ФИНАНСЫ, КРЕДИТ, СТРАХОВАНИЕ

УДК 368.01+519.233.5

А. А. Кудрявцев

МОДЕЛИ БЮЛЬМАННА И БЮЛЬМАННА–ШТРАУБА С АЛЬТЕРНАТИВНОЙ СТРУКТУРОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Введение

Оценка страховой премии, и особенно ее основной части — ожидаемой нетто-премии, является важной задачей технико-экономического (актуарного) обоснования операций страхования. Эта задача не тривиальна в силу часто возникающего на практике недостатка статистических данных по прошлым выплатам и, в первую очередь, относительно информации о структуре зависимости в наблюдаемых страховых выплатах. К сожалению, последняя проблема не преодолевается традиционными подходами, принятыми среди практикующих актуариев.

Традиционный актуарный подход к прогнозированию ожидаемой нетто-премии с учетом качества данных основан на оценке коэффициентов регрессии в линейной модели вида[1]

$$\mathrm{E}_{X_{n+1}}\left[X_{n+1} \middle| X_1,\ldots,X_n\right] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\,, \tag{1}$$

где X_i — страховые выплаты по рассматриваемому объекту (страховому подпортфелю) в i-й период наблюдения, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, а α_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, — оцениваемые коэффициенты регрессии. Чаще всего в качестве целевой функции при подгонке используют минимизацию обычного квадратичного критерия

$$Q(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \mathrm{E}_{X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}}\left[\left(X_{n+1} - \alpha_0 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)^2\right]. \tag{2}$$

Нередко решение данной задачи квадратичного программирования находят методом Лагранжа: производные функции $Q(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ приравниваются нулю, в результате чего получается система $n + 1$ линейного уравнения с $n + 1$ неизвестным, которую называют системой нормальных уравнений

Андрей Алексеевич КУДРЯВЦЕВ — канд. экон. наук, доцент кафедры управления рисками и страхования СПбГУ. В 1990 г. окончил Экономический факультет СПбГУ. Сфера научных интересов — актуарный анализ, страхование, управление рисками, экономика здравоохранения. Автор более 100 научных публикаций, включая монографии и учебники (автор и соавтор).

$$\mathrm{E}_{X_{n+1}}[X_{n+1}] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{E}_{X_i}[X_i], \tag{3}$$

$$\mathrm{Cov}[X_{n+1}, X_j] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathrm{Cov}[X_i, X_j], \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Эти условия первого порядка приводят к необходимому условию оптимальности, а условия второго порядка обеспечивают достаточность. В результате система гарантированно имеет решение, которое является оптимальным решением задачи (2).

В общем случае аналитическое решение системы уравнений (3) и (4) не представимо в форме, традиционной для теории оценивания с учетом качества данных, т. е. как среднее взвешенное. Для этого необходимо использовать дополнительные предпосылки. Они часто связаны с определенными формами зависимости между наблюдаемыми страховыми выплатами. В силу того, что оценка сводится к решению системы (3) и (4), соответствующие формы зависимости удобно формулировать в терминах структуры ковариационной матрицы наблюдений.

При этом указанные предпосылки могут не соответствовать особенностям зависимости в наблюдаемых данных. Эта идея стала основой исследования альтернативных подходов к оцениванию с учетом качества данных (см., напр.: [4]). Последнее связано с тем, что возможности применения классических подходов анализа временных рядов для решения рассматриваемой задачи ограничены дефицитом имеющейся информации.

Было несколько попыток сконструировать модель с альтернативной структурой зависимости между прошлыми выплатами, но они, большей частью, концентрировались на так называемых моделях точного оценивания с учетом качества данных, которые базируются на предпосылках о законе распределения ошибок. В частности, Пуркару и Денуи [5] использовали принцип стохастической монотонности в соответствующих моделях для прогноза частот возникновения страхового случая. Зависимость, моделируемая копулой, исследовалась для экспоненциального семейства распределений Фризом и Ваном [6; 7]. Недостатком упомянутых подходов является то, что ослабление одной жесткой предпосылки о нереалистичной структуре зависимости компенсируется в них другой жесткой предпосылкой о распределении ошибок и, в последнем случае, о параметрическом описании формы этой зависимости.

В данной статье предлагается использовать более слабые предпосылки о типе зависимости, чем в традиционном подходе, при отказе от введения каких бы то ни было дополнительных предположений. Иными словами, предлагаемые модели позволяют использовать более широкое множество возможных ковариационных матриц. При этом удалось сохранить традиционный вид оценки (прогноза), а следовательно, обычную интерпретацию всех компонентов модели, что облегчает ее практическое использование.

Модели Бюльманна и Бюльманна–Штрауба

Классический актуарный подход состоит в предположении специфической структуры зависимости, а именно: в относительно простых моделях Бюльманна и Бюльманна–Штрауба делается предположение об условной независимости.

