Вестник СПбУ. Сер 5. 2009. Вып. 2

УДК 519.6.13

П. В. Конюховский, Н. В. Хованов, Л. А. Чудовская

ОЦЕНКА ПО ЭКСПЕРТНОЙ ИНФОРМАЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

За последние годы вышло немалое количество работ, посвященных проблемам определения вида и оценки параметров функциональной зависимости между финансово-экономическими показателями различной природы и масштаба (например, уровня инфляции от величины приращения ВВП; ценности экономического блага от его объема; числа привлеченных банком вкладчиков от величины процента по депозитам и т. д.).

Как правило, для решения задачи выбора функции, описывающей связь исследуемых финансово-экономических показателей, и оценки параметров этой функции привлекаются эконометрические методы, основанные на статистической модели регрессии (линейной или нелинейной). Однако такие эконометрические методы эффективны лишь при наличии обширной и качественной статистической информации. При отсутствии должного объема и качества статистических данных нельзя гарантировать ни точности, ни надежности получаемых оценок и, тем более, адекватности прогнозов динамики значений исследуемых показателей. Отсутствие достаточной статистической информации может быть, как правило, частично компенсировано использованием *экспертной информации* о виде функции и о допустимых вариантах сочетания значений ее параметров.

Павел Владимирович КОНЮХОВСКИЙ — д-р экон. наук, профессор кафедры экономической кибернетики Экономического факультета СПбГУ. Область научных интересов – математические модели банковской и финансовой деятельности, стохастические модели динамики финансово-экономических показателей.

Николай Васильевич ХОВАНОВ — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры экономической кибернетики Экономического факультета СПбГУ. Область научных интересов – стохастические модели риска и неопределенности, теория и методы принятия решений в условиях дефицита информации.

Людмила Анатольевна ЧУДОВСКАЯ — старший преподаватель кафедры высшей математики Санкт-Петербургской государственной лесотехнической академии. Область научных интересов — стохастические модели оценки функциональной зависимости. Автор четырех статей и методических указаний по курсу теории вероятностей.

В настоящей работе мы сосредоточим внимание на простейшем примере моделирования функциональной зависимости между финансово-экономическими показателями на основе экспертной информации, предположив, что эта зависимость описывается однопараметрической функцией одного аргумента. К такому простейшему случаю могут быть сведены и многопараметрические функции одного переменного путем выбора исследователем переменного параметра при фиксации значений всех остальных параметров.

Такие ситуации, когда исследуемая функция, описывающая связь финансово-экономических показателей, известна с точностью до совокупности однопараметрических функций одного аргумента, часто встречаются в экономике. Так, например, для описания роста (убывания) различных числовых показателей экономических систем широко используются экспоненциальные, логистические и т. д. «законы роста» (grows laws)[1]. Распределение доходов населения зачастую удается хорошо аппроксимировать плотностью распределения логарифмически нормальной случайной величины[2]. Аналогичным образом однопараметрическая функция используется и в модели Парето распределения дохода (совокупного блага)[3]. В известной макроэкономической модели Уоркинга, описывающей зависимость объема потребления продовольствия в стране от суммарных расходов населения этой страны, находит применение нелинейная двухпараметрическая функция[4], легко превращаемая вышеописанным способом в семейство однопараметрических функций. Очень часто встречается в экономических исследованиях степенная функция, тесно связанная с известным законом распределения Ципфа[5]. Такую однопараметрическую степенную функцию можно получить, например, из широко используемой макроэкономической производственной функции Кобба—Дугласа, задающей зависимость объема производства от объемов затраченного «труда» и «капитала»[6]. Зафиксировав значение одного из указанных факторов, получаем семейство однопараметрических функций, задающих зависимость объема производства от переменного объема затрат другого фактора.

Обычно предполагается, что выбор функциональной зависимости $y = g(x)$ финансово-экономических показателей x, y происходит в условиях *теоретико-вероятностной неопределенности*[7], моделью которой служит некоторый стохастический процесс $\tilde{y} = \tilde{g}(x)$ с множеством реализаций $G = \{g(x;\theta), \theta \in \Theta\}$, где каждая реализация (траектория) $g(x;\theta)$ процесса может быть, в принципе, использована для описания исследуемой функциональной зависимости между x и y.

Однако исследователь зачастую находится в ситуации *теоретико-множественной неопределенности*, когда ему известно только множество $G = \{g(x;\theta), \theta \in \Theta\}$ всех возможных функций, описывающих связь исследуемых финансово-экономических показателей. Приведенные выше многочисленные примеры представления множества G всех возможных функций, описывающих зависимость финансово-экономических показателей, в виде совокупности однопараметрических функций одного аргумента $g(x;\theta)$ свидетельствуют об актуальности поставленной задачи описания неопределенности выбора конкретной функции $g(x;\theta)$ из множества G при помощи стохастического процесса $\tilde{y} = \tilde{g}(x)$ с использованием экспертной информации о возможной области изменения параметра.

При недостаточном объеме эмпирических данных или при невысоком их качестве исследователь вынужден найти вероятность $P_{\tilde{g}}$ попадания траекторий $g(x;\theta)$ процесса $\tilde{y} = \tilde{g}(x)$ в определенные подмножества множества $G = \{g(x;\theta), \theta \in \Theta\}$ всех траекторий, чтобы перейти от теоретико-множественной к теоретико-вероятностной модели неопределенности и получить, тем самым, возможность адекватно оценить исследуемую функциональную зависимость $y = g(x)$ известными средствами теории вероятностей.

В статье предлагается использовать для определения (по имеющейся у исследователя экспертной информации) вероятности $P_{\tilde{g}}$ *метод рандомизированных траекторий* (МРТ), в основе которого лежит подход к моделированию неопределенности выбора конкретной траектории из множества всех возможных траекторий процесса при помощи байесовской рандомизации этого выбора[8]. Предлагаемый вариант МРТ базируется на концепции стохастического процесса, порождаемого рандомизированным параметром. С использованием этой концепции построен ряд стохастических процессов, индуцируемых квазиравномерно распределенным параметром, которые можно использовать для описания выбора функциональной зависимости в условиях неопределенности. Далее подробно разобран пример построения стохастического процесса со степенными реализациями, используемого для оценки зависимости объема привлеченных банком средств от величины процента по депозитам. Компоненты разработанного метода оценки по экспертной информации функциональной зависимости финансово-экономических показателей и его возможные приложения кратко обсуждаются в Заключении.

Стохастические процессы, индуцированные рандомизированными параметрами

Стремясь максимально облегчить эксперту построение стохастического процесса, реализации которого могут служить функциями, связывающими соответствующие финансово-экономические показатели, мы далее будем считать, что множество G траекторий процесса состоит из ограниченных дифференцируемых параметризованных функций $g(x;\theta)$, определенных на открытом интервале $X=(x_-,x_+)$, $-\infty \le x_- < x_+ \le +\infty$, и задаваемых параметром θ, принимающим значения из конечного полуоткрытого интервала $\Theta=[\theta_-,\theta_+)$, $-\infty<\theta_-<\theta_+<+\infty$: $G=\{g(x;\theta): x\in X=(x_-,x_+), \theta\in\Theta=[\theta_-,\theta_+)\}$. Таким образом, множество G всех возможных траекторий стохастического процесса $\tilde{y}=\tilde{g}(x)$ представляет собой совокупность однопараметрических функций одного аргумента вида $g(x;\theta)$.

