

УДК 658.52.011.56

*В. К. Тютюкин*

## **МИНИМАЛЬНЫЙ ЦИКЛ ОДНОПРЕДМЕТНОЙ ЛИНИИ СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ**

Задача минимизации производственного цикла для роботизированной линии (РЛ) была решена нами в предположении отсутствия дублирующего оборудования на операциях и только единственного промышленного робота (ПР)<sup>1</sup>. Однако в таких условиях производственная программа выпуска изделий в плановом периоде может оказаться невыполнимой. В настоящей статье задача решается при отказе от указанной жесткой предпосылки, что значительно расширяет область применения результата.

### **Предварительные общие сведения и результаты для однопредметного производства**

*Технический состав РЛ и характеристика его элементов.* Роботизированная линия — это такой роботизированный комплекс, в котором выполняются разнотипные технологические операции. Она представляет собой объединение нескольких технологических модулей (ТМ) и/или технологических ячеек (ТЯ), т. е. их единую техническую систему (согласно принципа модульности<sup>2</sup>).

*Технологическое оснащение* РЛ представляет собой основное оборудование (станки с ЧПУ), вспомогательное оборудование — несколько питателей (П), накопителей (Н) и ПР, один из которых является транспортным, а остальные — погрузо-разгрузочными.

На РЛ установлено множество разнообразных видов (групп) технологического оборудования (в соответствии с количеством разнотипных технологических операций, выполняемых на ней), т. е. имеется соответствующее количество ТМ и/или ТЯ. В этих группах может быть, таким образом, как один, так и несколько станков-дублеров (т. е. одинаковых станков).

---

**Виктор Константинович ТЮТЮКИН** — д-р экон. наук, профессор кафедры экономической кибернетики Экономического факультета СПбГУ. Окончил Математико-механический факультет ЛГУ (1964) и аспирантуру кафедры экономической кибернетики ЛГУ (1972). В Университете работает с 1965 г. Кандидатскую диссертацию защитил в 1973 г., докторскую — в 1989 г. Стажировался в университетах Франции (1976). Область научных интересов — производственный менеджмент, гибкие автоматизированные производства, микроэкономика. Автор более 40 научных публикаций, в том числе одного учебного пособия с грифом Министерства (в соавторстве) и одной монографии.

© В. К. Тютюкин, 2009

П предназначен для размещения в нем заготовок или деталей (полуфабрикатов), Н — изготовленных РЛ деталей. ПР являются подвижными многостаночниками, так как должны передвигаться вдоль групп станков, обслуживая их, а также соответствующие П и Н.

Погрузо-разгрузочные ПР являются *взаимозаменяемыми* (могут обслуживать любой станок на любой операции).

Считаем, что любая операция (технологическая, основная), охватываемая многостаночным обслуживанием, поручается только одному какому-либо погрузо-разгрузочному ПР (т. е. не «разрезается» для нескольких ПР). Такое поручение операции целиком означает, что все имеющиеся на ней дублиры обслуживаются одним и тем же ПР. При этом каждому ПР может поручаться как одна, так и несколько технологических операций (т. е. имеем ТМ и ТЯ), и тогда он обслуживает только «свои» операции (а следовательно, и «свои» станки).

**Параметры линии и ограничения на их взаимосвязи.** Поскольку рассматриваемая ПЛ является однопредметной (ОПЛ), то для нее, как и для любого однопредметного производства, известны следующие параметры:  $N$  — программа выпуска (количество экземпляров) предмета за плановый период  $T_{пл}$  ( $T_{пл} = 1$  год);  $\Phi$  — эффективный (действительный, полезный) фонд времени (каждой единицы оборудования) за  $T_{пл}$  (мин);  $m$  — количество технологических (основных) операций, выполняемых на линии, а следовательно, и разнообразных видов (групп) технологического оборудования (количество ТМ и/или ТЯ, выполняющих одну, но «свою» какую-либо операцию),  $i$  — номер операции,  $i = 1: m$ ;  $I$  — множество всех этих операций ( $I = \{1, 2, \dots, i, \dots, m\}$ );  $a_i$  — трудоемкость (нормативная) выполнения  $i$ -й операции одного предмета, т. е. штучная трудоемкость, принимаемая и за фактическое время выполнения операции, мин ( $i = 1: m$ ).