В частности, в модели Бюльманна предполагается $\mathrm{D}[X_j|\Theta] = \sigma^2$ и $\mathrm{Cov}[X_k, X_j|\Theta] = 0$ при $k \neq j$, где Θ — ненаблюдаемая случайная характеристика рассматриваемого объекта (страхового подпортфеля). Иными словами, данное предположение в рамках указанной модели означает, что условная ковариационная матрица диагональна, а ненулевые элементы одинаковы и равны σ^2. В результате безусловная ковариационная матрица для наблюдаемых выплат принимает вид $\sigma^2\mathbf{I} + \nu^2\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T$, где σ^2 — внутригрупповая дисперсия, ν^2 — межгрупповая дисперсия, $\mathbf{I}$ — единичная матрица и $\mathbf{1}$ — вектор-столбец с единичными элементами.

В результате решение системы (3) и (4) представимо при указанных условиях и дополнительном условии $\mu = \mathrm{E}[X_j]$, $j = 1, 2,...,n$, которые определяют модель Бюльманна в следующей простой форме [1; 2; 8]:

$$\hat{X}_{n+1} = \mathrm{E}\left[X_{n+1}\middle|\mathbf{X}\right] = Z\overline{X} + (1-Z)\mu, \tag{5}$$

где $\overline{X}$ — среднее из компонентов вектора прошлых наблюдений $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, т. е. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$, а Z — так называемый коэффициент Бюльманна, характеризующий качество данных (или степень доверия к ним) и определяемый по формуле

$$Z = \frac{nv^2}{nv^2 + \sigma^2}.$$

Очевидно, $0 \le Z \le 1$. При $Z = 0$ качество наблюдаемых данных низкое, актуарий им не доверяет и ориентируется на теоретическое математическое ожидание μ. При $Z = 1$, наоборот, качество данных так велико, что актуарий им доверяет полностью и ориентируется только на них. На практике обычно коэффициент Бюльманна расположен между нулем и единицей, так что для построения прогноза выплат используется компромиссная оценка.

В модели Бюльманна–Штрауба предполагается, что условная дисперсия задается соотношением $\mathrm{D}\left[X_j\middle|\Theta\right] = \sigma^2/w_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где w_j часто понимается как подверженность риску (например, объем подпортфеля). При этом ковариационная матрица все еще диагональна, хотя теперь ненулевые элементы различны. В результате имеем [1; 2; 9]

$$\overline{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j X_j}{\sum_{j=1}^{n} w_j} \text{ и } Z = \frac{v^2\sum_{j=1}^{n} w_j}{v^2\sum_{j=1}^{n} w_j + \sigma^2}.$$

В актуарной практике в этих двух моделях используют эффективные несмещенные оценки параметров μ, σ^2 и v^2. Данный подход популярен среди актуариев в силу его простоты и очевидности интерпретации.

Тем не менее предпосылка о специфической структуре зависимости (диагональном виде ковариационной матрицы) выглядит слишком строгой, так как на практике, очевидно, могут встречаться и другие, более сложные формы зависимости, что может приводить к дополнительным ошибкам оценивания.

В последнее время Вен с соавторами [10] предложили обобщенную модель с постоянными коэффициентами корреляции на основе наилучшей линейной оценки, которая использует предположения о структуре математического ожидания и ковариационной матрицы. Этот подход близок к классическому случаю (имеются небольшие различия в предпосылках). Далее на этот результат будем ссылаться как на версию Вена–Вана–Ю модели Бюльманна или Бюльманна–Штрауба. Вен, Ван и Ю предполагают, что $\mathrm{Cov}\left[X_k, X_j \middle| \Theta\right] = \rho\sigma^2$, $k \neq j$, $\rho < 1$. В этом случае безусловная ковариационная матрица в модели Бюльманна примет вид $(1 - \rho)\sigma^2\mathbf{I} + (\rho\sigma^2 + \nu^2)\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T$, что близко к классическому случаю, но все же слегка отличается от него. Аналогичный результат имеет место и для модели Бюльманна–Штрауба. Доказательство основано на использовании регрессионного анализа, так что условие $\rho < 1$ критично для обеспечения существования матрицы, обратной к ковариационной.

Тем не менее такой подход оставляет открытым вопрос о механизме влияния прошлых данных на прогноз. Подход Вена, Вана и Ю также основан на слишком жестких предпосылках. Во всяком случае, их результаты относительно легко могли бы быть обобщены на случай $\rho = 1$. Предметом данной статьи является обсуждение моделей Бюльманна и Бюльманна–Штрауба на базе более слабых предпосылок и более общей ковариационной матрицы.

Структура зависимости и возможные формы влияния прошлой статистики на прогноз

В классических моделях Бюльманна и Бюльманна–Штрауба возможен только один тип зависимости прогноза от старых данных. Он предполагает выявление специфического смещения для каждой группы и противопоставление его статистике по всему страховому портфелю. Далее такой тип влияния будем называть косвенным, так как ненаблюдаемый случайный параметр θ используется для объяснения связи между прошлыми и будущими выплатами.

Этот специфический тип зависимости является результатом предпосылки об условной независимости. Если от нее отказаться, то возможен прямой механизм влияния прошлых данных на будущие выплаты. Этот механизм основывается на некоторой форме условной зависимости между $\mathbf{X}$ и X_{n+1} (например, на наличии условных корреляций). Указанную зависимость можно объяснить различными факторами, в том числе управленческими аспектами (например, особенностями селекции риска) или спецификой механизма реализации риска (подобного афтершокам после землетрясения).

