровского процесса, его можно представить в виде  $dy = \sigma_y dW$ , причем дискретное приращение случайного процесса  $dW$  также представляет собой случайный процесс, который распределен по нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией, пропорциональной длительности выделенного промежутка. Тогда можно записать

$$(W_{t+\Delta} - W_t) \sim N(0; (t + \Delta - t)) \sim \sqrt{\Delta}N(0,1). \quad (29)$$

Тогда, учитывая полученные результаты, аппроксимирующую дискретную форму исходного стохастического уравнения (27) можно записать так:

$$Y_{t+\Delta} = Y_t + fK\Delta + fK\sqrt{\Delta}\sigma_y u_{yt}, \quad (30)$$

где  $u_{yt}$  — реализация случайного процесса, подчиняющегося стандартному нормальному закону, описывающая влияние случайного фактора на промежутке  $[t, t + \Delta]$ .

Вторая форма дискретной аппроксимации уравнения производственной функции может быть записана так:

$$Y_{t+\Delta} = Y_t + fK\Delta + fK\sqrt{\Delta}\xi_{yt}, \quad (31)$$

где  $\xi_{yt}$  — реализация случайного процесса, подчиняющегося нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной  $\sigma_y^2$ , описывающая влияние случайного фактора на промежутке  $[t, t + \Delta]$ .

Уравнение (30), которое представляет собой рекуррентное соотношение, можно применить для дискретной имитации уравнения (27) на временной решетке с шагом, равным  $\Delta$ , используя нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю, для имитации которых в пакете Microsoft Excel можно использовать встроенную статическую функцию «НОРМСТРАСП».

В другом случае для проведения имитации по уравнению (31) требуются нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием 0 и различными стандартными отклонениями. Для их генерации в пакете MS Excel будем использовать функцию «НОРМОБР», которая возвращает значение нормально распределенной случайной величины с указанным математическим ожиданием, стандартным отклонением и вероятностью, причем в качестве значений этой вероятности будем брать значения последовательности псевдослучайных чисел Фора<sup>4</sup>.

Используемые в процессе имитационных расчетов исходные данные делятся на две группы: 1) статистические данные, характеризующие состояние экономики рассматривае-

мой страны в начальный момент времени, в том числе ВВП, государственные расходы, налоговые поступления и т. п., которые изменяются при переходе от одного периода к другому в соответствии с заданными соотношениями; 2) данные, являющиеся константами на протяжении всего рассматриваемого периода, указывающие на потребительские предпочтения в указанный промежуток времени, такие как несклонность к риску, норма временного предпочтения и т. п. При проведении экспериментальных расчетов были использованы данные по экономике Дании. В качестве начального периода рассматривается конец 1999 г. За единичный период выбирается один месяц, всего рассматривается 120 месяцев, т. е. 10-летний период. Для сравнения сопоставим результаты имитации за 10 лет с фактическим изменением ВВП Дании за период с 2000 по 2009 г. За объем выпуска продукции примем ВВП Дании, в качестве капитала выберем основные средства фирм Дании. При оценке дисперсии функции выпуска вначале была построена дисперсия остатков авторегрессионного уравнения ВВП Дании первого порядка, но так как этот ряд в соответствии с ADF тестом оказался не стационарным, была рассчитана дисперсия остатков авторегрессионного уравнения первой разности ВВП Дании первого порядка. При этом получившуюся дисперсию еще следует поделить на технологический коэффициент и на средний основной капитал в экономике за рассматриваемый период. Все необходимые исходные данные представлены в таблице.

#### Исходные данные для расчетов

Название	Обозначение	Значение
<i>Фактические данные по экономике Дании за 1999 г. (млн DKK)</i>		
ВВП	$Y_0$	1 252 811
Капитал	$K_0$	3 764 865
<i>Условные данные</i>		
Технологический коэффициент в функции выпуска	$\alpha$	0,25
Эластичность выпуска по труду	$\beta$	0,576
Капиталовооруженность	$f$	0,235 279
Труд	$L$	0,9
<i>Расчетные параметры</i>		
Дисперсия в функции выпуска	$\sigma_y^2$	0,0003014

Учитывая заданный шаг временной решетки, равный одному месяцу, т. е. 1/12 части года, окончательно полученный дискретный вариант уравнения, аппроксимирующего исходное уравнение (8), можно записать так:

$$Y_{t+\Delta} = Y_t + fK(1/12) + fK\sqrt{(1/12)}\xi_{y,t}. \quad (32)$$

Ниже представлены результаты имитационных расчетов по данным экономики Дании, всего выполнено 20 итераций, построены прогнозы на 2000–2008 гг. и проведено сравнение с фактическим значением рассматриваемых показателей<sup>5</sup>. На рис. 2 показаны результаты имитационного моделирования ВВП Дании за рассматриваемый период.

