КРАТКИЕ НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 338.2

Т. Д. Ахобадзе

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ИМИТАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОГРАММ

В условиях набирающего силу глобального экономического кризиса, поразившего в наибольшей степени мировую инвестиционно-финансовую систему, особую актуальность приобретает повышение эффективности инвестиционной деятельности, осуществляемой на различных уровнях управления (федеральном, региональном, локальном). Одним из важнейших способов увеличения эффективности инвестиционной деятельности является оптимизация инвестиционных программ, формируемых в том числе на принципе вариантности. В научной литературе, посвященной вопросу обоснования инвестиционных программ, существует множество различных постановок соответствующих экономико-математических задач. В рамках данной статьи в качестве базовой предлагается использовать постановку задачи формирования оптимальной инвестиционной программы по критерию максимизации «конечного состояния» (капитала инвестора на конец планового периода) с учетом возможности отложенного принятия решений по реализации инвестиционных проектов [1].

Система исходных предпосылок такова: все данные задачи полностью определены и фиксированы; задан набор инвестиционных проектов, из которых необходимо составить инвестиционную программу; инвестиционные проекты независимы, неделимы и не исключают друг друга; инвестиционные проекты полностью описываются своими денежными потоками; компоненты денежных потоков характеризуют затраты или доходы за соответствующий период, пересчитанные к началу этого периода; известна ставка краткосрочной финансовой инвестиции (безрисковая ставка); для всех моментов времени планового периода имеется требуемая ликвидность; критерием оптимальности является максимизация конечного состояния инвестора [1; 6; 7; 10]. Вербальная формулировка задачи — реализация некоторых инвестиционных проектов за указанный период в определенной последовательности, максимизирующей состояние финансовых средств инвестора на момент окончания периода планирования.

Для математической формулировки задачи вводятся следующие обозначения: T — число лет в периоде планирования; m — число рассматриваемых инвестиционных проектов; t

Тите Давидович АХОБАДЗЕ — аспирант кафедры экономической кибернетики и младший научный сотрудник Экономического факультета СПбГУ. Окончил Экономический факультет СПбГУ в 2007 г. Сфера научных интересов — экономико-математические методы обоснования инвестиций, имитационное моделирование в экономике. Автор трех научных публикаций.

— индекс момента времени (t = 1,...,T); i — индекс инвестиционного проекта (i = 1,...,m); M_0 — начальные средства инвестора; M_t — состояние финансовых средств инвестора на момент времени t; g_t — прогнозируемое на момент времени t значение ставки безрисковой доходности; P_{mT} — матрица денежных потоков по инвестиционным проектам размерности m на T; p_{it} — компонента денежного потока по инвестиционному проекту i в момент времени t (если срок полной реализации какого-либо инвестиционного проекта меньше периода планирования, то денежный поток по этому проекту дополняется до периода планирования нулевыми компонентами); x_{it} — бинарная переменная, определяющая, будет ли реализован (x_{it} = 1) проект i в момент времени t или нет (x_{it} = 0) в инвестиционной программе; X_{mT} — матрица бинарных переменных размерности m на T.

Состояние финансовых средств инвестора на начало первого года периода планирования определяется суммой M_0. Инвестор принимает решение о запуске некоторых инвестиционных проектов, на что расходует ресурсы в размере $\sum_{i=1}^{m} x_{i1} p_{i1}$, вкладывая оставшиеся средства под ставку безрискового процента на первый год (g_1). Таким образом, на конец первого года периода планирования состояние финансовых средств инвестора будет описываться уравнением

$$M_1 = \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m} x_{i1} p_{i1} \right) \bullet \left(1 + g_1\right). \qquad (1)$$

Аналогично состояние финансовых средств инвестора на конец t-го года периода планирования может быть представлено следующим образом:

$$M_t = \left(M_{t-1} + \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{m} x_{i,k} p_{i,t-k+1} \right) \bullet \left(1 + g_t\right), \quad t = 3 \ldots T - 1, \qquad (2)$$

где $\sum_{k=1}^{t-1} X_k^T P_{t-k+1}$ — сумма доходов от начатых в предыдущие годы проектов.