Будем говорить, что стохастический процесс $\tilde{g}(x)$ с реализациями из множества G *индуцируется рандомизированным параметром* $\tilde{\theta}$, если равенство $\tilde{g}(x)=g(x;\tilde{\theta})$ выполняется для любой точки $x\in X$. Иными словами, любая случайная величина $\tilde{y}=\tilde{g}(x)$ (одномерное сечение процесса $\tilde{g}(x)$) есть функция $\tilde{y}=g(x;\tilde{\theta})=\varphi_x(\tilde{\theta})$ одной и той же случайной величины $\tilde{\theta}$, что существенно упрощает эксперту задачу построения стохастического процесса, моделирующего неопределенность выбора функциональной зависимости, связывающей финансово-экономические показатели.

Рассмотрим подробнее этапы построения экспертом стохастического процесса $\tilde{g}(x)=g(x;\tilde{\theta})$, индуцированного рандомизированным параметром $\tilde{\theta}$. Для дальнейшего упрощения задачи эксперта предположим, что функция $g(x;\theta)$ возрастает (убывает) по параметру θ во всех точках множества X, т. е. предположим, что $\theta_1<\theta_2$ $(\theta_1>\theta_2)$ тогда и только тогда, когда $g(x;\theta_1)<g(x;\theta_2)$ в любой точке $x\in X$. С геометрической точки зрения график функции $g(x;\theta_1)$, возрастающей (убывающей) по параметру θ во всех точках, лежит целиком ниже (выше) графика функции $g(x;\theta_2)$ при $\theta_1<\theta_2$. По умолчанию далее будем рассматривать функции, возрастающие по параметру на всем множестве своего определения. Таким образом, построено множество $G=\{g(x;\theta): x\in X=(x_-,x_+), \theta\in\Theta=[\theta_-,\theta_+)\}$ всех возможных возрастающих по параметру траекторий $g(x;\theta)$ стохастического процесса $\tilde{y}=\tilde{g}(x)$. Примеры графиков функций, входящих в множество $G=\{g(x;\theta): x\in X=(x_-,x_+), \theta\in\Theta=[\theta_-,\theta_+)\}$, представлены на рис. 1, где использованы обозначения $g_-(x)=g(x;\theta_-)$, $g_+(x)=g(x;\theta_+)$, $g_i(x)=g(x;\theta_i)$, $i=1,2$.

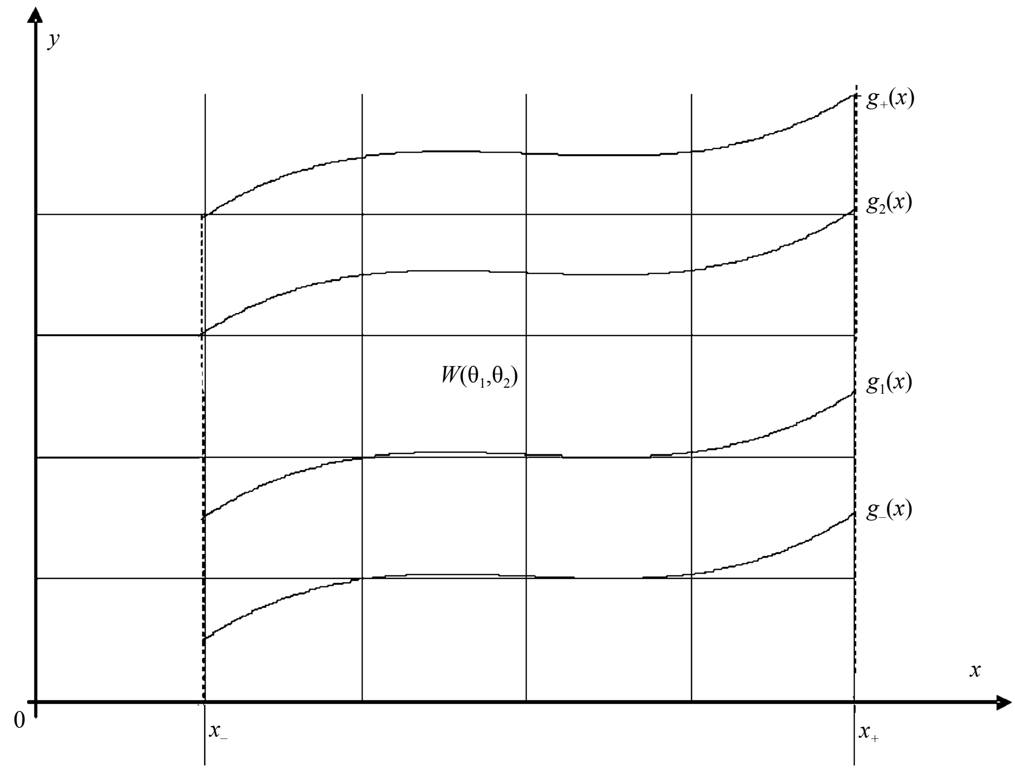

Рис 1. Графики функций $g(x;\theta)$ из множества G, возрастающих по параметру θ на всей области определения $X=(x_-,x_+)$.

Определим *функциональный интервал* $G(\theta_1,\theta_2)$ соотношением $G(\theta_1,\theta_2)=$ $=\{g(x;\theta): g(x;\theta_1)\le g(x;\theta)<g(x;\theta_2)\}\subseteq G(\theta_-,\theta_+)=G$, где $\theta_1\le\theta_2$ ($G(\theta_1,\theta_2)=\varnothing$ при $\theta_1=\theta_2$), и рассмотрим множество $H(G)=\{G(\theta_1,\theta_2):\theta_1\le\theta_2,\theta_1,\theta_2\in\Theta\}$ всех возможных функциональных интервалов. Как известно, для построения стохастического процесса $\tilde{y}=\tilde{g}(x)$ вероятностную меру (вероятность) $P_{\tilde{g}}$ достаточно задать на множестве $H(G)$[9].

Определим теперь рандомизированный параметр $\tilde{\theta}$, порождающий стохастический процесс $\tilde{g}(x)$ по формуле $\tilde{g}(x)=g(x;\tilde{\theta})$, $x\in X$, построив функцию распределения $F_{\tilde{\theta}}(\theta)$ этого случайного параметра. Для этого определим *параметрический интервал* $\Theta(\theta_1,\theta_2)$ соотношением $\Theta(\theta_1,\theta_2)=\{\theta:\theta_1\le\theta<\theta_2\}$, где $\theta_1\le\theta_2$ ($\Theta(\theta_1,\theta_2)=\varnothing$ при $\theta_1=\theta_2$). Иными словами, параметрический интервал $\Theta(\theta_1,\theta_2)$ совпадает с обычным числовым интервалом: $\Theta(\theta_1,\theta_2)=[\theta_1,\theta_2)\subseteq\Theta(\theta_-,\theta_+)=[\theta_-,\theta_+)=\Theta$. Рассмотрим множество $H(\Theta)=\{\Theta(\theta_1,\theta_2):\theta_1\le\theta_2,\theta_1,\theta_2\in\Theta\}$ всех возможных параметрических интервалов. Вероятностную меру (вероятность) $P_{\tilde{\theta}}$ достаточно задать на множестве $H(\Theta)$, что позволяет определить функцию распределения $F_{\tilde{\theta}}(\theta)$ случайного параметра $\tilde{\theta}$ соотношением $F_{\tilde{\theta}}(\theta)=P_{\tilde{\theta}}(\{\tilde{\theta}<\theta\})=P_{\tilde{\theta}}(\Theta(\theta_-,\theta))$, где $\theta\in\Theta=[\theta_-,\theta_+)$ ($F_{\tilde{\theta}}(\theta)=0$ при $\theta<\theta_-$ и $F_{\tilde{\theta}}(\theta)=1$ при $\theta\ge\theta_+$).

