

УДК 330.142.211

*А. Ю. Дикарев*

## **ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ СОСТАВНЫХ РЕАЛЬНЫХ ОПЦИОНОВ**

Оценка инвестиционных проектов является немаловажной частью ведения бизнеса. Одним из подходов к управлению риском в рамках инвестиционных проектов может служить метод реальных опционов. Под реальным опционом будем понимать дополнительные возможности развития инвестиционного проекта, его преобразования или свертывания на основе дополнительной инвестиции. Они обусловлены наличием контрагента или внутренними возможностями инвестиционного проекта и могут быть реализованы или нет в будущем в зависимости от того, как сложатся случайные условия. Цель данного исследования состоит в построении механизма оценки настоящей стоимости составного реального опциона в задачах с ограниченной исходной информацией. В качестве метода реализации предлагается использовать имитационное моделирование для получения конечной оценки.

В работе проводился анализ опционов в классе инвестиционных задач, в которых об инвестиционном проекте известно лишь небольшое число данных. Исследователь может иметь данные о денежном потоке проекта, но прочая информация не позволяет в достаточной степени разложить элементы денежного потока на составляющие, чтобы расчет стоимостей опционов мог бы осуществляться обычным образом, сводя описание неопределенности к динамике стоимостей, например, на некоторые ресурсы или товары [7, с. 116; 14, с. 7]. Такая постановка характерна, например, для ряда задач построения оптимальных программ инвестирования и финансирования, которые предполагают распределение проектов во времени с выполнением условия о независимости проектов, составляющих единую инвестиционную программу.

В общем случае можно рассматривать различные типы реальных опционов в зависимости от используемой классификации. В данном исследовании мы будем использовать наиболее распространенный принцип деления реальных опционов по направлению действия. Среди всех типов реальных опционов мы будем выделять только опционы для управления масштабом производств (на расширение производства, на сокращение размеров производства, на временную приостановку, на возобновление производства), на полное

---

**Алексей Юрьевич ДИКАРЕВ** — аспирант кафедры экономической кибернетики и младший научный сотрудник Экономического факультета СПбГУ. В 2007 г. окончил Экономический факультет СПбГУ. Сфера научных интересов — теория инвестиций, управление риском и оценка стоимости бизнеса. Автор 4 научных публикаций.

© А. Ю. Дикарев, 2009

завершение производства с уходом из этого вида бизнеса, опционы на переключение и др. Отметим, что возможно рассмотрение и иных типов опционов, а также проведение классификаций по другим признакам (см., напр.: [2, с. 304; 3, с. 194–200; 5, с. 360–398; 9, с. 28–37; 12, с. 108–109; 13, с. 2–3; 8, с. 671]). Выбор данных типов обусловлен большей простотой моделирования в условиях недостатка информации.

Кратко проведем экономическую интерпретацию показателей модели, которые используются при ее перенесении с теории финансовых опционов на область реальных опционов с учетом ограниченности информации. Для случая с опционами на управление масштабами производства в качестве цены базового актива могут быть ожидания по поводу размера дисконтированных изменений в элементах денежного потока, которые порождают исполнение опциона. Ценой исполнения могут служить либо дополнительные инвестиции, либо выручка от продажи части имущества, либо величина, на которую сокращаются инвестиции, или аналогичный показатель. Под временем до исполнения реального опциона понимается срок от начала инвестиционного проекта до момента осуществления первых дополнительных инвестиций в основной и оборотный капиталы компании или, наоборот, выручки от продаж имущества. Если таких доложений было несколько, то рассчитывается их суммарное приведенное значение на момент первых дополнительных инвестиций, которое и будет ценой исполнения по опциону. Отдельно выделяют опцион на полное свертывание проекта с уходом из данного сектора рынка. В качестве цены исполнения для него будем использовать ожидаемую сумму от продажи бизнеса в некоторый момент времени, а в качестве стоимости базового актива будем рассматривать, например, сумму дисконтированных элементов денежного потока, которые теряются. Под временем до исполнения опциона понимается время, до которого данная операция по продаже бизнеса может быть осуществлена. Опцион на переключение на другой вид бизнеса в целом похож на опцион на свертывание бизнеса. В нем можно рассматривать два показателя: 1) приведенные потери из-за досрочного прекращения данного вида деятельности, которым может быть как производство отдельного вида товара, так и весь бизнес в целом; 2) оценка стоимости альтернативной деятельности. Один из этих показателей может служить стоимостью базового актива, другой — пороговой величиной. Соответствующим образом следует использовать нужную форму опциона — на покупку или на продажу.