Для штучного времени справедливо представление  $a_i = v_i + m_i$ , где  $v_i$  — время обслуживания роботом любого станка-дублера, П и Н на  $i$ -й операции,  $m_i$  — машинное время (на любом станке-дублере) на  $i$ -й операции ( $i = 1: m$ ). Заметим, что априори не известно, выполняются ли непрерывно (подряд) друг за другом все компоненты времени  $v_i$ , а следовательно, и времени  $a_i$  ( $i = 1: m$ ), и поэтому сконцентрированы ли они в одном интервале времени.

Целесообразно считать, что машинное время является достаточно большим по сравнению со временем обслуживания станка на любой операции:  $m_i \gg v_i$  ( $i = 1: m$ ), ибо только в этом случае имеет смысл пытаться организовывать многостаночное обслуживание.

Неизвестными же параметрами линии являются, прежде всего, следующие:  $c_i$  — количество станков-дублеров на  $i$ -й операции ( $i = 1: m$ ),  $r$  — штучный ритм линии.

Для выполнимости заданной программы выпуска предмета ( $N$ ) за плановый период ( $T_{пл}$ ) (точнее, за  $\Phi$ ) необходимо, чтобы параметры ОПЛ удовлетворяли следующим достаточно очевидным ограничениям:

$$Nr \leq \Phi, \quad c_i r \geq a_i \quad (i = 1: m). \quad (1)$$

Первое из этих ограничений означает, что возможные значения ритма очевидно ограничены сверху:

$$\begin{aligned} r &\leq r^{max}, \\ r^{max} &= \Phi / N, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $r^{max}$  — наибольшее допустимо возможное значение ритма.

Значения  $c_i$  ( $i = 1: m$ ) являются известными, ибо они выбираются минимально возможными, удовлетворяющими системе неравенств (1), т. е.

$$c_i = \lceil a_i / r^{max} \rceil \quad (i = 1: m). \quad (3)$$

**Ритмичность производства на ОПЛ.** Производственный процесс на ОПЛ организуется как ритмичный, т. е. циклический, периодически повторяющийся. Для этого достаточно организовать ритмичную работу мельчайших ее производственных подразделений, т. е. всех станков на ней. Тогда получается ритмичная работа и любого производственного подразделения более высокого уровня интеграции — любой отдельной операции (как совокупности станков-дублеров на ней) и любой совокупности операций, в частности, совокупности операций, поручаемых многостаночнику, и всех операций на линии. Уровень ритмичности производственного процесса в данном производственном подразделении измеряется, как известно, таким календарно-плановым нормативом, как *период оборота* (продолжительность цикла). Ритмичность на ОПЛ может быть как штучной, так и партионной. В случае организации многостаночного обслуживания на линии эта ритмичность является *штучной*, т. е. на любом станке через один и тот же промежуток времени (период оборота для станка) повторяется изготовление отдельной штуки предмета, причем штучные ритмичности (периоды оборота) на дублерах внутри  $i$ -й операции являются *одинаковыми* —  $r_i$ , и тогда для них справедливы следующие очевидные выражения:

$$r_i = c_i r \quad (i = 1: m). \quad (4)$$

**Искомые параметры РЛ.** Основными из них, помимо указанного выше штучного ритма ( $r$ ), являются следующие специфические (т. е. связанные с организацией многостаночного обслуживания) параметры линии:  $I$  — множество операций, охватываемых многостаночным обслуживанием;  $S$  — количество роботов-многостаночников на линии ( $s = 1: S$ );  $I_s$  — множество операций, обслуживаемых  $s$ -м роботом-многостаночником ( $s = 1: S$ ).

Искомыми считаются также значения и таких параметров линии, которые являются вспомогательными, производными, т. е. значения которых — это следствие значений основных параметров линии, прежде всего, ритма линии. Такими параметрами выступают периоды оборота производственного процесса для отдельных операций:  $r_i$  ( $i = 1: m$ ), рассчитываемые по уже указанной выше формуле (4); множества операций  $I_s$ , т. е. для  $s$ -го многостаночника:  $\pi_s$  ( $s = 1: S$ ); множества операций  $I$ , т. е. для линии в целом:  $\pi$ .

Период оборота для любой группы операций равен произведению штучного ритма на наименьший одинаковый выпуск экземпляров предмета со всех рассматриваемых операций. Следовательно, для искомых периодов оборота имеем следующие выражения:

$$\pi_s = r \operatorname{НОК}_{i \in I_s} c_i \quad (s = 1: S), \quad (5)$$

$$\pi = r \operatorname{НОК}_{i \in I} c_i, \quad (6)$$

где символ *НОК* расшифровывается как «наименьшее общее кратное».