Теперь для представления исходного стохастического процесса $\tilde{g}(x)$, который имеет траектории $g(x;\theta)$, возрастающие по параметру θ на всем множестве $X=(x_-,x_+)$, в виде стохастического процесса $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta})$, порожденного рандомизированным параметром $\tilde{\theta}$, достаточно определить вероятность $P_{\tilde{\theta}}$ соотношением $P_{\tilde{\theta}}(\Theta(\theta_1,\theta_2)) \overset{def}{=} P_{\tilde{g}}(G(\theta_1,\theta_2))$, выполняющимся для всех параметрических и функциональных интервалов $\Theta(\theta_1,\theta_2) \in H(\Theta)$, $\Theta(\theta_1,\theta_2) \in H(\Theta)$, где $\theta_1 \leq \theta_2$. Указанное соотношение позволяет определить искомую функцию распределения $F_{\tilde{\theta}}(\theta)$ случайного параметра $\tilde{\theta}$, порождающего стохастический процесс $\tilde{g}(x)$ по формуле $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta})$, соотношением $F_{\tilde{\theta}}(\theta) = P_{\tilde{g}}(G(\theta_-,\theta))$, где $\theta \in \Theta = [\theta_-,\theta_+)$ ($F_{\tilde{\theta}}(\theta) = 0$ при $\theta < \theta_-$ и $F_{\tilde{\theta}}(\theta) = 1$ при $\theta \geq \theta_+$).

Квазиравномерно распределенные рандомизированные параметры

Описанный в предыдущем разделе метод построения стохастического процесса $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta})$, порожденного рандомизированным параметром $\tilde{\theta}$ и имеющего всюду возрастающие на множестве $X = (x_-,x_+)$ по параметру θ реализации $g(x;\theta)$ из множества $G = \{g(x;\theta) : x \in X = (x_-,x_+), \theta \in \Theta = [\theta_-,\theta_+)\}$, позволяет существенно упростить для эксперта моделирование неопределенности задания функции $y = g(x;\theta)$, связывающей финансово-экономические показатели x и y. Действительно, вместо конструирования сложного вероятностного пространства, моделирующего теоретико-вероятностную неопределенность выбора траектории $y = g(x;\theta)$ стохастического процесса $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta})$, эксперту достаточно задать распределение случайного параметра $\tilde{\theta}$ на интервале $\Theta = \Theta(\theta_-,\theta_+) = [\theta_-,\theta_+)$.

Со времен известной работы Т. Байеса[10] при моделировании неопределенности выбора конкретного значения θ из конечного интервала $[\theta_-,\theta_+)$ часто используется рандомизированный параметр $\tilde{\theta}$, равномерно распределенный на этом интервале[11]. Однако использование равномерно распределенного рандомизированного параметра $\tilde{\theta}$ для описания неопределенности выбора значения параметра из конечного интервала осложняется неоднозначностью параметризации траектории $y = g(x;\theta)$ стохастического процесса $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta})$. Действительно, пусть вместо параметра θ для параметризации траекторий процесса $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta})$ используется другой параметр, например, параметр τ, связанный с параметром θ возрастающей дифференцируемой нелинейной функцией $\tau = \varphi(\theta)$. Новая параметризация вполне равноправна с исходной параметризацией: функцию $y = h(x;\tau)$ можно определить через параметр θ соотношением $y = h(x;\varphi(\theta))$, а функцию $y = g(x;\theta)$ – через параметр τ соотношением $y = g(x;\varphi^{-1}(\tau))$, где $\theta = \varphi^{-1}(\tau)$ есть функция, обратная функции $\tau = \varphi(\theta)$. Несмотря на указанную «равноправность» двух параметризаций траекторий рассматриваемого стохастического процесса, равномерность распределения рандомизированного параметра $\tilde{\theta}$ на интервале $[\theta_-,\theta_+)$ несовместима с равномерностью распределения рандомизированного параметра $\tilde{\tau}$ на отрезке $[\varphi(\theta_-),\varphi(\theta_+))$, где $\tilde{\tau} = \varphi(\tilde{\theta})$.

Для преодоления выявленной неинвариантности задания равномерной рандомизации относительно выбора параметризации траекторий стохастического процесса, порождаемого случайным параметром, предлагается следующий подход, основанный на определении равномерного распределения на области, через которую проходят траектории рассматриваемого процесса.

Каждому функциональному интервалу $G(\theta_1,\theta_2)$ взаимно однозначно сопоставим *пространственный интервал* $W(\theta_1,\theta_2) = \{(x,y) : \forall x \in X = (x_1,x_+)\, g(x;\theta_1) \leq y < g(x;\theta_2)\}$, где $\theta_1 \leq \theta_2$ ($W(\theta_1,\theta_2) = \varnothing$ при $\theta_1 = \theta_2$). Тогда пространственный интервал $W = W(\theta_-,\theta_+) \subset R^2$ представляет собой *область прохождения траекторий стохастического процесса*, порожденного рандомизированным параметром $\tilde{\theta}$. Дополнительно предположим, что для каждого непустого пространственного интервала $W(\theta_1,\theta_2) \subseteq W \subset R^2$ существует конечная лебегова мера, определяющая площадь $S(W(\theta_1,\theta_2)) > 0$ этого интервала.

Будем говорить, что *траектории стохастического процесса* $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta})$ *равномерно распределены в области W прохождения этих траекторий*, если вероятность попадания траектории в функциональный интервал $G(\theta_1,\theta_2) \subseteq G$ пропорциональна площади $S(W(\theta_1,\theta_2)$ соответствующего пространственного интервала $W(\theta_1,\theta_2) \subseteq W$. Иными словами, вероятность $P_{\tilde{g}}$, определяющая стохастический процесс с равномерно распределенными траекториями, задается формулой $P_{\tilde{g}}(G(\theta_1,\theta_2)) = c \cdot S(W(\theta_1,\theta_2))$, где c — некоторая положительная константа, которую легко найти из очевидного соотношения $1 = P_{\tilde{g}}(G(\theta_-,\theta_+)) = c \cdot S(W(\theta_-,\theta_+))$: $c = [S(W(\theta_-,\theta_+))]^{-1}$. Подставляя найденное значение константы в вышеуказанную формулу, получаем соотношение, задающее в явном виде вероятность $P_{\tilde{g}}(G(\theta_1,\theta_2)) = S(W(\theta_1,\theta_2)) / S(W(\theta_-,\theta_+))$ попадания траекторий процесса $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta})$ в функциональный интервал $G(\theta_1,\theta_2) \subseteq G$ (в пространственный интервал $W(\theta_1,\theta_2) \subseteq W \subset R^2$).