Слабой стороной применяемого в данной статье непрерывного подхода является использование показателя волатильности для описания неопределенности в динамике стоимости базового актива во времени. В отличие от рыночных опционов, где для определения волатильности можно воспользоваться историческими данными о стоимости некоторого товара, в моделях для реальных опционов подобная информация часто отсутствует в силу специфики построения стоимости базового актива или уникальности самого инвестиционного проекта. В некоторых случаях может возникнуть вопрос о том, что понимать под историческими данными. Более того, сама волатильность может полагаться непостоянной [11, с. 4]. Выходом из проблемы может стать, например, использование специфического показателя — усредненной волатильности  $\bar{\sigma}$  [1, с. 115]:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s ds}, \quad (1)$$

где  $\sigma_s$  — волатильность в момент времени  $s$  в уравнении динамики стоимости базового актива. Отметим, что усредненная волатильность строится на основе интегрального показателя — накопленной волатильности.

В случае рассмотрения только одного опциона в инвестиционном проекте настоящая стоимость этого опциона при достаточной простоте модели может быть получена с использованием стандартных формул расчета стоимости рыночного опциона. Если же в проекте будет более одного опциона, то между динамиками стоимостей базовых активов может возникнуть зависимость, на которую оказывает влияние ряд факторов. Во-первых, важен тип реальных опционов, присутствующих в проекте: опционы одного типа — только на покупку или только на продажу — предполагают изменение стоимостей своих базовых активов в одном направлении: в сторону увеличения или в сторону уменьшения. Поэтому вероятность того, исполнится ли более поздний опцион, если до этого уже исполнился более ранний опцион, должна быть больше в случае, если опционы одного типа. Во-вторых, важен вид реальных опционов, который характеризует промежуток времени, когда тот или иной опцион может быть исполнен. В данной статье рассматриваются опционы, механизм которых может быть описан аналогично моделям рыночных опционов европейского или американского вида. Также следует учитывать порядок опционов на временной оси, возможность наложения запрета на исполнение более поздних опционов при исполнении более ранних опционов. Наконец, следует обратить внимание на экономический смысл, заложенный в понятие базового актива.

В силу уникальности отдельных инвестиционных проектов и из-за стремления приблизить модель к реальности для каждой отдельной задачи требуется построить свою формулу для настоящей стоимости составного опциона, а полученный результат невозможно использовать для анализа других проектов. Более того, в некоторых случаях вывести саму конечную формулу для модели с непрерывным временем не представляется возможным, поэтому предлагается не выводить конечную формулу напрямую и перейти к использованию имитационного моделирования.

Динамика стоимости базового актива для выбранного опциона рассчитывается отдельно для моментов, когда исполняется хотя бы один из реальных опционов данного инвестиционного проекта и отдельно для всех остальных временных интервалов. В моменты исполнения каждого опциона стоимости базовых активов для всех других опционов предлагается пересчитывать с использованием специальных функций пересчета. С экономической точки зрения пересчет стоимости базового актива для одного опциона в моменты исполнения других опционов можно объяснить оказываемым воздействием на течение инвестиционного проекта. Например, досрочное прекращение деятельности фирмы делает бессмысленным рассмотрение возможности расширения деятельности в будущем, но существует и обратный эффект — при продаже бизнеса следует учитывать, что ситуация в будущем может измениться в благоприятную для данной деятельности сторону, а более позднее расширение масштабов проекта позволит избежать более раннего прекращения проекта. Аналогичным образом реальный опцион на отсрочку предполагает сдвиг инвестиционного проекта во времени, а при более позднем начале той или иной деятельности должны быть учтены события, которые ранее находились за горизонтом рассмотрения и не были непосредственно связаны с реальным опционом на отсрочку. Так, более позднее исполнение проекта может привести к тому, что он охватит моменты времени более поздние, с новыми факторами риска. Они могут оказать воздействие на развитие бизнеса — например, могут ожидаться реформы в законодательстве, которые ранее просто не учитывались.

Формально механизм зависимости базовых активов может быть описан следующим образом. Обозначим через  $t_k$  период исполнения реального опциона с номером  $k$ . Если в период  $t' = t_d < t_k$  будет исполнен реальный опцион с номером  $d$  и если до этого уже

исполнено  $p$  штук реальных опционов с номерами  $s_1, \dots, s_p$  в ходе  $l$ -го испытания, то должен быть произведен следующий пересчет стоимости базового актива для реального опциона с номером  $k$  в этот момент времени:

$$V_{l,k}^{s_1, \dots, s_p, d}(t') = \Phi_{d,k}(V_{l,k}^{s_1, \dots, s_p}(t')); l = 1, \dots, L; k = 1, \dots, q, \quad (2)$$