**Требования к организации работы многостаночников.** Помимо указанных выше параметров искомыми являются также и календарные графики (КГ) работы всех многостаночников на линии. Требования к ним предъявляются одни и те же. Поэтому эти требования укажем для одного из них ( $s$ ,  $1 \leq s \leq S$ ).

КГ для него достаточно строить только на один цикл ( $\pi_s$ ), ибо он повторяется  $\pi/\pi_s$  раз в цикле для всей линии ( $\pi$ ).

Разобьем промежуток  $\pi_s$  на промежутки продолжительностью  $r$  единиц времени (назовем их *частичными* промежутками). Заметим, что число таких промежутков является натуральным (в силу полученной выше формулы (5) для  $\pi_s$ ), а именно, равным  $\operatorname{НОК}_{i \in I_s} c_i$ .

Так как производство на всех операциях, поручаемых данному роботу-многостаночнику (впрочем, как и на всех операциях, выполняемых на линии), продвигается на одну штуку за каждый частичный промежуток, то в течение него робот должен проделать следующие действия (три требования к нему).

1. Побывать на всех поручаемых ему операциях, т. е. из множества  $I_s$ , причем возможно даже несколько раз (с целью полного обслуживания) на каждой из них.

2. Обслужить при этом каждую из них (в частности, запустив на ней в производство одну деталь), затратив на это время  $v_i$  (не обязательно сконцентрированное, как уже отмечено выше, в одном интервале времени) для оборудования на  $i$ -й операции ( $i \in I_s$ ), а именно, обслужить какой-либо станок-дублер на ней, причем в следующем частичном промежутке должен быть обслужен другой дублер на этой же операции.

3. Вернуться в конце ритма на первую операцию (из числа совмещаемых им операций).

В связи с требованием 2 считаем, что дублеры, имеющиеся внутри любой операции, обслуживаются последовательно друг за другом, т. е. в порядке возрастания их номеров ( $1, 2, \dots, c_i$  — на  $i$ -й операции с повторением этой последовательности, как это и требуется при ритмичной работе, через каждые  $r_i$ ,  $i \in I_s$ , единиц времени необходимое число раз на протяжении цикла  $\pi_s$ ) каждый — в «своем» частичном промежутке. Таким образом, робот обслуживает на всех совмещаемых им операциях: в первом ритме — первые дублеры, во втором — вторые и т. д., в последнем ритме (т. е. с номером  $\text{НОК } c_i$ ) — последние дублеры. В общем же случае обозначим:  $s_{ij}$  — номер дублера на  $i$ -й операции, обслуживаемый в  $j$ -м частичном промежутке ( $i \in I_s$ ,  $1 \leq j \leq \text{НОК } c_i$ ). Легко показать, что  $s_{ij} = \{(j-1)/c_i\}c_i + 1$ , где  $\{x\}$  — дробная часть числа  $x$ . Числа  $s_{ij}$  ( $i \in I_s$ ,  $1 \leq j \leq \text{НОК } c_i$ ), рассчитываемые по этой формуле, запишем в виде матрицы, считая, для простоты, что  $I_s = \{1, 2, \dots, k\}$  (см. таблицу).

Таблица

$j \backslash i$	1	2	...	$c_1$	1	2	...	$c_1$	...	$s_{1j}$	...	1	2	...	$c_1$
2	1	2	...	$c_2$	1	2	...	$c_2$	...	$s_{2j}$	...	1	2	...	$c_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$i$	1	2	...	$c_i$	1	2	...	$c_i$	...	$s_{ij}$	...	1	2	...	$c_i$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$k$	1	2	...	$c_k$	1	2	...	$c_k$	...	$s_{kj}$	...	1	2	...	$c_k$

$= \| s_{ij} \| .$

Таким образом, номера дублеров, обслуживаемых в  $j$ -м частичном промежутке, находятся в  $j$ -м столбце этой матрицы ( $1 \leq j \leq \text{НОК } c_i$ ).

В связи с требованием 3 маршрут движения многостаночника от первой поручаемой ему операции до возвращения к ней же в конце ритма можно разбить на две части: путь от этой первой операции до последней поручаемой ему — путь «туда» (вперед) и путь от последней до первой поручаемой многостаночнику операции — путь «обратно» (назад).

Очевидно, что каждая операция, поручаемая для обслуживания многостаночнику, кроме последней, посещается им в каждом ритме более одного раза (даже если маршрут движения многостаночника является прямолинейным, при котором имеет место

двухразовое посещение станков: первый раз — на пути «туда» и второй — на пути «обратно»). Последняя же поручаемая ему операция посещается им только один раз, ибо у нее он совершает поворот и начинает движение в обратную сторону.