Итоговый вид задачи максимизации конечного состояния финансовых средств инвестора на момент окончания периода планирования:

$$\begin{cases} M_T = M_{T-1} + \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{i=1}^{m} x_{i,k} p_{i,T-k+1} \to \max; \\ M_t = \left(M_{t-1} + \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{m} x_{i,k} p_{i,t-k+1} \right) \bullet \left(1 + g_t\right) \geq 0, \quad \forall\, t = 1,...,T-1; \\ x_{it} = \{01\}, \quad \forall\, i = 1...m, \forall\, t = 1,...,T; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{it} \leq 1, \quad \forall\, i = 1,...,m. \end{cases} \qquad (3)$$

Целочисленность переменных и нелинейная целевая функция задачи предполагают поиск методов ее решения в сфере дискретного программирования (краткий обзор метода ветвей и границ, а также метода правильных отсечений Гомори был приведен в [4]). Однако перед тем как осуществлять поиск приемлемого метода решения поставленной задачи, необходимо установить наличие принципиальной возможности нахождения нужного решения без перебора всех или почти всех допустимых планов задачи. Прикладная сторона этой проблемы такова: в задачах перебора, как правило, имеется конечное множество вариантов, среди которых нужно найти оптимальное решение. Считается, что переборная задача является эффективно решаемой, в случае если имеется алгоритм, решающий ее за полиномиальное время (время, ограниченное полиномом от размерности задачи). Но для определенного класса сложности задач — класса сложности *NP* (англ. non-deterministic polynomial) — подобного алгоритма не существует. Эти задачи называют *NP*-полными.

Вопрос о том, действительно ли *NP*-полные задачи труднорешаемы, в настоящее время считается одним из основных открытых вопросов современной математической кибернетики. Тем не менее, несмотря на отсутствие строгой доказательной базы, на данный момент *NP*-полнота задачи означает, что точного алгоритма ее решения (на любой размерности) не существует [2]. Таким образом, если удастся доказать принадлежность поставленной задачи к классу *NP*-полных, то необходимость построения алгоритма, находящего оптимальное решение, время работы которого никогда не превышает некоторой полиномиальной оценки, исчезает. Кроме того, появляется возможность использования некоторых специфических, проработанных методов поиска близкого к оптимальному решения, характерных только для *NP*-полных задач. Отметим, что предложенная задача формирования оптимальной инвестиционной программы действительно относится к классу *NP*-полных дискретных задач с экспоненциальным ростом сложности, что может быть доказано по схеме полиномиальной сводимости [2; 3].

Многообразие способов решения подобных дискретных *NP*-полных задач с нелинейной целевой функцией может быть сведено к следующим основным вариантам: метод округления; метод штрафных функций; метод последовательной линеаризации; метод имитации отжига; генетический алгоритм; метод внешней аппроксимации; метод отсекающей плоскости; смешанные (гибридные) методы и прочие методы, в том числе эвристические. При реализации метода округления осуществляется переход к непрерывному аналогу задачи, проводится поиск оптимального решения любым из доступных методов и выполняется округление оптимальных значений переменных до допустимого плана. Метод штрафных функций предполагает решение задачи без дискретных ограничений с добавлением «штрафа» в целевую функцию. Метод последовательной линеаризации связан с рассмотрением линейной или квадратичной аппроксимации исходной задачи в окрестности местонахождения оптимума. В отличие от перечисленных, методы имитации отжига и генетический алгоритм, или так называемые стохастические методы, не предусматривают прямых трансформаций целевой функции задачи. Рассмотрим метод имитации отжига более подробно.