Другими словами, если не имеется причин предполагать (условную) независимость, необходимо принимать во внимание и косвенный, и прямой механизмы влияния прошлых выплат на будущие. Эта идея проиллюстрирована на рис. 1.

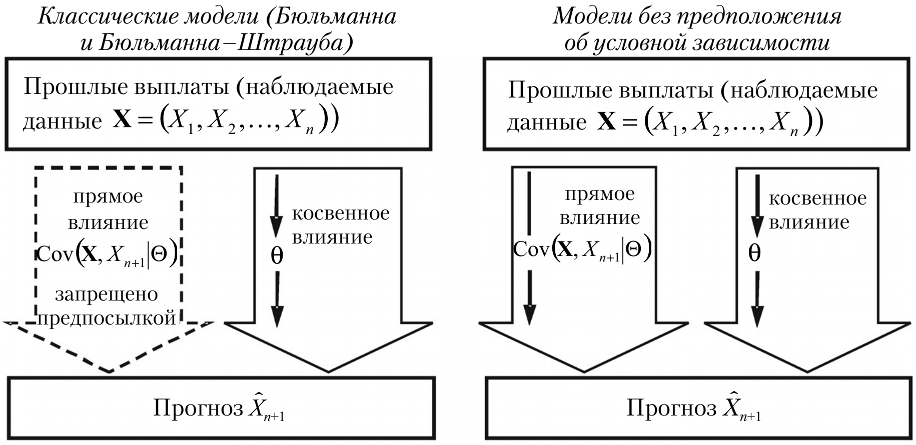

Рис. 1. Противопоставление двух подходов на основе механизма влияния.

Прямой и косвенный механизмы влияния прошлых выплат на будущие рассмотрены далее в контексте частотного и байесовского подходов к статистическому оцениванию.

В контексте байесовской точки зрения целью анализа является совместное распределение (n+2)-мерного вектора $(\Theta, X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1})$, а также полученных на его основе некоторых маргинальных и условных распределений. Важную роль для конструирования последних играет структура зависимости.

Косвенный тип зависимости можно объяснить особенностями апостериорного распределения. Хорошо известно, что при условной независимости оценку можно записать как [1; 2; 3]

$$\mathrm{E}\left[X_{n+1} \middle| \mathbf{X} = \mathbf{x}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_{n+1}|\Theta}(x|\theta) f(\theta|\mathbf{x})\, d\theta\, dx. \tag{6}$$

Эта оценка основана на условной (индивидуальной) плотности $f_{X_{n+1}|\Theta}(x|\theta)$. Апостериорная плотность $f(\theta|\mathbf{x})$ комбинирует априорную информацию и особенности наблюдений. Конкретное значение θ связано с индивидуальной группой риска, к которой принадлежит застрахованный объект. Прошлая статистика обычно содержит информацию о нем в скрытом виде. Другими словами, плотность $f(\theta|\mathbf{x})$ отражает механизм выявления риска, основанный на данных. Этот эффект и называется косвенным влиянием.

В предыдущем рассуждении важно, что плотность $f_{X_{n+1}|\Theta}(x|\theta)$ не зависит от прошлой статистики. Последнее обеспечивается условной независимостью (вне всякой связи с использованием этой предпосылки для конструирования $f(\theta|\mathbf{x})$ как доли от произведения плотностей $f(x_j|\theta)$, $j = 1, 2, \ldots, n$). Если от указанной предпосылки отказаться, подходящее совместное (n+2)-мерное распределение вектора $(\Theta, X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1})$ порождает индивидуальную апостериорную плотность в форме $f_{X_{n+1}|\Theta,\mathbf{X}}(x|\theta, \mathbf{x})$. Влияние прошлой статистики не может теперь сконцентрироваться только на одном компоненте, как это было сделано в формуле (5). Иными словами, $f_{X_{n+1}|\Theta,\mathbf{X}}(x|\theta, \mathbf{x}) = f_{X_{n+1}|\Theta}(x|\theta)$ верно только при условной независимости, но не в общем случае. Эти различия объясняют механизм прямого влияния.

Частотная точка зрения может быть проиллюстрирована схемой дисперсионного анализа, которая обсуждается в контексте актуарных методов в [11]. В соответствии с этим подходом выплату можно представить как $X_{kj} = \mu + \Xi_k + \Xi_{kj}$, где k — номер анализируемой группы застрахованных объектов (подпортфеля), Ξ_k — компонент, описывающий различия между группами, а Ξ_{kj} — компонент, моделирующий вариацию между анализируемым группами. В случае (условной) независимости, естественным выбором в модели будут $\Xi_k = \mathbf{E}[X_{kj}|\Theta] - \mu$ и $\Xi_{kj} = X_{kj} - \mathrm{E}[X_{kj}|\Theta]$. Тогда разложение дисперсии будет идеальным[2], так как $\mathrm{Cov}[\Xi_{ki}, \Xi_{kj}] = 0, i \neq j$ и $\mathrm{Cov}[\Xi_k, \Xi_{kj}] = 0$.