Вероятность $P_{\tilde{g}}(G(\theta_1,\theta_2))$ попадания траектории стохастического процесса $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta})$, порожденного рандомизированным параметром $\tilde{\theta}$, в функциональный интервал $G(\theta_1,\theta_2)$ была определена в предыдущем разделе статьи формулой $P_{\tilde{g}}(G(\theta_1,\theta_2)) = P_{\tilde{\theta}}(\Theta(\theta_1,\theta_2))$. Сопоставляя это с указанной выше формулой $P_{\tilde{g}}(G(\theta_1,\theta_2)) = S(W(\theta_1,\theta_2)) / S(W(\theta_-,\theta_+))$, нетрудно вывести формулу

$$F_{\tilde{\theta}}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < \theta_-, \\ \dfrac{S(W(\theta_-,\theta\ \ ))}{S(W(\theta_-,\theta_+))}, & \theta_- \le \theta < \theta_+, \\ 1, & \theta \ge \theta_+ \end{cases} \tag{1}$$

для функции распределения $F_{\tilde{\theta}}(\theta)$ рандомизированного параметра $\tilde{\theta}$, порождающего стохастический процесс $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta})$ с траекториями, равномерно распределенными по области их прохождения $W = W(\theta_-,\theta_+)$. Такой рандомизированный параметр $\tilde{\theta}$, распределение которого на интервале $\Theta = [\theta_-,\theta_+)$ не обязательно совпадает с равномерным, но который обеспечивает равномерное распределение траекторий по области $W = W(\theta_-,\theta_+)$, будем называть *квазиравномерно распределенным параметром*[12].

Приведем ряд примеров стохастических процессов с равномерно распределенными траекториями, монотонно зависящими от параметра, порожденных квазиравномерно распределенными рандомизированными параметрами.

Рассмотрим непрерывную возрастающую функцию $g_0(x)$, заданную на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяющую условиям $g_0(0) = 0$, $g_0(1) = 1$. Пусть класс G допустимых параметризированных функций состоит из функций вида $g(x;\theta) = g_0(x/\theta)$, $\theta \in \Theta = \Theta(\theta_-,\theta_+) = [\theta_-,\theta_+)$, $\theta_- > 0$. Будем считать функции $g(x;\theta)$ заданными на множестве $X = [x_-,x_+] = [0,\theta_+]$: $g(x;\theta) = g_0(x/\theta)$ при $x \in [0,\theta)$, $g(x;\theta)$ при $x \in [\theta,\theta_+]$. Заметим, что функция $g(x;\theta)$ не является убывающей по параметру θ на всей области задания $[0,\theta_+]$: при $\theta_1 < \theta_2$ выполняется неравенство $g(x;\theta_1) > g(x;\theta_2)$ для всех $x \in (0,\theta_1)$, но в точке $x = 0$ и для всех $x \in [\theta_1,\theta_+]$ значения функций $g(x;\theta_1)$ и $g(x;\theta_2)$ совпадают. Однако это не препятствует использованию описанного выше метода построения стохастического процесса, индуцированного квазиравномерно распределенным рандомизированным параметром, поскольку для любых неравных значений $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ параметра θ площадь $S(W(\theta_1, \theta_2))$ пространственного интервала $W(\theta_1, \theta_2)$ положительна.

Найдем площадь $S(W(\theta_1, \theta_2))$, заключенную между графиками функций $g(x;\theta_1)$ и $g(x;\theta_2)$. Ряд простых преобразований

$$S(W(\theta_1,\theta_2) = \int_0^{\theta_1}[g(x;\theta_1) - g(x;\theta_2)]\,dx + \int_{\theta_1}^{\theta_2}[1 - g(x;\theta_2)]\,dx = (\theta_2 - \theta_1) + \theta_1 \int_0^{\theta_1} g_0\left(\frac{x}{\theta_1}\right) d\left(\frac{x}{\theta_1}\right) -$$

$$-\theta_2 \int_0^{\theta_1} g_0\left(\frac{x}{\theta_2}\right) d\left(\frac{x}{\theta_2}\right) - \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} g_0\left(\frac{x}{\theta_2}\right) d\left(\frac{x}{\theta_2}\right) = (\theta_2 - \theta_1) + \theta_1 \int_0^1 g_0(z)\,dz - \theta_2 \int_0^{\theta_1/\theta_2} g_0(z)\,dz -$$

$$-\theta_2 \int_{\theta_1/\theta_2}^{1} g_0(z)\,dz = (\theta_2 - \theta_1) + \theta_1 \int_0^1 g_0(z)\,dz - \theta_2 \int_0^1 g_0(z)\,dz = (\theta_2 - \theta_1) \cdot [1 - \int_0^1 g_0(z)\,dz]$$

позволяет представить площадь $S(W(\theta_1, \theta_2))$ пространственного интервала $W(\theta_1, \theta_2)$ в виде $S(W(\theta_1, \theta_2)) = (\theta_2 - \theta_1) \cdot I$, где $I > 0$. Отсюда следует, что вероятность $P_{\tilde{g}}(G(\theta_1, \theta_2))$ попадания траектории процесса в функциональный интервал $G(\theta_1, \theta_2)$ равна отношению $(\theta_2 - \theta_1)/(\theta_+ - \theta_-)$ длин параметрических интервалов $[\theta_1, \theta_2)$ и $[\theta_-, \theta_+)$, а функция распределения $F_{\tilde{\theta}}(\theta)$, подсчитанная по формуле (1), соответствует рандомизированному параметру $\tilde{\theta}$, равномерно распределенному на интервале $[\theta_-, \theta_+)$, $\theta_- > 0$.

Таким образом, квазиравномерно распределенный параметр, порождающий стохастический процесс $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta})$ с равномерно распределенными траекториями $g(x;\theta) = g_0(x/\theta)$, оказывается имеющим просто равномерное распределение на интервале всех возможных значений параметра. Этот результат существенно упрощает нахождение математического ожидания $\bar{\theta} = E\tilde{\theta} = (\theta_- + \theta_+)/2$ и стандартного отклонения $s = \sqrt{D\tilde{\theta}} = (\theta_+ - \theta_-)/2\sqrt{3}$ рандомизированного параметра $\tilde{\theta}$. Теперь в качестве оценки функциональной зависимости $y = g(x)$ между финансово-экономическими показателями x и y можно предложить, например, функцию $y = \bar{g}(x) = g(x;\bar{\theta}) = g_0(x/\bar{\theta})$. Функции $y = g_*(x) = g(x;\bar{\theta} + s) = g_0(x/(\bar{\theta} + s))$ и $y = g^*(x) = g(x;\bar{\theta} - s) = g_0(x/(\bar{\theta} - s))$ указывают ожидаемые отклонения (вниз и вверх соответственно) от «средней» оценки $y = \bar{g}(x)$.