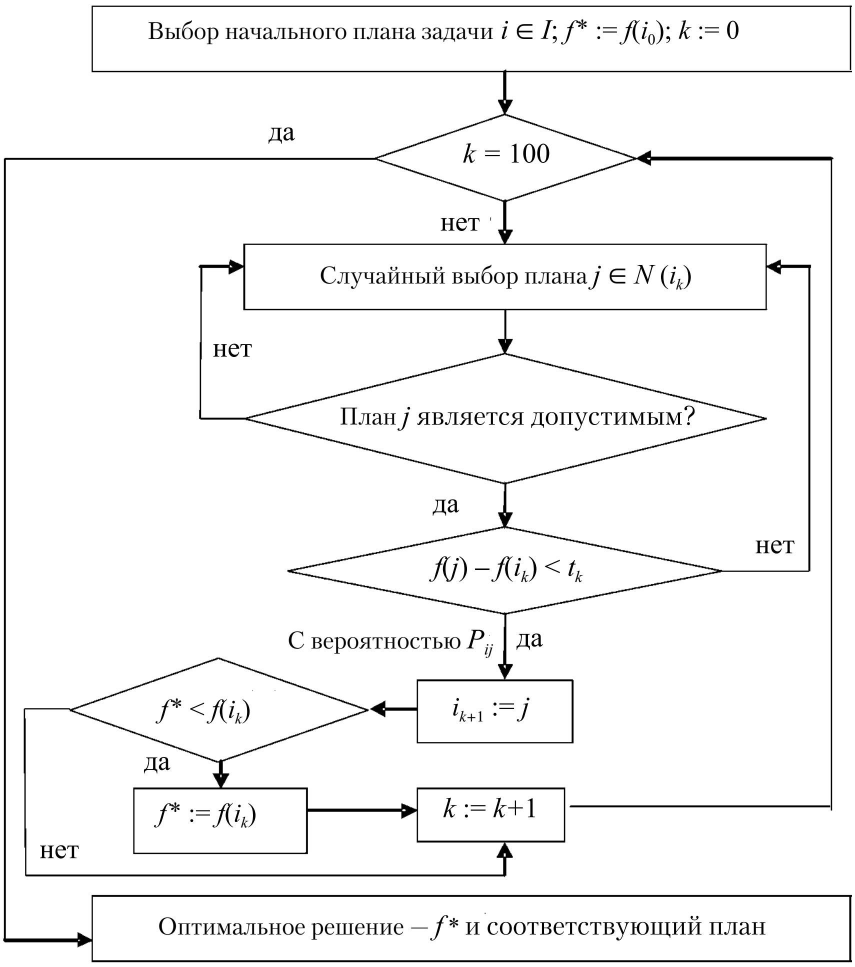
Метод имитации отжига связан с методами имитационного моделирования в статистической физике, основанными на технике Монте-Карло [9]. Исследование кристаллической решетки и поведения атомов при медленном остывании тела обусловило появление этого вероятностного алгоритма, который оказался крайне эффективным в комбинаторной оптимизации [8]. Алгоритм базируется на имитации физического процесса, происходящего при кристаллизации вещества, в том числе при отжиге металлов, в ходе которого атомы кристаллической решетки переходят из одной ячейки в другую с определенной вероятностью, зависящей от температуры.

В рамках применения алгоритма имитации отжига для решения задачи формирования оптимальных инвестиционных программ на каждом шаге для текущего плана задачи i_k в его окрестности $N(i_k)$ случайным образом выбирается план и, если разность по целевой функции f (конечному состоянию инвестора) между новым и текущим планом не превосходит заданного порога t_k, то новый план j заменяет текущий. В противном случае выбирается новый соседний план. Критерием остановки является проведение заданного числа итераций (например, 100). Общая схема алгоритма представлена на рисунке.

Пороговое значение $t_k \geq 0$ — случайная величина с математическим ожиданием $E(t_k) = c_k \geq 0$ (параметр c_k иногда называют температурой [5], в соответствии с терминологией области первичного применения алгоритма). Данный вариант алгоритма имитации отжига допускает произвольное ухудшение по целевой функции, но вероятность такого перехода обратно пропорциональна величине ухудшения:

$$\forall j \in N(i) \quad P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } f(j) > f(i), \\ \exp\left(\dfrac{f(i) - f(j)}{c_k}\right), & \text{если } f(j) \leq f(i). \end{cases} \tag{4}$$

Последовательность c_k играет важную роль при анализе сходимости и выбирается так, чтобы $c_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Существует много эвристических способов выбора конечной последовательности $\{c_k\}$ с целью повышения вероятности обнаружения глобального оптимума, но большинство авторов используют схему геометрической прогрессии.