**Концентрация обслуживающих операций для станка.** Все компоненты времени  $v_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) выполняются, не накладываясь друг на друга во времени, но не обязательно непрерывно друг за другом. Однако, как показано в упомянутой выше статье<sup>3</sup>, для рассматриваемой здесь структуры ОПЛ (эта структура будет рассмотрена ниже) имеется возможность выполнять их подряд (непрерывно) друг за другом, т. е. выполнять их и только их в некотором едином интервале времени (такая структура времени обслуживания называется *простейшей*) и, таким образом, обслуживать каждый станок за одно его посещение роботом, из чего вытекают *следствия*:

1) можно ограничиться прямолинейным маршрутом движения робота (являющимся кратчайшим по длине и времени на него) как на пути «туда», так и на пути «обратно»;

2) посещение, за которое происходит обслуживание станка, необходимо должно быть на пути «туда» (т. е. обслуживание происходит в первое из двух посещений станка) и, следовательно, на пути «обратно» робот обслуживающих операций не производит, а только движется (непрерывно, без простоев) в исходную позицию, т. е. возвращается к первой из совмещаемых им операций;

3) в календарном графике работы линии величину  $v_i$  ( $i = 1: m$ ) можно показывать в виде единого целого отрезка (являющегося стороной прямоугольника, изображающего это время обслуживания), не выделяя таким образом, в частности, время обслуживания П и Н.

Заметим, что за временем  $v_i$ , очевидно, сразу начинается время  $m_i$  ( $i = 1: m$ ). Тогда получается концентрация и штучного времени  $a_i$  и, следовательно, оно представляется в КГ в виде единого отрезка.

Согласно определению периода оборота, выполнение штучного времени  $a_i$  на любом дублере внутри  $i$ -й операции (а следовательно, и выполнение времени его обслуживания  $v_i$  роботом и, в частности, запуск каждого следующего экземпляра предмета) осуществляется через промежуток времени длиной  $r_i$ .

Обслуживающие операции для станков на всех закрепленных за многостаночником операциях должны выполняться, очевидно, тоже в непересекающиеся промежутки времени, т. е. последовательно друг за другом, не накладываясь друг на друга во времени (как не следует допускать накладок друг на друга во времени смежных работ по детали и по станку, что предъявляется к любым линиям, т. е. даже и без многостаночного обслуживания). Соответствующий КГ работы многостаночника с учетом разной ритмичности на совмещаемых им операциях называется *допустимым*. Существование его накладывает некоторые специфические ограничения на искомые параметры линии, и поэтому указанные КГ строятся после выбора значений данных параметров. Эти вопросы будут рассмотрены ниже.

### **Сложная структура РЛ**

Считаем, что в случае ТЯ (т. е. нескольких, а не единственного станка на операции) станки, имеющиеся на такой операции, располагаются по круговой схеме, и в центре каждого такого круга имеются свои П и Н, находящиеся рядом друг с другом.

Операции, поручаемые каждому погрузо-разгрузочному ПР, не обязательно являются соседними (смежными) по технологии. В пространстве целесообразно расположить их (т. е. все круги со станками-дублерами на них) все же по соседству, подряд друг

за другом для каждого ПР, вдоль некоторой прямой, которая одина для всех ПР, ибо тогда прямолинейные маршруты движения ПР окажутся непересекающимися (ПР «не мешают» друг другу) и кратчайшими по длине, а следовательно, и по времени.

Из сказанного выше следует, что структура рассматриваемой РЛ (т. е. взаимное расположение в пространстве всего ее оборудования, компоновка всех единиц ее оборудования между собой) имеет вид, показанный на рис. 1, на котором  $d$  означает время движения ПР от любой операции к соседней (последующей или предыдущей) совмещаемой им операции. В верхней его части изображен транспортный ПР, осуществляющий межоперационное перемещение деталей, т. е. межоперационных оборотных заделов, в соответствии с технологией их изготовления и, следовательно, объединяющий все отдельные операции в единый технологический процесс, в единую поточную линию (любой заполненный Н переносится им к следующей технологической операции и становится П для нее, а опустошенный П около нее становится Н). Организация его работы требует отдельного рассмотрения и здесь оно не приводится. В нижней части рис. 1 показан только первый погрузо-разгрузочный робот-многостаночник (в квадратах — номера станков на всех обслуживаемых им операциях), ибо для остальных роботов-многостаночников пространственное расположение обслуживаемого ими оборудования аналогично.