Принципиально тенденции изменения ВВП по условиям модели, и в реальных условиях (рис. 3), представленные на обоих графиках, отражают экономический рост. Но, очевидно, что в условиях модели заложены более жесткие требования к увеличению объемов производства, обусловленные фиксированными значениями ряда параметров

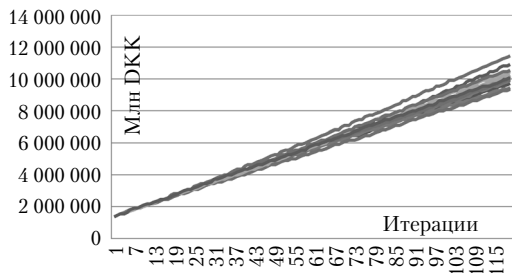


Рис. 2. Имитация ВВП по модели (шаг один месяц).

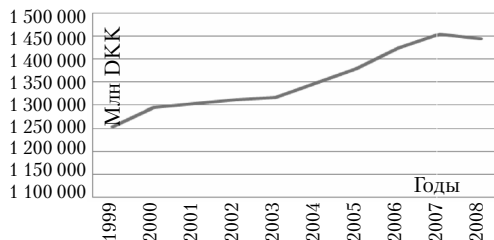


Рис. 3. Фактический ВВП Дании за период 1999–2008 гг.

модели, в будущем предполагается провести исследование их влияния на рост ВВП в рамках данной модели.

При анализе тенденций изменения основного капитала аналогично уравнению (31) была построена дискретная форма стохастического уравнения прироста благосостояния (17) и использовано соотношение  $K_t = n_k W_t$ . При сопоставлении фактической тенденции изменения основного капитала в Дании (рис. 5) и полученных в процессе имитации расчетных траекторий его роста (рис. 4) можно сделать вывод, что расчетные траектории в определенном смысле соответствуют фактической тенденции изменения этого показателя за рассматриваемый период, хотя и наблюдается довольно широкий разброс расчетных траекторий.

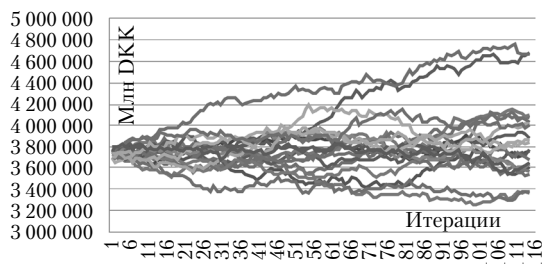


Рис. 4. Имитация капитала по модели (шаг один месяц).

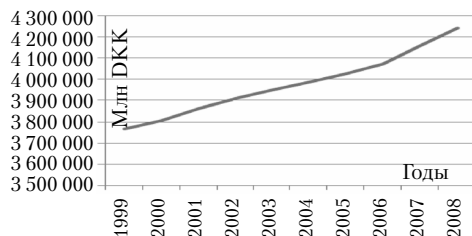


Рис. 5. Фактический капитал Дании за период 1999–2008 гг.

Представленные результаты расчетов показывают, что в процессе применения методов дискретной аппроксимации могут быть получены траектории изменения макроэкономических показателей, в определенной степени соответствующие реальной тенденции роста этих показателей. Полученные выводы носят предварительный характер. Для более содержательных выводов и анализа устойчивости полученных траекторий необходимо проведение гораздо большего объема имитационных расчетов.

В целом современное развитие макроэкономического моделирования, связанное с учетом факторов неопределенности и риска, опирается на непрерывный учет фактора времени и предполагает постановку моделей как в форме отдельной оптимизационной задачи на бесконечном периоде, так и в тех или иных формах агентного моделирования, включающих определенные виды стохастических процессов. Формальный анализ моделей подобного типа представляет определенные трудности и связан с введением формальных предпосылок, которые либо не проверяемы, либо заведомо не соответствуют реальным

экономическим условиям. Определенный выход может быть связан с применением дискретной аппроксимации стохастических уравнений в форме рекуррентных соотношений и их анализа в режиме имитации, хотя получаемые при этом результаты носят противоречивый характер и нуждаются в дальнейшем исследовании.

---

<sup>1</sup> Об условиях конкурентного равновесия см., напр.: [4, с. 344–358]; общие условия сбалансированного роста представлены: [5, с. 41–50].

<sup>2</sup> Об особенностях введения подобных предпосылок см.: [18].