Последнее условие, тем не менее, не выполняется, если структура зависимости более общая. В этом случае компонент Ξ_k разделяется на две части: (a) $\Xi^{\Theta}{}_k = \mathrm{E}[X_{kj}|\Theta,\mathbf{X}] - \mu$ для «чистой» межгрупповой вариации и (b) $\Xi^{\mathrm{X}}{}_k = \mathrm{E}[X_{kj}|\Theta] - \mathrm{E}[X_{kj}|\Theta,\mathbf{X}]$ для внутригрупповой вариации, порождаемой корреляциями между данными. Первая связана с косвенным влиянием, а вторая — с прямым. При (условной) независимости $\Xi^{\mathrm{X}}{}_k \equiv 0$ и, следовательно, $\Xi^{\Theta}{}_{kj} = \Xi_{kj}$. Разложение $\Xi_{kj} = \Xi^{\Theta}{}_{kj} + \Xi^{\mathrm{X}}{}_{kj}$ обеспечивает более точный прогноз X_{kj} при общей структуре зависимости.

Отказ от свойства условной независимости приводит к дальнейшим сложностям в понимании связи между прошлыми и будущими выплатами. И вновь прямой механизм влияния не может быть проигнорирован. К сожалению, Вен с соавторами [10] пренебрегают данным механизмом, так что их результаты получены, как если бы имел место только эффект «чистой» внутригрупповой вариации.

С практической точки зрения наличие обоих типов зависимости означает меньший сдвиг оценки в отношении величины μ и обеспечивает оценку, которая будет ближе к выборочному среднему. Различия в сдвиге пропорциональны $D[\Xi^X_k] > 0$. Важно, что соответствующий безразмерный коэффициент пропорциональности $0 \le \beta \le 1$ будет использован в следующем разделе для получения общей формулы. Аргументация данного раздела приводит к выбору $\beta = 1$. Вен с соавторами [10] предполагают $\beta = 0$ без дополнительных объяснений. Значение β связано со структурой зависимости, которая встречается актуарию в реальной жизни, и должна быть в будущем исследована более внимательно на предмет возможности дробных значений.

Ковариационная матрица со специальной гребневой структурой

Вен и его соавторы [10] получили интересные результаты по модели Бюльманна с ковариационной матрицей $(1-\rho)\sigma^2\mathbf{I} + (\rho\sigma^2 + \nu^2)\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T$ и для модели Бюльманна–Штрауба с матрицей $(1-\rho)\sigma^2\boldsymbol{\Lambda} + \rho\sigma^2\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T\boldsymbol{\Lambda}^{1/2} + \nu^2\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T$, где $\rho = \mathrm{corr}(X_i,X_j|\Theta)$ для каждой пары (i,j), $\rho < 1$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(1/w_1, 1/w_2,...,1/w_n)$, а w_j — вес (например, подверженность риску) для j-й выплаты.

Этот результат может быть обобщен для случая $\rho = 1$, если использовать другой тип доказательства (решения системы нормальных уравнений), а также для более общей формы ковариационной матрицы $a\boldsymbol{\Gamma} + b\,\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T\boldsymbol{\Lambda} + c\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T$, где $\boldsymbol{\Gamma}$ и $\boldsymbol{\Lambda}$ — диагональные матрицы. Эта форма включает в себя разные частные случаи:

1) случай $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{I}$ приводит к версии Вена–Вана–Ю модели Бюльманна, тогда как условная независимость связана с естественным соотношением $a + b = \sigma^2$ и $b = \rho\sigma^2$;

2) случай $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(1/w_1,1/w_2,...,1/w_n)$ представляет собой версию Вена–Вана–Ю модели Бюльманна–Штрауба. Он также связан с условной независимостью при $a = (1-\rho)\sigma^2$ и $b = \rho\sigma^2$, но в условиях гетероскедаксичности, описываемой матрицами $\boldsymbol{\Gamma}$ и $\boldsymbol{\Lambda}$. Случай $\rho = 1$ здесь возможен;

3) случай $\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}\left((\sigma^2 - \lambda_1^2 b)/a, (\sigma^2 - \lambda_2^2 b)/a, \ldots, (\sigma^2 - \lambda_n^2 b)/a\right)$ и $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,..., \lambda_n)$, где λ_1 принимает такие значения, что $\lambda_i\lambda_j b = \rho_{ij}\sigma^2$, порождает специальную структуру зависимости одинаково распределенных случайных величин с условными ковариациями вида $\mathrm{Cov}[X_i,X_j|\Theta] = \lambda_i\lambda_j b$. Значения a и b используются для конструирования подходящей шкалы или как наибольшие общие делители (особо интересен случай $a = 1$ и $b = \sigma^2$).

Важно заметить, что веса во втором случае могут пониматься двояко. Одно понимание, являющееся широко распространенным, состоит в том, что веса представляют собой подверженности риску (объемы соответствующих групп). Этот подход популярен в актуарной литературе. Другое понимание связано с гетероскедаксичностью (также в контексте условной независимости), так что $\rho = b/(a + b)$ и $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2/(a + b), \sigma_2^2/(a + b),..., \sigma_n^2/(a + b))$. Значения $a + b$ также используются для конструирования шкалы (особый интерес представляет случай $a + b = 1$ и, следовательно, $a = 1 - \rho$, $b = \rho$).