где  $V_{l,k}^{s_1, \dots, s_p}(t')$  — стоимость базового актива для опциона с номером  $k$  в момент времени  $t'$ , если до этого было исполнено  $p$  опционов с номерами  $s_1, \dots, s_p$  в ходе  $l$ -го испытания;  $\Phi_{d,k}$  — функция пересчета стоимости базового актива опциона с номером  $k$ , если исполнен реальный опцион с номером  $d$ ;  $l$  — общее число испытаний в проводимой имитации;  $q$  — число выделяемых реальных опционов в инвестиционном проекте, а следовательно, и в составном опционе. Соответствующий набор функций для преобразования значений стоимости базового актива должен быть задан до проведения имитации. Выбор конечного вида функций зависит от условий конкретного проекта и целей инвестора. В общем случае возможно задание функций разного вида для различных опционов. В расчетах также предполагалось, что реальные опционы, исполняющиеся одновременно, не влияют на стоимость базовых активов друг друга.

Динамику ожидаемого значения стоимости базового актива для отдельного опциона между моментами исполнения других опционов можно задавать стандартным образом, на основе принятого стохастического уравнения [10, с. 8; 14, с. 11], используя рекуррентное соотношение. Так, в случае применения геометрического броуновского движения для описания изменений стоимости базового актива опциона с номером  $k$ , формула в дискретной аппроксимации примет следующий вид [4, с. 618; 15, с. 5]:

$$V_{l,k}^{s_1, \dots, s_p}(t+1) = V_{l,k}^{s_1, \dots, s_p}(t)e^{(\mu_k - 0,5\bar{\sigma}_k^2) + w\bar{\sigma}_k}; l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, t_k - 1, \quad (3)$$

где  $w$  — реализация стандартной нормальной случайной величины;  $\mu_k$  — снос для динамики стоимости базового актива опциона с номером  $k$ ;  $\bar{\sigma}_k$  — усредненная волатильность для динамики стоимости базового актива опциона с номером  $k$ . В данной формуле и далее предполагается, что на момент исполнения рассматриваемого опциона в  $l$ -м испытании уже исполнено  $p$  штук реальных опционов с номерами  $s_1, \dots, s_p$ .

Начальное значение стоимости базового актива в условиях ограниченности исходной информации можно получать на основе денежного потока. Например, для реального опциона с номером  $k$  на увеличение масштабов выпуска некоторой продукции стоимость базового актива может определяться следующим образом:

$$V_{l,k}^{s_1, \dots, s_p}(t_k) = \sum_{t=t_k+1}^T \frac{\Delta Z_t}{(1+i)^{t-t_k}}; l = 1, \dots, L, \quad (4)$$

где  $T$  — момент окончания инвестиционного проекта;  $\Delta Z_t$  — изменение элемента денежного потока в периоде  $t$ , вызванное реализацией опциона на расширение;  $i$  — безрисковая ставка процента. Если рассматриваемый опцион с номером  $k$  на организацию дополнительного выпуска продукции в  $l$ -м испытании исполнился бы в последний возможный период времени, то его стоимость в этот момент была бы равна следующей величине:

$$G_{l,k}(t_k) = \max \{V_{l,k}^{s_1, \dots, s_p}(t_k) - S_k; 0\}; l = 1, \dots, L, \quad (5)$$

где  $S_k$  — размер дополнительных инвестиций в проект. Если бы данный опцион исполнился в более ранний момент времени, то его стоимость в этот период можно было бы определить через рекуррентное соотношение:

$$G_{l,k}(t) = \max \left\{ V_{l,k}^{s_1, \dots, s_p}(t) - S_k; \frac{G_{l,k}(t+1)}{1+i} \right\}; \quad t = 1, \dots, t_k - 1; l = 1, \dots, L; k = 1, \dots, q. \quad (6)$$

Когда определены все величины  $G_{l,k}(t)$ ;  $t = 1, \dots, t_k$ , можно найти период времени, в котором реальный опцион с номером  $k$  в испытании  $l$  будет реально исполнен,  $\tau_{l,k}$ . Это будет наиболее ранний период времени, когда опцион выгоднее исполнять, а не ждать. Если такой период в данном испытании найти нельзя, то стоимость рассматриваемого опциона будет равна нулю. Затем следует найти стоимость реального опциона на начало инвестиционного проекта по результатам всей имитации  $P_k$ :

$$P_k = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{V_{l,k}^{s_1, \dots, s_p}(\tau_{l,k}) - S_k}{(1+i)^{\tau_{l,k}-1}}. \quad (7)$$