<sup>3</sup> Если  $n_f > 0$ , тогда страна является страной-должником, если  $n_f < 0$ , то страной-кредитором.

<sup>4</sup> Подробнее о генерации псевдослучайных чисел Фора см.: [20, с. 137–139].

<sup>5</sup> Экспериментальные расчеты выполнены студенткой 4-го курса С. В. Куликовой.

- 
1. *Воронцовский А. В.* Закономерности развития инновационной экономики и их влияние на современный кризис и пути его преодоления // Финансы и бизнес. 2009. Вып. 4.
  2. *Solow R.M.* A contribution to theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70. P. 65–94.
  3. *Swan T.* Economic growth and capital accumulation // Economic Record. 1956. Vol. 32. P. 334–361.
  4. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика /Пер. с англ. М., 1972. С. 344–358.
  5. *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост /Пер. с англ. М., 1972. С. 41–50.
  6. *Turnovsky S.* Methods of Macroeconomic Dynamics. The MIT Press, 1996.
  7. *Barro Robert J., Sala-i-Martin Xavier.* Wirtschaftswachstum / Über. Von Engl. München; Wien: Oldenburg, 1998.
  8. *Mondal D., Gupta M.R.* Endogenous imitation and endogenous growth in a North–South model: A theoretical analysis // Journal of Macroeconomics. 2009. Vol. 31. P. 668–684.
  9. *Rao B. B.* Estimates of the steady state growth rates for selected Asian countries with an extended Solow model // Economic Modelling. 2010. Vol. 27. P. 46–53.
  10. *Prommeret A., Smith W.T.* Fertility, volatility, and growth // Economics Letters. 2005. Vol. 87. P. 347–353.
  11. *Kenc T.* Taxation, risk-taking and growth: a continuous-time stochastic general equilibrium analysis with labor-leisure choice // Journal of Economic Dynamics & Control. 2004. Vol. 28. P. 1511–1539.
  12. *Turnovsky S.J., Papazoglou C.* External markets, exchange rate dynamics and the impact of monetary disturbances // Journal of International Money and Finance. 1994. Vol. 13. N 5. P. 499–515.
  13. *Semmler W., Zhang W.* Asset price volatility and monetary policy rules: A dynamic model and empirical evidence // Economic Modelling. 2007. Vol. 24. P. 411–430.
  14. *Benavie A., Grinols E., Turnovsky S.J.* Adjustment costs and investment in a stochastic endogenous growth model // Journal of Monetary Economics. 1996. Vol. 38. P. 77–100.
  15. *Stulz R.M.* Interest rates and monetary policy uncertainty // Journal of Monetary Economics. 1986. Vol. 17. P. 331–347.
  16. *Grinols E., Turnovsky S.J.* Optimal government finance policy and exchange rate management in a stochastically growing open economy // Journal of International Money and Finance. 1996. Vol. 15. N 5. P. 687–716.
  17. *Getachew Y. Y.* Public capital and distribution dynamics in a two-sector growth model // Journal of Macroeconomics. 2010. URL: [http://www.sciencedirect.com/science?\\_ob=ArticleURL&\\_udi=B6X4M-4Y3JY8K-1&\\_user=10&\\_coverDate=06%2F30%2F2010&\\_alid=1360970401&\\_rdoc=1&\\_fmt=high&\\_orig=search&\\_cdi=7330&\\_sort=r&\\_docanchor=&view=c&\\_ct=9&\\_acct=C000050221&\\_version=1&\\_urlVersion=0&\\_userid=10&md5=5c9077553e285369648953ad4d595bc8](http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6X4M-4Y3JY8K-1&_user=10&_coverDate=06%2F30%2F2010&_alid=1360970401&_rdoc=1&_fmt=high&_orig=search&_cdi=7330&_sort=r&_docanchor=&view=c&_ct=9&_acct=C000050221&_version=1&_urlVersion=0&_userid=10&md5=5c9077553e285369648953ad4d595bc8) (дата обращения: 10.06.2010).
  18. *Turnovsky S.J., Chattopadhyay P.* Volatility and growth in developing economies: some numerical results and empirical evidence // Journal of International Economics. 2003. N 59. P. 267–295.
  19. *Лью Ю. Д.* Методы и алгоритмы финансовой математики. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2007.
  20. *Воронцовский А. В., Дикарев А. Ю.* Имитационное моделирование условий реальных опционов на основе применения последовательностей Холтона и Фора // Применение математики в экономике: сб. статей. Вып. 17 / Под. ред. А. В. Воронцовского. СПб., 2009.

Статья поступила в редакцию 6 сентября 2010 г.