Основной результат данного раздела представлен следующими леммами.

Лемма 1. Если выполнены условия:

1) $E_{X_i}[X_i] = \mu$, $i = 1, 2,..., n + 1$,

2) $\mathrm{Cov}[\mathbf{X},\mathbf{X}] = a\boldsymbol{\Gamma} + b\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T\boldsymbol{\Lambda} + c\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T$, где $\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2,..., \gamma_n)$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,..., \lambda_n)$, $a \ge 0$, $b \ge 0$ и $c \ge 0$,

3) $\mathrm{Cov}[\lambda_{n+1}X_{n+1}\mathbf{X}] = b\beta\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{1} + c\mathbf{1}$, $0 \le \beta \le 1$,

то оптимальным решением оптимизационной задачи (2) будет

$$\alpha_0 = \frac{a + h_2 b - h_1 b\beta}{(a + h_2 b)(a + h_0 c) - h_1^2 bc} a\mu,$$

$$\alpha_i = b\frac{\lambda_i}{\gamma_i}\frac{a\beta + h_0 c\beta - h_1 c}{(a + h_2 b)(a + h_0 c) - h_1^2 bc} + \frac{c}{\gamma_i}\frac{a + h_2 b - h_1 b\beta}{(a + h_2 b)(a + h_0 c) - h_1^2 bc}, i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $h_0 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{-1}$, $h_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i/\gamma_i$ и $h_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2/\gamma_i$.

Доказательство. При указанных условиях система нормальных уравнений примет вид:

$$\mu = \alpha_0 + \mu\sum_{i=1}^{n}\alpha_i, \ \lambda_j b\beta + c = \lambda_j b\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i + c\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + a\alpha_j\gamma_j, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Из последних уравнений легко получить следующие формулы:

$$a\alpha_i = b\frac{\lambda_j}{\gamma_j}\left(\beta - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\right) + \frac{c}{\gamma_j}\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right), \tag{7}$$

$$a\lambda_j\alpha_j = b\frac{\lambda_j^2}{\gamma_j}\left(\beta - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\right) + c\frac{\lambda_j}{\gamma_j}\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right).$$

После некоторых простых преобразований имеем

$$\beta - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i = a\frac{(a + h_0 c)\beta - h_1 c}{(a + h_2 b)(a + h_0 c) - h_1^2 bc},$$

$$1 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = a\frac{(a + h_2 b) - h_1 b\beta}{(a + h_2 b)(a + h_0 c) - h_1^2 bc}. \tag{8}$$

Подставляя эти выражения в формулу (7), немедленно получаем искомый результат для α_i. Используя первое нормальное уравнение и формулу (8), можно вывести результат для α_0. Доказательство завершено.

Лемма 2. При условиях Леммы 1 наилучшей линейной оценкой $\lambda_{n+1}X_{n+1}$ (с точки зрения квадратичного критерия оптимальности) будет выражение

$$Z_1\overline{X}_1 + Z_2\overline{X}_2 + (1 - Z_1 - Z_2)\mu,$$

где

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{h_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\gamma_i}, \overline{X}_2 = \frac{1}{h_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i X_i}{\gamma_i}, Z_1 = \frac{h_0 c\left[(a + h_2 b) - h_1 b\beta\right]}{(a + h_2 b)(a + h_0 c) - h_1^2 bc}, Z_2 = \frac{h_1 b\left[(a + h_0 c) - h_1 c\right]}{(a + h_2 b)(a + h_0 c) - h_1^2 bc}.$$

Доказательство. Очевидно, следует из Леммы 1.

Следствия:

1. Модель Бюльманна — частный случай при $\alpha = \sigma^2$, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$, $b = 0$ и $c = \nu^2$.
2. Модель Бюльманна–Штрауба является частным случаем при $\alpha = \sigma^2$, $\mathbf{\Gamma} = \mathrm{diag}(1/w_1, 1/w_2,...,1/w_n)$, $b = 0$ и $c = \nu^2$.
3. Версия Вена–Вана–Ю модели Бюльманна — частный случай при $a = (1 - \rho)\sigma^2$, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$, $b = \rho\sigma^2$, $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}$, $\beta = 0$ и $c = \nu^2$.

4. Версия Вена–Вана–Ю модели Бюльманна–Штрауба — частный случай при $a = (1 - \rho)\sigma^2$, $\mathbf{\Gamma} = \mathrm{diag}(1/w_1, 1/w_2,...,1/w_n)$, $b = \rho\sigma^2$, $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Gamma}^{1/2}$, $\beta = 0$ и $c = \nu^2$. Следует обратить внимание, что случай $\rho = 1$ ($a = 0$, $b = \sigma^2$) здесь возможен.

Интересно заметить, что при $a = 0$ нет сдвига оценки в сторону μ, а значения Z_1 и Z_2 не зависят от b и c. Другими словами, некоторая форма гребня в ковариационной матрице, порожденная $a > 0$, кажется важной для получения традиционной формы оценки с учетом качества данных. Это объясняет, почему в названии данного раздела приведены слова «специальная гребневая структура». В случае когда $a = 0$, оценка существует, если выполняется условие $h_2h_0 \neq h_1^2$. Следовательно, этот случай невозможен для модели Бюльманна, но возможен в модели Бюльманна–Штрауба, если веса w_j, $j = 1,2,...,n$, не равны друг другу.