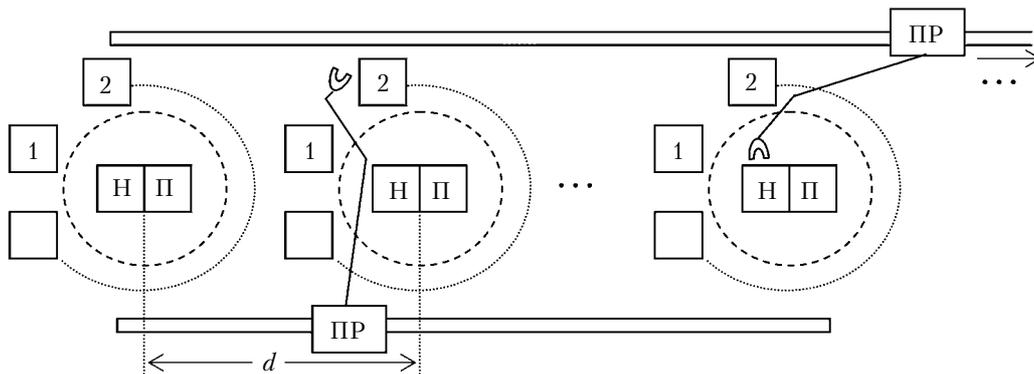


Рис. 1. Фрагмент структуры роботизированной линии.

### Экономико-математическая модель многостаночного обслуживания

**Ограничения на основные искомые параметры линии.** Параметры линии должны удовлетворять, помимо общим ограничениям однопредметного производства (1), еще и следующим специфическим ограничениям многостаночного обслуживания:

$$I \subset I. \quad (7)$$

Искомые множества  $I_s$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\bigcup_{s=1}^S I_s = I, \quad (8)$$

$$I_s \cap I_t = \Lambda \quad (s \neq t), \quad (9)$$

где  $\Lambda$  — пустое множество.

Связь искомых множеств  $I_s$  и ритма  $r$  выражается неравенством:

$$\sum_{i \in I_s} v_i + 2d(|I_s| - 1) \leq r \quad (s = 1: S), \quad (10)$$

где символ  $|I_s|$  означает количество элементов (операций) множества  $I_s$ .

Ограничения (7) и (8) достаточно очевидны, а (9) выполняется в силу принятой выше индивидуальной формы многостаночного обслуживания. Ограничение (10) является необходимым и достаточным условием существования допустимого КГ работы многостаночника. Необходимость его вытекает из указанного выше требования к организации работы многостаночника, состоящего в том, что операции для любого многостаночника должны быть подобраны так, чтобы суммарное время его работы (обслуживания и поступательного движения «туда» и «обратно») на всех совмещаемых операциях (левая часть неравенства (10)) не превосходило ритма линии (правая часть неравенства (10)). В этом ограничении величина  $\sum_{i \in I_s} v_i$  и является, в силу допустимости КГ (при которой обслуживание станков выполняется в непересекающиеся промежутки времени), временем обслуживания на всех совмещаемых операциях, а величина  $2d(|I_s| - 1)$  есть время для прямолинейного маршрута движения робота «туда» и «обратно» (который имеет место согласно указанному выше следствию 1 из возможности полного обслуживания станка за однократное посещение его роботом). Достаточность же условия (10), т. е. существование при его выполнении допустимого КГ, будет показана ниже.

Система ограничений (1), (7)–(10) является совместной, но неопределенной (т. е. имеет бесчисленное множество решений).

Запишем ограничения (1) и (10) в виде двустороннего ограничения на ритм

$$\max(\bar{r}, \tilde{r}) \leq r \leq r^{\max}, \quad (11)$$

$$\text{где } \bar{r} = \max_{1 \leq i \leq m} \frac{a_i}{c_i}, \quad (12)$$

$$\tilde{r} = \max_{1 \leq s \leq S} \left[ \sum_{i \in I_s} v_i + 2d |I_s| \right] - 2d. \quad (13)$$

**Целевая функция (ЦФ) задачи.** В качестве ЦФ выберем период оборота производственного процесса на линии, который следует минимизировать:  $\pi \rightarrow \min$ . Покажем, что для этого достаточно решить задачу

$$\tilde{r} \rightarrow \min, \quad (14)$$

где  $\tilde{r}$  находится по формуле (13).