Рассмотрим далее возрастающую дифференцируемую абсолютно непрерывную функцию $y = g_0(x)$, заданную на всей числовой оси $R^1 = (-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющую условиям: $\lim g_0(x) = 0$ при $x \to -\infty$, $\lim g_0(x) = 1$ при $x \to +\infty$. Абсолютная непрерывность и дифференцируемость такой функции $y = g_0(x)$ позволяют представить ее в виде интеграла $g_0(x) = \int_{-\infty}^{x} h_0(z)\,dz$ от некоторой положительной функции $h_0(x)$, которая в каждой точке $x \in R^1$ совпадает с производной $h_0(x) = \frac{d}{dx} g_0(x)$ функции $g_0(x)$. При этом, очевидно, $\int_{-\infty}^{+\infty} h_0(z)\,dz = 1$. Пусть класс G допустимых параметризированных функций состоит из функций вида $g(x;\theta) = g_0(x/\theta)$, $x \in R^1$ $\theta \in \Theta = \Theta(\theta_-, \theta_+) = [\theta_-, \theta_+)$, $\theta_- > 0$. Заметим, что функция $g(x;\theta)$ не является возрастающей (убывающей) по параметру θ на всей области задания $[0, \theta_+]$: при $\theta_1 < \theta_2$ выполняется неравенство $g(x;\theta_1) > g(x;\theta_2)$ для всех $x \in (-\infty, 0)$ и неравенство $g(x;\theta_1) > g(x;\theta_2)$ для всех $x \in (0, +\infty)$, а в точке $x = 0$ значения функций $g(x;\theta_1)$ и $g(x;\theta_2)$ совпадают, так как $g(0;\theta) = g_0(0)$. Указанное обстоятельство не препятствует использованию описанного метода построения стохастического процесса, индуцированного квазиравномерно распределенным рандомизированным параметром, поскольку для любых неравных значений $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ параметра θ площадь $S(W(\theta_1, \theta_2))$ пространственного интервала $W(\theta_1, \theta_2)$ положительна.

Найдем площадь $S(W(\theta_1,\theta_2))$, заключенную между графиками функций $g(x;\theta_1)$ и $g(x;\theta_2)$, предположив абсолютную сходимость интегралов $\int_0^{+\infty} z\,h_0(z)\,dz$ и $\int_{-\infty}^{0} z\,h_0(z)\,dz$. Обозначим $g(x;\theta_1,\theta_2)$ разность $g(x;\theta_2)-g(x;\theta_1)$ и предположим, что $x\cdot g(x;\theta_1,\theta_2)\to 0$ при $x\to\pm\infty$. С геометрической точки зрения это предположение означает, что «хвосты» графиков функций $g(x;\theta_1)$ и $g(x;\theta_2)$ достаточно быстро сближаются, обеспечивая, тем самым, конечность площади $S(W(\theta_1,\theta_2))$ пространственного интервала $W(\theta_1,\theta_2)$. Ряд простых преобразований

$$S(W(\theta_1,\theta_2)=\int_{-\infty}^{0}[g(x;\theta_2)-g(x;\theta_1)]\,dx+\int_0^{+\infty}[g(x;\theta_1)-g(x;\theta_2)]\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} g(x;\theta_1,\theta_2)\,dx-\int_0^{+\infty} g(x;\theta_1,\theta_2)\,dx=-\int_{-\infty}^{0} x\,dg(x;\theta_1,\theta_2)+\int_0^{+\infty} x\,dg(x;\theta_1,\theta_2)=$$

$$=-\theta_2\int_{-\aleph}^{0}\left(\frac{x}{\theta_2}\right)h_0\left(\frac{x}{\theta_2}\right)d\left(\frac{x}{\theta_2}\right)+\theta_1\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{x}{\theta_1}\right)h_0\left(\frac{x}{\theta_1}\right)d\left(\frac{x}{\theta_1}\right)+\theta_2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\theta_2}\right)h_0\left(\frac{x}{\theta_2}\right)d\left(\frac{x}{\theta_2}\right)-$$

$$-\theta_1\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\theta_1}\right)h_0\left(\frac{x}{\theta_1}\right)d\left(\frac{x}{\theta_1}\right)=(\theta_2-\theta_1)\cdot\left[\int_0^{+\infty} z\,h_0(z)\,dz-\int_{-\infty}^{0} z\,h_0(z)\,dz\right]$$

позволяет представить площадь $S(W(\theta_1,\theta_2))$ пространственного интервала $W(\theta_1,\theta_2)$ в виде $S(W(\theta_1,\theta_2))=(\theta_2-\theta_1)\cdot I$, где $I>0$. Отсюда следует, что вероятность попадания траектории процесса в функциональный интервал $G(\theta_1,\theta_2)$ равна $P_{\tilde g}(G(\theta_1,\theta_2))=(\theta_2-\theta_1))/(\theta_+-\theta_-)$, а функция распределения $F_{\tilde\theta}(\theta)$, подсчитанная по формуле (1), соответствует рандомизированному параметру $\tilde\theta$, равномерно распределенному на интервале $[\theta_-,\theta_+)$, $\theta_->0$ [13].

Опять-таки, квазиравномерно распределенный параметр, порождающий стохастический процесс с равномерно распределенными по области прохождения W траекториями, оказывается имеющим просто равномерное распределение на интервале всех возможных значений параметра. Этот результат, как и в предыдущем примере, существенно упрощает построение оценок функциональной зависимости между рассматриваемыми финансово-экономическими показателями.

Рассмотрим также модификацию предыдущего примера, состоящую в использовании класса G допустимых параметризированных функций, состоящего из функций вида $g(x;\theta)=g_0(x-\theta)$, $x\in R^1$, $\theta\in\Theta=\Theta(\theta_-,\theta_+)=[\theta_-,\theta_+)$. Очевидно, что функция $g(x;\theta)$ является убывающей по параметру θ на всей области задания R^1. Дополнительно предположим, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} z\,h_0(z)\,dz$ абсолютно сходится.

Найдем площадь $S(W(\theta_1,\theta_2))$, заключенную между графиками функций $g(x;\theta_1)$ и $g(x;\theta_2)$. Простые преобразования

$$S(W(\theta_1,\theta_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}[g(x;\theta_1)-g(x;\theta_2)]\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}[x\,h_0(x-\theta_2)-x\,h_0(x-\theta_1)]\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(z+\theta_2)\,h_0(z)\,dz-\int_{-\infty}^{+\infty}(z+\theta_1)\,h_0(z)\,dz=\theta_2-\theta_1$$

показывают, что вероятность попадания графика траектории процесса в пространственный интервал $W(\theta_1,\theta_2)$ равна отношению $(\theta_2-\theta_1))/(\theta_+-\theta_-)$, а функция распределения $F_{\tilde\theta}(\theta)$, подсчитанная по формуле (1), соответствует рандомизированному параметру θ, равномерно распределенному на интервале $[\theta_-,\theta_+)$.

Случай, когда квазиравномерно распределенный рандомизированный параметр, порождающий стохастический процесс с равномерно распределенными по области прохождения траекториями, имеет неравномерное распределение на интервале всех своих возможных значений, подробно рассматривается в следующем разделе.