Блок-схема алгоритма имитации отжига для решения задачи формирования оптимальных инвестиционных программ.

В целом метод отжига позволяет преодолеть локальность решений при поиске глобального экстремума целевой функции. Однако данное преимущество в известной степени нивелируется сравнительно медленной работой алгоритма на пространстве больших размерностей целевой функции из-за отсутствия корректировочного механизма итерационного перехода — многие шаги осуществляются в случайных, ненужных направлениях.

Адаптация метода отжига к рассматриваемой постановке задачи формирования инвестиционной программы производится аналогично изложенному в [18] варианту решений бинарных задач.

В рамках обоснования эффективности алгоритма отжига для получения условно-оптимального решения поставленной задачи формирования инвестиционных программ автором была проведена 1000 экспериментов (по 200 испытаний для 5 различных размерностей задачи) по поиску условно-оптимального конечного состояния средств инвестора для различных стартовых условий задачи (длительности периода планирования, количества рассматриваемых инвестиционных проектов и соответствующих денежных потоков) по методу отжига и двум наиболее распространенным в настоящее время в инвестиционной практике процедурам построения программ — методу максимума чистой приведенной стоимости и методу максимума внутренней нормы доходности. Расчеты проводились при помощи процессора Intel Core 2 Quad Q6600 2.40G 1066 MHz. Полученные эмпирические данные приведены в таблице.

Основные характеристики результатов расчета условно-оптимальных инвестиционных программ с использованием различных методов

Используемый метод	Размерность задачи	Среднее итоговое значение целевой функции
Алгоритм имитации отжига	500	1377,2
	1000	2885,6
	2000	30 847,8
	4000	19 811,5
	10 000	63 877,0
Метод максимума чистой приведенной стоимости (*NPV*)	500	1352,3
	1000	2751,0
	2000	30 664,3
	4000	19 215,5
	10 000	62 925,4
Метод максимума внутренней нормы доходности (*IRR*)	500	1329,1
	1000	2718,4
	2000	30 522,3
	4000	19 215,5
	10 000	62 883,5

Итоговое значение целевой функции при использовании алгоритма имитации отжига по приведенной схеме для всех стартовых условий превосходило оптимальные значения, полученные по двум другим методам. В среднем относительное превышение конечных значений целевой функции, полученной при помощи алгоритма имитации отжига, над целевыми функциями по методам максимума *NPV* и *IRR* составило 3,2 и 4,1% соответственно. Однако на сравнительно малых размерностях методы обеспечивали конечный результат за значительно меньшие временны́е интервалы. Данное обстоятельство является наглядной иллюстрацией вышеотмеченного недостатка алгоритма отжига — сравнительно медленной работы. Тем не менее результаты проведенных эмпирических исследований демонстрируют высокую сравнительную эффективность метода отжига для получения устойчивых условно-оптимальных планов поставленной NP-полной задачи формирования инвестиционных программ, что открывает широкие перспективы его дальнейшей эксплуатации.

---

1. *Воронцовский А.В.* Инвестиции и финансирование. СПб., 2003. 526 с.

2. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982. 416 с.

3. *Карп Р. М.* Сводимость комбинационных задач // Кибернетический сборник: Новая серия. 1975. Вып. 12. С. 16–38.

4. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. М., 1969. 368 с.

5. *Aarts E. H. L., Korst J. H. M., Laarhoven van P. J. M.* Simulated annealing. Local search in combinatorial optimization. Wiley, 1997. P. 91–120.

6. *Albach H.* Investition und Liquiditat. Die Planung des optimalen Investitionsbudgets. Wiesbaden, 1962. 332 S.

7. *Blohm H., Luder K.* Investition: Schwachstelleanalyse des Investitionsbereichs und Investitionsrechnung. München, 1995. 372 S.

8. *Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P.* Optimization by simulated annealing // Science. New Series. 1983. Vol. 220. P. 671–680.

9. *Landau D. P., Binder K.* A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics. Cambridge, 2005. 432 p.

10. *Weingartner H. M.* Mathematical programming and the analysis of capital budgeting problems. New Jersey, 1963. 200 p.

Статья поступила в редакцию 25 мая 2009 г.