Для этого, прежде всего, заметим, что исходная задача  $\pi \rightarrow \min$  равносильна задаче  $r \rightarrow \min$ , что вытекает из формулы (6), в правой части которой второй множитель является постоянной величиной. Эта новая задача показывает, что величина  $r$  должна принимать минимальное значение из интервала (11), т. е.

$$r = \max(\bar{r}, \tilde{r}), \quad (15)$$

и тогда эта новая задача принимает вид  $\max(\bar{r}, \tilde{r}) \rightarrow \min$ . Величина  $\bar{r}$ , фигурирующая в этом выражении, как видно из формулы (12), выражается через исходные данные и она является постоянной, известной (причем не превосходящей величины  $r^{\max}$ ). Следовательно, для решения полученной задачи  $\max(\bar{r}, \tilde{r}) \rightarrow \min$  и достаточно решить задачу  $\tilde{r} \rightarrow \min$ .

ЦФ (14) означает выравнивание времени работы (обслуживания и движения) многостаночников. Заметим, что для случая, когда многостаночниками являются рабочие (а не роботы), такая ЦФ способствует и выравниванию их зарплат, что справедливо ввиду выполнения ими однотипных (обслуживающих) работ, требующих одинаковой квалификации.

Отметим связь полученной задачи (7)–(9), (11), (14) с известной и вполне эффективно решенной задачей о куче камней<sup>4</sup>. В ней следует считать: камнем — операцию, исходной (большой) кучей камней — множество  $I$ , отдельной кучей камней — множество операций, поручаемых тому или иному многостаночнику ( $I_s$  — состав  $s$ -й кучи). Для введения понятия «веса кучи камней» и далее «веса камня» запишем неравенство (10) в следующем виде:

$$\sum_{i \in I_s} \hat{v}_i \leq r + 2d \quad (s = 1: S), \quad (16)$$

$$\text{где } \hat{v}_i = v_i + 2d. \quad (17)$$

Из неравенства (16) следует, что вес  $s$ -й кучи (суммарный вес камней, попавших в нее) — это сумма в его левой части  $\sum_{i \in I_s} \hat{v}_i$ . Следовательно, весами камней следует считать слагаемые, фигурирующие в этой сумме, т. е. вес  $i$ -го камня — величина  $\hat{v}_i$ , рассчитываемая по формуле (17) (время обслуживания станка на  $i$ -й операции и движения робота от соседней операции к данной операции и от нее — к следующей).

### Решение задачи

**Выбор значений искомых параметров (основных и вспомогательных) линии.** Множество  $I$  (множество охватываемых многостаночным обслуживанием операций) целесообразно построить как можно более широким. Покажем, что достигнуть этого можно с использованием величины  $r^{\max}$ . Действительно, из формул (16), (17) (являющихся, напомним, необходимым и достаточным условием охвата операций многостаночным обслуживанием) и второго неравенства в (11) имеем следующее необходимое условие охвата  $i$ -й операции многостаночным обслуживанием:  $v_i \leq r^{\max}$ . Потому искомым самым широким является множество  $\{i : v_i \leq r^{\max}\}$ , которое и возьмем в качестве  $I$ .

Выбор количества многостаночников ( $S$ ) и множеств операций, поручаемых каждому из них ( $I_s, s = 1: S$ ), осуществим на основе решения задачи о куче камней. Так как количество многостаночников (куч) в рассматриваемой задаче заранее неизвестно (в отличие от задачи о куче камней в стандартной постановке), то в качестве его начального (возможно лишь предварительного) значения выберем оценку снизу для количества куч. Так как вес каждой маленькой кучки должен не превосходить величины  $\hat{r}$ , где

$$\hat{r} = r^{\max} + 2d, \quad (18)$$

то такой оценкой является величина  $S_o = \lceil (\sum_{i \in I} \hat{v}_i) / \hat{r} \rceil$ . Далее решаем задачу о куче камней с количеством куч  $S_o$ . Если оптимальное значение ЦФ этой задачи (вес самой тяжелой кучи) не превосходит  $\hat{r}$  и, следовательно, когда для величины  $\tilde{r}$  (см. формулу (13)) выполняется  $\tilde{r} \leq r^{\max}$ , а тогда выполняется и (11), то полагаем  $S = S_o$ . Если же оно окажется больше  $\hat{r}$ , то количество куч  $S_o$  является недостаточным (а лишь предварительным) и поэтому его нужно увеличивать. Далее решаем задачу о куче камней с количеством куч  $S_o + 1$ . Если оптимальное значение ЦФ этой новой задачи не превосходит  $\hat{r}$ , то полагаем  $S = S_o + 1$ . Если же оно окажется больше  $\hat{r}$ , то продолжаем аналогичный процесс. В результате получим окончательное количество куч (многостаночников) —  $S$  и состав каждой из них —  $I_s$  ( $s = 1: S$ ). Кроме того, будет известно и оптимальное значение ЦФ (вес самой тяжелой кучи) в последней решенной задаче о куче камней —  $\max_{1 \leq s \leq S} \sum_{i \in I_s} \hat{v}_i$ , которое, согласно построению, не превосходит величины  $\hat{r}$ . В этом случае, как уже установлено чуть выше, выполняется и неравенство  $\tilde{r} \leq r^{\max}$ .