Стохастический процесс со степенными реализациями

Пусть класс G допустимых параметризированных функций, описывающих функциональную зависимость финансово-экономических показателей x и y, состоит из степенных функций $y = g(x;\theta) = x^{\theta}$, $\theta \in \Theta = \Theta(\theta_-, \theta_+) = [\theta_-, \theta_+)$, $\theta_- > 0$. Будем считать эти функции заданными на множестве $X = (x_-, x_+) = (0,1)$. Очевидно, что функция $g(x;\theta)$ убывает по параметру θ во всех точках интервала $X = (0,1)$.

Найдем площадь $S(W(\theta_1, \theta_2))$, заключенную между графиками функций $g(x;\theta_1)$ и $g(x;\theta_2)$. Простые преобразования

$$S(W(\theta_1,\theta_2) = \int_0^1 [g(x;\theta_1) - g(x;\theta_2)]\,dx = \int_0^1 [x^{\theta_1} - x^{\theta_2}]\,dx = \frac{1}{1+\theta_1} - \frac{1}{1+\theta_2}$$

позволяют получить формулу $S(W(\theta_1,\theta_2)) = (\theta_2 - \theta_1)/[(1+\theta_1)(1+\theta_2)]$ для площади $S(W(\theta_1,\theta_2))$ пространственного интервала $W(\theta_1,\theta_2)$. Отсюда следует, что вероятность $P_{\tilde g}(G(\theta_1,\theta_2))$ попадания траектории процесса в функциональный интервал $G(\theta_1,\theta_2)$ определяется формулой

$$P_{\tilde g}(G(\theta_1,\theta_2)) = \frac{S(W(\theta_1,\theta_2))}{S(W(\theta_-,\theta_+))} = \frac{(1+\theta_-)(1+\theta_+)(\theta_2-\theta_1)}{(1+\theta_1)(1+\theta_2)(\theta_+-\theta_-)}, \qquad (2)$$

а функция распределения $F_{\tilde\theta}(\theta)$, подсчитанная по формуле (1), имеет на интервале $[\theta_-, \theta_+)$ вид

$$F_{\tilde\theta}(\theta) = \frac{(1+\theta_+)(\theta-\theta_-)}{(\theta_+-\theta_-)(1+\theta)} = \frac{1\ +\ \theta_+}{\theta_+-\theta_-}\left[1 - \frac{1+\theta_-}{1+\theta}\right]. \qquad (3)$$

Из формулы (3) получаем формулу

$$f_{\tilde\theta}(\theta) = \frac{d}{d\theta}F_{\tilde\theta}(\theta) = \frac{(1+\theta_-)(1+\theta_+)}{\theta_+-\theta_-}\cdot\frac{1}{(1+\theta)^2} \qquad (4)$$

для плотности $f_{\tilde\theta}(\theta)$ квазиравномерно распределенного рандомизированного параметра $\tilde\theta$, где $\theta \in [\theta_-, \theta_+)$.

Знание плотности распределения (4) позволяет вычислить математическое ожидание

$$\bar\theta = E\tilde\theta = \int_{\theta_-}^{\theta_+} \theta\, f_{\tilde\theta}(\theta)\,d\theta = \frac{(1+\theta_-)(1+\theta_+)}{\theta_+-\theta_-}\int_{\theta_-}^{\theta_+}\frac{\theta\, d\theta}{(1+\theta)^2} = \frac{(1+\theta_-)(1+\theta_+)}{\theta_+-\theta_-}\ln\left(\frac{1+\theta_+}{1+\theta_-}\right) - 1 \qquad (5)$$

и второй начальный момент

$$\begin{aligned} E\tilde\theta^2 &= \int_{\theta_-}^{\theta_+}\theta^2 f_{\tilde\theta}(\theta)\,d\theta = \frac{(1+\theta_-)(1+\theta_+)}{\theta_+-\theta_-}\int_{\theta_-}^{\theta_+}\frac{\theta^2\,d\theta}{(1+\theta)^2} = \\ &= \frac{(1+\theta_-)(1+\theta_+)}{\theta_+-\theta_-}\int_{\theta_-}^{\theta_+}\frac{(1+\theta)^2 - 2(1+\theta)+1}{(1+\theta)^2}\,d\theta = \\ &= (1+\theta_-)(1+\theta_+) - 2\frac{(1+\theta_-)(1+\theta_+)}{\theta_+-\theta_-}\ln\left(\frac{1+\theta_+}{1+\theta_-}\right) + 1 \end{aligned} \qquad (6)$$

квазиравномерно распределенного рандомизированного параметра $\tilde{\theta}$.

Подставляя (5), (6) в выражение $D\tilde{\theta} = E\tilde{\theta}^2 - [E\tilde{\theta}]^2$, получаем формулу

$$s^2 = s^2(\theta) = D\tilde{\theta} = (1+\theta_-)(1+\theta_+)\left[1 - \frac{(1+\theta_-)(1+\theta_+)}{(\theta_+ - \theta_-)^2}\ln^2\left(\frac{1+\theta_+}{1+\theta_-}\right)\right] \quad (7)$$

для дисперсии $s^2 = s^2(\theta) = D\tilde{\theta}$ квазиравномерно распределенного рандомизированного параметра $\tilde{\theta}$, порождающего стохастический процесс $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta}) = x^{\tilde{\theta}}$ с траекториями $g(x) = g(x;\theta) = x^{\theta}$, $\theta \in [\theta_-, \theta_+)$, $\theta_- > 0$, непрерывно убывающими по параметру θ во всех точках области определения $X = (x_1, x_+) = (0,1)$.

Теперь в качестве оценки функциональной зависимости $y = g(x)$ между финансово-экономическими показателями x и y можно предложить, например, функцию $y = \bar{g}(x) = g(x;\bar{\theta}) = x^{\bar{\theta}}$. Функции $y = g_*(x) = g(x;\bar{\theta} + s) = x^{\bar{\theta}+s}$ и $y = g^*(x) = g(x;\bar{\theta} - s) = x^{\bar{\theta}-s}$, где $s = s(\theta) = \sqrt{D\tilde{\theta}}$ – стандартное отклонение случайной величины $\tilde{\theta}$, указывают ожидаемые отклонения (вниз и вверх соответственно) от «средней» оценки $y = \bar{g}(x)$. Вероятность попадания траектории стохастического процесса $\tilde{g}(x) = g(x;\tilde{\theta}) = x^{\tilde{\theta}}$ в область, ограниченную графиками функций $y = g_*(x) = g(x;\bar{\theta} + s) = x^{\bar{\theta}+s}$ и $y = g^*(x) = g(x;\bar{\theta} - s) = x^{\bar{\theta}-s}$, можно сосчитать по формуле (2), подставив в нее значения $\theta_1 = \bar{\theta} - s(\theta)$, $\theta_2 = \bar{\theta} + s(\theta)$.

В качестве примера применения метода рандомизированных траекторий, использующего модель стохастического процесса, порожденного квазиравномерно распределенным параметром, рассмотрим задачу оценки функциональной зависимости $u = u(r)$ доли u потенциальных вкладчиков, реально открывших депозиты в единственном банке, расположенном в небольшом населенном пункте, от предлагаемой банком годовой доходности r по вкладам[14].