Введение некоторой формы условной зависимости порождает сдвиг (в направлении $\overline{X}_2$). Этот дополнительный сдвиг оценки не существует, если $b = 0$. Тем не менее условная зависимость не может пониматься как исключительное следствие прямого механизма зависимости. Например, если $\beta = 0$, дополнительное смещение все еще имеет место, его влияние меньше (по сравнению со случаем $\beta > 0$). Таким образом, наличие условной зависимости изменяет косвенный механизм и, возможно, порождает прямой механизм влияния прошлых данных на будущие.

В данной статье соотношение между прямым и косвенным механизмом моделируется величиной β. Если β увеличивается, то сдвиг в сторону двух основных направлений (в сторону $\overline{X}_1$ и μ) перераспределяется в дополнительном направлении (как обсуждалось выше). В результате Z_2 увеличивается, а Z_1 и $1 - Z_1 - Z_2$ уменьшаются. Изменения сдвигов пропорциональны $h_1b\beta$ для обоих основных направлений. Иными словами, механизм прямого влияния увеличивает дополнительный сдвиг, уменьшая вклад основных направлений.

Рассматривая свойства оценки из леммы 2 в совокупности, необходимо сделать вывод, что классический подход может приводить к ошибочным или хотя бы не оптимальным оценкам, если имеет место какая-нибудь форма условной зависимости.

Пример расчета на реальных данных

Для иллюстрации важности учета прямого механизма влияния рассмотрим версию Вена–Вана–Ю модели Бюльманна–Штрауба для двух предельных значений параметра прямого влияния: $\beta = 1$, как предлагается в данной статье, и $\beta = 0$, как в статье Вена с соавторами [10]. Расчеты для различных значений коэффициента корреляции ρ от 0 до 1 проводятся на основе формул из предыдущего раздела.

Для данного примера взяты реальные данные по портфелю договоров страхования имущества физических лиц, заключенных компанией «Югория» за 2005–2008 гг. Это — крупная универсальная страховая компания со штаб-квартирой в Ханты-Мансийске и развитой филиальной сетью по всей территории России (за исключением Дальневосточного федерального округа). В табл. 1 приведены данные о числе страховых случаев и средним выплатам (в рублях) по федеральным округам. Эти данные отражают особенности бизнеса указанного страховщика.

Ограниченность данных в совокупности с сильной вариацией по числу страховых случаев и по средним выплатам требует более точного учета взаимного влияния компонентов страхового портфеля (в данном случае географического распределения убытков). Именно подобные ситуации являются причиной использования методик оценки с учетом качества данных, которые обсуждаются в данной статье [1; 2; 11].

Результаты расчетов приведены на рис. 2, который состоит из отдельных графиков по шести рассматриваемым федеральным округам. Сплошной линией показаны результаты для формулы, предложенной Веном с соавторами (только косвенный механизм влияния), штриховой линией — результаты, учитывающие оба механизма влияния.

Таблица 1

Географическое распределение числа страховых случаев и размера средних выплат в страховом портфеле по годам заключения договора (рублей)

Федер. округ	2005 г.		2006 г.		2007 г.		2008 г.	
	Число событий	Средние выплаты	Число событий	Средние выплаты	Число событий	Средние выплаты	Число событий	Средние выплаты
СЗФО	0	–	13	78 761,75	20	46 610,92	18	102 169,30
ЦФО	2	25 698,92	3	273 348,4	13	89 999,48	5	21 053,96
ЮФО	0	–	11	10 555,93	9	10 835,89	2	43 000,00
ПФО	6	19 249,6	11	21 407,90	16	42 669,07	21	24 414,21
УФО	11	63 254,59	68	50 216,49	61	29 968,14	68	41 094,69
СФО	0	–	4	58 028,34	5	76 340,83	11	13 813,98