Значение ритма линии ( $r$ ) находим по формуле (15), т. е. полагаем  $r = \max(\bar{r}, \tilde{r})$ . Такое значение ритма, естественно, удовлетворяет второму из ограничений (11):  $r \leq r^{\max}$ .

Итак, найдены значения основных параметров линии при организации на ней многостаночного обслуживания. Вспомогательными параметрами являются, как отмечено выше, периоды оборота производственного процесса  $r_i$  ( $i=1:m$ ),  $\pi_s$  ( $s=1:S$ ),  $\pi$ . Они рассчитываются по соответствующим формулам (4)–(6).

**Построение допустимого КГ работы линии с многостаночным обслуживанием.**

Существование допустимого КГ работы линии обеспечивается выполнением для каждого многостаночника соответствующего условия (10), необходимость которого показана выше. Покажем теперь и достаточность условий (10), т. е. при выполнении каждого из них существует допустимый КГ для соответствующего многостаночника (несмотря на наличие разной ритмичности на совмещаемых многостаночником операциях).

Построение КГ работы многостаночников осуществим по одним и тем же правилам. Поэтому укажем их только для одного какого-либо из них, например  $s$ -го, т. е. для множества операций  $I_s$  ( $1 \leq s \leq S$ ). Пусть  $k$  есть количество операций, образующих это множество, и пусть, для простоты, они являются соседними (смежными друг с другом) и по технологии (а не только по расположению станков на них), т. е.  $I_s = \{1, 2, \dots, k\}$ .

КГ (рис. 2а) будем строить по следующим *правилам*, учитывающим указанные выше требования к организации работы многостаночника и следствия из концентрации времени обслуживания им любого станка, т. е. его действия в каждом промежутке длиной  $r$  (названном выше *частичным*) как на пути «туда», так и на пути «обратно».

На пути «туда» (действия на этом направлении пути вытекают из указанного выше следствия 2 из концентрации времени обслуживания станка) многостаночник:

а) все закрепленные за ним операции (множество  $I_s$ ) посещает в порядке возрастания их номеров (что является следствием прямолинейного маршрута его движения — см. указанное выше следствие 1 из концентрации времени обслуживания станка), и следовательно, эти посещения начинаются с операции с наименьшим из этих номеров;

б) обслуживает (в соответствии с указанным выше требованием 2 к организации работы многостаночника) при этом каждую из них (в частности, запускает на ней в производство одну деталь), затратив на это концентрированное время  $v_i$  для оборудования на  $i$ -й операции ( $i \in I_s$ ), а именно, обслуживает на каждой из них лишь по одному конкретному станку-дублиру, номера которых для  $j$ -го частичного промежутка находятся в  $j$ -м столбце ( $1 \leq j \leq \underset{i \in I_s}{\text{нок } c_i}$ ) указанной выше табл. По окончании времени обслуживания  $v_i$ , как отмечено выше при рассмотрении концентрации времени обслуживания станка, сразу начинается машинное время  $t_i$ , заканчивающееся внутри периода  $r_i$  ( $i \in I_s$ );

в) обслуживание на первой из совмещаемых операций происходит с начала рассматриваемого частичного промежутка, а на всех последующих операциях — исходя из непрерывной работы (обслуживания и движения) многостаночника на пути «туда» в этом частичном промежутке.

На пути «обратно», как отмечено выше в следствии 2 из концентрации времени обслуживания им станков, многостаночник движется тоже поступательно (непрерывно, без простоев), обслуживающих операций не производит, возвращается в исходную позицию, т. е. к первой из совмещаемых операций (к соответствующему станку-дублиру на ней).