Пусть исследователь считает, что функциональная зависимость между рассматриваемыми показателями r и u задается функцией вида

$$u(r;\theta) = \left(\frac{r - r_-}{r_+ - r_-}\right)^{\theta}, \quad (8)$$

где $r \in (r_-, r_+)$, $r_- \geq 0$, а $\theta \in [\theta_-, \theta_+)$, $\theta_- > 0$. Дополнительно он полагает, что функция $u = u(r;\theta)$ выпукла вверх (т. е. $\theta_+ < 1$). Пусть экспертная информация, доступная исследователю, состоит в указании границ $r_- = 5$, $r_+ = 25$ интервала (r_-, r_+) задания показателя годовой доходности r, измеряемого в процентах, и в указании на то, что при $r = r_0 = 15$ доля привлеченных вкладчиков лежит в диапазоне от $u_*(r_0;\theta) = u_*(15;\theta) = 0.6$ до $u^*(r_0;\theta) = u^*(15;\theta) = 0.9$.

Функцию (8) можно представить в виде простейшей степенной функции $u = u(r;\theta) = g(x;\theta) = x^{\theta}$, где $x = (r - r_-)/(r_+ - r_-)$. Приведенная выше информация о функции $u = u(r;\theta)$ эквивалентна следующей информации о функции $g(x;\theta) = x^{\theta}$: $x \in (0,1)$, $g_*(0.5) = 0.5^{\theta_+} = 0.6$, $g^*(0.5) = 0.5^{\theta_-} = 0.9$. Отсюда получаем оценки $\theta_+ = \ln 0.6/\ln 0.5 \approx 0.737$, $\theta_- = \ln 0.9/\ln 0.5 \approx 0.152$ границ параметрического интервала $[\theta_-, \theta_+)$.

Используя формулы (5) и (7), находим математическое ожидание $\bar{\theta} = E\tilde{\theta} \approx 0.405$ и стандартное отклонение $s = s(\theta) = \sqrt{D\tilde{\theta}} \approx 0.167$ квазиравномерно распределенного рандомизированного параметра θ, порождающего стохастический процесс $\tilde{u}(r) = u(r;\tilde{\theta})$ с траекториями $u = u(r;\theta)$, равномерно распределенными в области их прохождения. Теперь в качестве оценки функциональной зависимости между рассматриваемыми финансово-экономическими показателями r и u можно использовать функцию $u = \bar{u}(r) = u(r;\bar{\theta})$, график которой представлен на рис. 2. Там же приведены графики функций $u = u_-(r) = u(r;\theta_+)$ и $u = u_+(r) = u(r;\theta_-)$, ограничивающие область прохождения траекторий процесса $\tilde{u}(r) = u(r;\tilde{\theta})$, а также графики функций $u = u_*(r) = u(r;\overline{\theta} + s)$ и $u = u^*(r) = u(r;\overline{\theta} - s)$, указывающие ожидаемые отклонения (вниз и вверх соответственно) от «средней» оценки $u = \overline{u}(r)$.

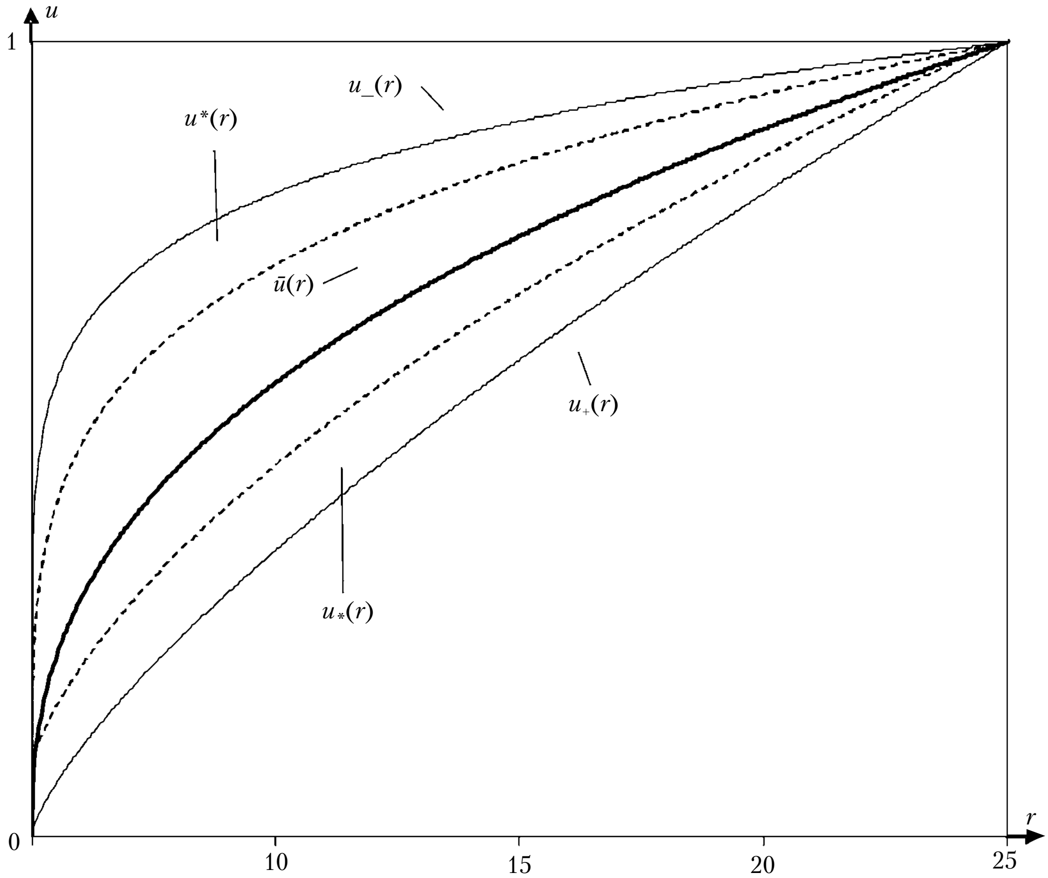

Рис. 2. Графики функций $u = \overline{u}(r)$, $u = u_-(r)$, $u = u_+(r)$, $u = u_*(r)$ и $u = u^*(r)$.

Подставляя в формулу (2) значения $\theta_1 = \overline{\theta} - s(\theta)$, $\theta_2 = \overline{\theta} + s(\theta)$, получаем вероятность $P(W(\overline{\theta} - s(\theta), \overline{\theta} + s(\theta))) \approx 0.587$ попадания траекторий стохастического процесса $\tilde{u}(r) = u(r;\tilde{\theta})$ в пространственный интервал $W(\overline{\theta} - s(\theta), \overline{\theta} + s(\theta))$, ограниченный графиками функций $u_*(r) = u(r;\overline{\theta} + s)$ и $u^*(r) = u(r;\overline{\theta} - s)$. Эта вероятность может интерпретироваться как мера надежности оценки $u = \overline{u}(r)$ функциональной зависимости доли u потенциальных вкладчиков, реально открывших депозиты в рассматриваемом банке, от предлагаемой банком годовой доходности r по вкладам.