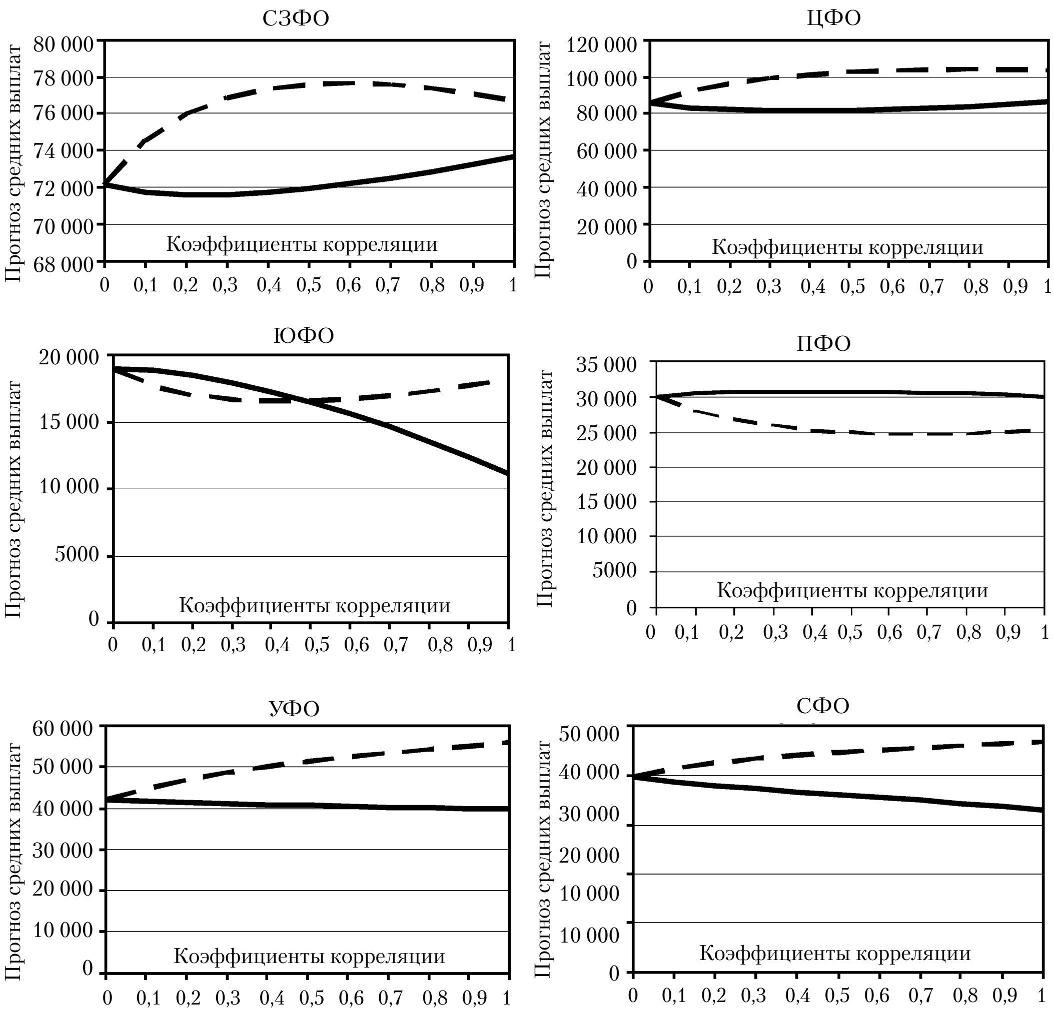

Рис. 2. Динамика оценки средних выплат при разном механизме учета влияния.

Игнорирование прямого механизма влияния приводит к изменению характера оценки (в большинстве рассмотренных случаев к ее занижению). При этом учет прямого механизма влияния увеличивает вариацию относительно среднего по портфелю. При промежуточных значениях β кривые располагаются между представленными на рисунках. Таким образом, структура зависимости играет ключевую роль при прогнозировании.

Произвольная ковариационная матрица

Для более глубокого понимания особенностей предложенного метода с учетом различных механизмов влияния прошлых выплат на будущие рассмотрим альтернативную модель.

Решение оптимизационной задачи (2) кажется избыточным для полученного результата (традиционная формула в виде среднего взвешенного), потому что объем информации в наблюдаемой выборке (в соответствии со структурой зависимости между X_i) используется для конструирования оценки весьма ограниченно. Идея состоит в использовании информации относительно выборочных средних, так как только они представлены в формуле (5). Эта идея была предложена самим Бюльманном [8], так как он фактически ввел оценку $\varphi_0 + \varphi_1 \bar{X}$. Тем не менее применение функции (1) было предложено позднее[3].

Для такой модели наилучшей линейной байесовской оценкой будет

$$\hat{X}_{n+1} = \mathrm{E}\left[X_{n+1} \middle| \bar{X}\right] = \mathrm{E}\left[X_{n+1}\right] + \frac{\mathrm{Cov}\left[X_{n+1}, \bar{X}\right]}{\mathrm{D}\left[\bar{X}\right]}\left(\bar{X} - \mathrm{E}\left[\bar{X}\right]\right).$$

Если $\mathrm{E}\left[X_{n+1}\right] = \mathrm{E}\left[\bar{X}\right] = \mu$, то $Z = \mathrm{Cov}\left[X_{n+1}, \bar{X}\right] / \mathrm{D}\left[\bar{X}\right]$. Эти формулы фактически требуют меньше информации, чем традиционно нужно в классических моделях.

Данный подход, в частности, полезен при произвольной ковариационной матрице Cov[**X, X**], т. е. при предположении произвольной структуры зависимости. Дисперсия выборочного среднего может быть представлена следующим образом:

$$\mathrm{D}\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}\left[X_i, X_j\right]$$

или в матричной форме

$$\mathrm{D}\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n^2}\mathbf{1}^T \cdot \mathrm{Cov}\left[\mathbf{X}, \mathbf{X}\right] \cdot \mathbf{1}.$$

Аналогично можно получить оценку

$$\mathrm{Cov}\left[X_{n+1}, \bar{X}\right] = \frac{1}{n}\mathbf{1}^T \cdot \mathrm{Cov}\left[X_{n+1}, \mathbf{X}\right].$$

Ситуация, когда все элементы матрицыCov[**X,X**] равны нулю, не представляет практического интереса. Таким образом, имеем

$$Z = n\frac{\mathbf{1}^T \cdot \mathrm{Cov}\left[X_{n+1}, \mathbf{X}\right]}{\mathbf{1}^T \cdot \mathrm{Cov}\left[\mathbf{X}, \mathbf{X}\right] \cdot \mathbf{1}}. \qquad (9)$$

Очевидно, модели Бюльманна и Бюльманна–Штрауба представляют собой частные случаи этой формулы. Тем не менее ранее в данной статье был представлен иной вариант. Объяснение различий состоит в ограничении класса функций, описывающих решение, что позволило получить традиционную форму оценки, но за счет потери части информации.