Вся проделанная многостаночником работа по продолжительности укладывается в частичный промежуток времени, что вытекает из неравенства (10), которое при доказательстве достаточности считается выполненным. В конце этого промежутка у работа может иметь место некоторый простой, который является, очевидно, концентрированным,

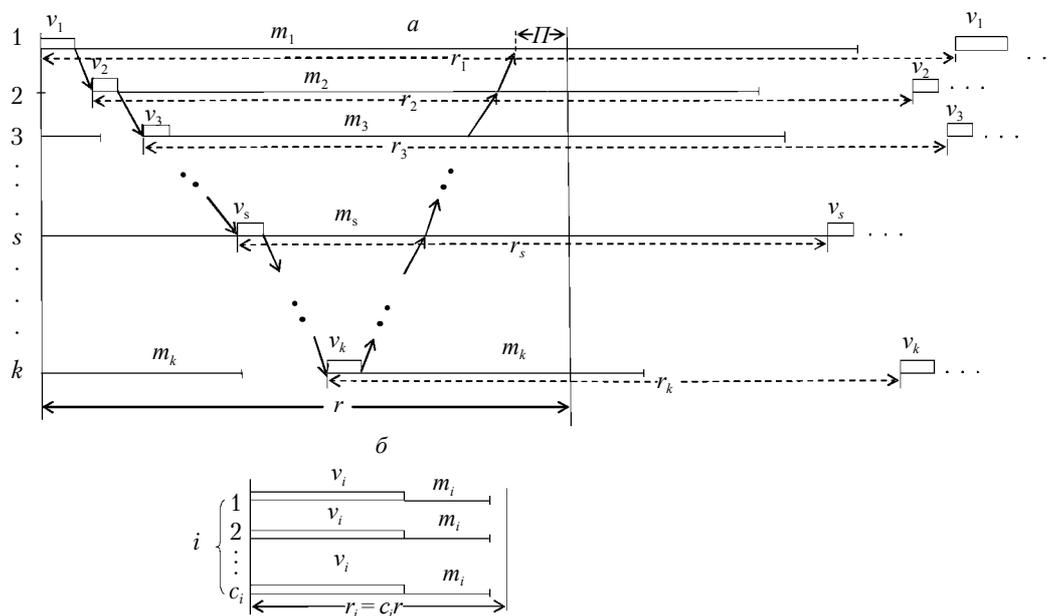


Рис. 2. КГ работы многостаночника на протяжении ритма  $r$  (а) и одностаночников на протяжении периода  $r_i$  (б).

что удобно для подналадки работа. На рис. 2а приведен как раз такой случай, который получается при  $\bar{F} > \bar{F}$ , т. е. когда «узким местом» (определяющим ритм) является станок (его номер обозначен через  $s$ ), а не ПР.

Итак, построен некоторый КГ работы многостаночника (рис.2а). Как видно из этого КГ, работа многостаночника на всех обслуживаемых им операциях осуществляется ритмично, причем с учетом требуемой разной ритмичности на этих операциях. Действительно, каждая следующая деталь запускается на данном станке внутри  $i$ -й операции, как это и требуется, через промежуток времени длиной  $r_i$  ( $r_i = c_i r$ ,  $i \in I_s$ ), что получается в результате использования указанной выше таблицы.

Построенный КГ для многостаночника является допустимым, ибо в нем нет накладок времен обслуживания станков ни в одном из частичных промежутков.

На операциях, не охватываемых многостаночным обслуживанием (если таковые окажутся), организация их ритмичной работы достаточно очевидна. На каждом станке-дублере внутри любой такой операции должен иметься «свой» робот-одностаночник, и следовательно, все они могут работать одновременно (параллельно друг с другом). Соответствующий КГ для  $i$ -й операции на период ее оборота  $r_i$  ( $r_i = c_i r$ ),  $i \notin I'$ , показан на рис. 2б.

<sup>1</sup> Тютюкин В. К. Минимизация производственного цикла для роботизированных ячеек и линий // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2008. Вып. 2. С. 132–144.

<sup>2</sup> Тютюкин В. К. Принцип модульности внедрения автоматизации: Тез. докл. // Материалы международной научной конференции 5–7 апреля 2007 г. «Экономическое развитие: теория и практика». Секции 3, 5–7. СПб., 2007. С. 75–76.

<sup>3</sup> Тютюкин В. К. Минимизация производственного цикла для роботизированных ячеек и линий // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2008. Вып. 2. С. 137.

<sup>4</sup> Романовский И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач. М., 1977. С. 248–251.

Статья поступила в редакцию 12 марта 2009 г.