Заключение

Рассмотренный в статье вариант метода рандомизированных траекторий (МРТ), основанный на теории стохастических процессов, индуцированных квазиравномерно распределенными случайными параметрами, предназначен для оценки в условиях неопределенности функциональной зависимости между финансово-экономическими показателями.

Приведенные реальные задачи определения функциональной зависимости финансово-экономических показателей и подробно разобранный пример оценки степенной функциональной зависимости доли вкладчиков, открывших депозитные счета в банке, от предлагаемой банком годовой доходности по вкладам, показывают, что разработанный МРТ является гибким инструментом оценки функций, применимым в различных ситуациях, связанных с использованием экспертной информации[15]. Использование же дополнительной экспертной информации в сочетании с традиционными эконометрическими методами позволяет повысить точность и достоверность получаемых оценок функциональной зависимости финансово-экономических показателей различной природы.

Дальнейшее развитие метода рандомизированных траекторий и расширение области его применения в задачах экономики на данном этапе состоит, по нашему мнению, в выработке на основе МРТ системы методик оценивания конкретных видов функций и в накоплении практического опыта использования этих методик для оценки функциональной зависимости различных финансово-экономических показателей.

---

[1] *Gopala K.* Crucial sets of observables and functional equations associated with some widely used grows laws //Proceedings of Indian Academy of Science. 1975. Vol. 82. P. 1–16; *Oliver F.* Methods of estimating the logistic grows function // Applied Statistics. 1964. Vol. 13. P. 57–66.

[2] *Поманский А. Б.* Анализ модели стимулирования и логарифмически нормальное распределение доходов // Экономика и математические методы. 1985. Т. 21. № 3. С. 443–452.

[3] *Faber V., White A., Wing G.* Analysis of a model that leads to the Pareto law of wealth distribution // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1985. Vol. 112. P. 579–594.

[4] *Seal J., Theil H.* Working's model for food // Economic Letters. 1986. Vol. 22. P. 103–104.

[5] *Hill B.* The rank-frequency form of Zipf's law // Journal of the American Statistical Association. 1974. Vol. 69. P. 1017–1026.

[6] *Cobb C., Douglas P.* A theory of production // American Economic Review. 1928. Supplement. Vol. 18. P. 139–165.

[7] Об определении различных типов неопределенности см. подробнее в работах: *Хованов Н. В.* 1) Математические модели риска и неопределенности. СПб., 1998; 2) Три типа математических моделей неопределенности // Измерительная техника. 2005. № 9. С. 39–44.

[8] В отличие от варианта МРТ, рассмотренного в работе: *Михайлов М. В., Хованов Н. В., Чудовская Л. А.* Метод рандомизированных траекторий в задачах прогнозирования динамики экономических показателей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2009. Вып. 1. С. 120–131 и основанного на модели рандомизации выбора функции из *конечного множества* всех возможных дискретных функций, описывающих функциональную зависимость между исследуемыми финансово-экономическими показателями, в настоящей статье предметом рассмотрения являются стохастические процессы, имеющие *бесконечное множество* параметризированных траекторий.

[9] *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей. М., 1969. С. 46–47.

[10] *Bayes Th.* An essay towards solving a problem in the doctrine of chances // Biometrika. 1958. Vol. 5. Part 3–4. P. 296–315 (Reproduced from Philosophical Transactions of London Royal Society. 1763. Vol. 53).

[11] Об аргументах в пользу выбора именно равномерного распределения в качестве распределения, моделирующего неопределенность выбора конкретного значения параметра из конечного интервала, см., например, работы: *Зельнер А.* Байесовские методы в эконометрии. М., 1980; *Barmish B., Lagoa C.* The uniform distribution: a rigorous justification for its use in robustness analysis // Mathematical Control, Signals, Systems. 1997. Vol. 10. P. 203–222; *Kan Yu., Kibzun A.* Sensitivity analysis of worst-case distribution for probability optimization problems // Probabilistic Constrained Optimizations / Ed. by S. Uryasev. New York, 2000. P. 31–46.

[12] Впервые понятие квазиравномерно распределенного рандомизированного параметра, обеспечивающего равномерное распределение траекторий соответствующего порожденного стохастического процесса, было введено в работе: *Корников В. В., Хованов Н. В.* Квазиравномерные распределения рандомизированных

параметров // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1982. Вып. 3. № 19. С. 90–92. Позднее это понятие разрабатывалось и применялось для различных целей, связанных с моделированием неопределенности выбора функциональной зависимости, в следующих работах: *Хованов Н. В., Корников В. В.* Стохастические процессы и поля, порожденные рандомизированными параметрами // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия (Депонировано ВИНИТИ 14.02.84. № 894-84). М., 1984. 26 с.; *Fellenberg B., Pilz J.* On the choice of prior distribution for Bayesian reliability analysis // Freiberger Forschungs. 1985. Vol. 170. P. 49–68; *Корников В. В., Скитович В. П., Хованов Н. В.* Статистические методы анализа эффективности и надежности сложных систем в условиях дефицита информации // Вопросы механики и процессов управления. Вып. 9. Математические модели сложных систем. Надежность и обработка информации. Л., 1986. С. 84–116; *Хованов Н. В.* Рандомизированный выбор аппроксимации // Тезисы докладов конференции «Конструктивная теория функций». Санкт-Петербург, 25–29 мая 1992. СПб., 1992. С. 68–70; *Hovanov N., Kornikov V., Seregin I.* Distribution function choice under uncertainty // Proceedings of the International Workshop «Mathematical Methods and Tools in Computer Simulation». St. Petersburg (Russia), May, 24–28, 1994. St. Petersburg: Scientific Research Institute of Mathematics and Mechanics, 1994. P. 65–67; *Hovanov N., Kornikov V., Seregin I.* A stochastic model for an uncertain choice of a distribution in the Bayesian scheme // Proceedings of the Sixth International Conference «Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems». Granada (Spain), July, 1–5, 1996. Vol. II. Granada, 1996. P. 969–972.

[13] Подробности построения рассматриваемого стохастического процесса, реализациями которого служат функции распределения, и его модификаций см. в работах: *Dubins L., Freedman D.* Random distribution functions // Bulletin of American Mathematical Society. 1963. Vol. 69. P. 548–551; *Хованов Н. В.* Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб., 1996.

[14] Аналогичный пример оценки по эмпирическим данным функциональной зависимости объема привлеченных банком средств от затрат на их привлечение подробно разобран в работе: *Конюховский П. В.* Моделирование стохастической динамики финансовых ресурсов. СПб., 2002. С. 38–41.

[15] О применении стохастических процессов, индуцированных рандомизированными параметрами, в экономике см., напр., в работах: *Hovanov N., Fedotov Yu., Seregin I.* Uncertain choice of monotonic functions in economics // Abstracts of the 4-th International Workshop «Multiple Criteria and Game Problems under Uncertainty». Orekhovo-Zuevo (Russia). 1996. September 8–14. M., 1996. P. 38; *Hovanov N.* Stochastic processes induced by random parameters: applications to economics // Abstracts of the International Conference «Asymptotic Methods in Probability and Mathematical Statistics». St. Petersburg (Russia), 1998. June 24–28. St. Petersburg, 1998. P. 118–121.

Статья поступила в редакцию 12 марта 2009 г.