В частности, при данном подходе невозможно получить сдвиг в дополнительном направлении, как в Лемме 2, потому что форма оценки предполагается *a priori*. Использование функции (1) приводит к более точной оценке.

Еще один интересный аспект возникает при сравнении двух подходов и их результатов. В силу того, что класс функций $\varphi_0 + \varphi_1 \overline{X}$ меньше, чем класс функций вида (1), оценки, основанные на коэффициентах Бюльманна вида (9) не могут быть лучше, чем оценки, выведенные в Лемме 2 для множества ковариационных матриц со специальной гребневой структурой. Но предпосылки для первой модели намного слабее, чем для последней. Следовательно, подход на основе формулы (9), может быть предпочтительнее для некоторых типов зависимости. Различия между двумя подходами определяются на основе принципа, что дефицит информации в одной области (в нашем случае — априорных знаний о структуре зависимости) должен компенсироваться большим объемом информации в другой области (например, более жесткими предпосылками о форме оценки).

Выводы

Теория оценивания с учетом качества данных имеет длительную историю. Тем не менее она концентрируется на ограниченном числе моделей со специальной структурой зависимости, известной как условная независимость. В данной статье обсуждаются некоторые альтернативы.

В классических моделях Бюльманна и Бюльманна–Штрауба рассматривается только одна форма влияния прошлых выплат на будущие. Она связана с индивидуальными отклонениями от группового среднего (по всему страховому портфелю). Это вызвано предпосылкой условной независимости. Если от этой предпосылки отказаться, возможен прямой механизм влияния прошлых выплат на будущие через условную зависимость между $\mathbf{X}$ и X_{n+1}. Для процесса оценивания важны оба механизма влияния.

Построена наилучшая оценка для ковариационной матрицы вида $a\,\mathbf{\Gamma} + b\mathbf{\Lambda 1}\cdot\mathbf{1}^T\mathbf{\Lambda} + c\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T$, где $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\Lambda}$ — диагональные матрицы. Другая модель основана на произвольной структуре зависимости, но соответствующее решение базируется на более ограниченном классе линейных оценок. Для обоих подходов модели Бюльманна и Бюльманна–Штрауба являются частными случаями. Но при определенных условиях каждый из подходов может быть лучше другого. Дефицит априорной информации о структуре зависимости будет частично компенсирован дополнительной априорной информацией о форме оценки.

---

[1] Подробности соответствующей актуарной теории можно найти в работах [1; 2; 3].

[2] Для обсуждения математических аспектов см. Лемму 8.3.1 и замечание 8.3.3 в книге [11].

[3] Математические аспекты использования простой линейной функции среднего $\overline{X}$ можно найти в работах: [1; 11; 12].

---

1. *Кудрявцев А. А.* Лекции по оценке премий для краткосрочных видов страхования. Часть 3. Учет качества данных. СПб.: Европейский ун-т в С.-Петербурге, 2008.

2. *Bühlmann H., Gisler A.* A course in credibility theory and its applications. Berlin at al.: Springer, 2005.

3. *Klugman S. A., Panjer H. H., Willmot G. E.* Loss models: from data to decisions: 3rd ed. New York: Wiley, 2008.

4. *Denuit M. et al.* Actuarial theory for dependent risks: measures, orders and models. New York: Wiley, 2005.

5. *Purcaru O., Denuit M.* Dependence in dynamic claims frequency credibility models // ASTIN Bulletin. 2003. Vol. 33. N 1. P. 23–40.

6. *Frees E. W., Wang P.* Credibility using copulas // North American Actuarial Journal. 2005. Vol. 9. N 2. P. 31–48.

7. *Frees E. W., Wang P.* Copula credibility for aggregate loss models // Insurance: Mathematics and Economics. 2006. Vol. 38. N 2. P. 360–373.
8. *Bühlmann H.* Experience rating and credibility // ASTIN Bulletin. 1967. Vol. 4. N 3. P. 199–207.
9. *Bühlmann H., Straub E.* Glaubwürdigkeit für Schadensätze // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1970. Vol. 70. P. 111–133.
10. *Wen L.-M., Wang W., Yu X.-L.* Credibility models with error uniform dependence // Journal of East China Normal University (Natural Science). 2009. Vol. 5. P. 118–137.
11. *Kaas R. et al.* Modern actuarial risk theory — using R: 2nd ed. Berlin: Springer, 2008.
12. *Norberg R.* Credibility Theory // Encyclopedia of actuarial science. Vol. 1. Chichester, UK: Wiley, 2004. P. 398–406.

Статья поступила в редакцию 22 ноября 2010 г.