Аналогичным образом следует определить стоимости и иных реальных опционов в инвестиционном проекте с учетом их экономического смысла и конкретных особенностей построения. Поскольку зависимость опционов учитывалась в процессе проведения имитации, то настоящая стоимость составного опциона  $P_{cocom}$  будет определяться простым суммированием настоящих стоимостей всех опционов:

$$P_{cocom} = \sum_{k=1}^q P_k. \quad (8)$$

Отметим сложность расчета стоимости составного опциона с технической точки зрения из-за взаимной зависимости базовых активов. Поскольку на практике в одном инвестиционном проекте не рассматривается более десятка реальных опционов, то в каждом испытании можно перебирать все возможные комбинации номеров опционов. Общее число возможных комбинаций  $u$  составит:

$$u = \sum_{j=0}^q \frac{q!}{j!(q-j)!} j! = \sum_{j=0}^q \frac{q!}{(q-j)!}. \quad (9)$$

Настоящая стоимость составного опциона, согласно Л. Тригеоргису [13, с. 236–237], всегда меньше суммы стоимостей опционов по отдельности, когда реальные опционы независимы, и больше настоящей стоимости самого дешевого реального опциона из всех опционов, составляющих составной опцион:

$$\min_{k=1, \dots, q} \{P'_k\} \leq P_{cocom} \leq \sum_{k=1}^q P'_k, \quad (10)$$

где  $P'_k$  — настоящая стоимость опциона  $P$  при рассмотрении в проекте только одного опциона. Однако практика проведения имитаций при данных условиях задачи показывает, что соотношение (10) выполняется не всегда, и настоящая стоимость составного опциона может превысить верхнюю границу в случае наличия в одном проекте нескольких опционов, предполагающих изменение конъюнктуры в одном направлении.

В качестве примера был рассмотрен реальный инвестиционный проект в сфере туристического бизнеса. Согласно условиям проекта, предполагается модернизировать горнолыжный курорт «Фордюст» на берегу озера Любимовское, в 50 км от Выборга [6, с. 54]. Предполагается расчистка дополнительных склонов, расчистка и строительство новой санной трассы, оборудование склона подъемниками, строительство хозяйственного комплекса. Доход предлагается получать: от туристических маршрутов — летом; горнолыжных

склонов, использования подъемника и сдачи в прокат снаряжения и техники — зимой. В инвестиционном проекте было рассмотрено три реальных опциона: на досрочное свертывание производства до четвертого года включительно; опцион на расширение в виде организации дополнительных услуг: обустройство катка, бильярда, теннисного корта, тренажерного зала и т. п. — с реставрацией уже имеющихся помещений, которую можно провести в течение пяти лет; наконец, можно рассматривать возможность организации расчистки дополнительных горнолыжных склонов и строительство еще одного подъемника в течение трех лет. Полученные значения настоящих стоимостей реальных опционов представлены в таблице.

**Настоящие стоимости реальных опционов  
(тыс. долл.)**

Кол-во рассматриваемых опционов в проекте	Опцион на уход из бизнеса	Опцион на организацию новых услуг	Опцион на строительство новых трасс	Составной опцион
Один опцион	21,68	–	–	21,68
	–	10,24	–	10,24
	–	–	6,34	6,34
Пара опционов	21,14	7,29	–	28,43
	19,79	–	6,44	26,23
	–	22,46	6,16	28,62
Все опционы	19,97	52,79	6,29	79,05

По результатам проведенных расчетов можно сделать вывод о том, что при включении в инвестиционный проект реальных опционов одного типа настоящие стоимости всех опционов, кроме самого раннего, возрастают по сравнению с теми же стоимостями, полученными при обособленном рассмотрении опционов в инвестиционном проекте. Наоборот, включение опционов, предполагающих изменение конъюнктуры в противоположных направлениях, уменьшает настоящие стоимости опционов с более поздним сроком исполнения. Случай, когда настоящая стоимость составного опциона равна сумме настоящих стоимостей отдельных опционов, достигается только при полной попарной независимости опционов, в частности если реальные опционы имеют разную природу неопределенности и близкие во времени моменты исполнения.

В статье был показан алгоритм определения настоящей стоимости составного опциона через использование имитационного моделирования в условиях ограниченности исходной информации. Был предложен механизм учета зависимости изменений в стоимостях базовых активов, через использование специальных функций пересчета в периоды исполнения опционов в отдельно взятом испытании. Приведены основные факторы, оказывающие влияние на взаимосвязь настоящих стоимостей опционов. В целом описанный подход позволяет получить научно обоснованную оценку стоимости составного опциона при наличии нескольких факторов риска в одном инвестиционном проекте и условия ограниченности исходной информации, и хотя возможны и иные подходы к расчету данного показателя, полученную с помощью предложенного подхода оценку можно использовать как некоторый ориентир в последующих исследованиях.

- 
1. *Вавилов С. А., Ермоленко К. Ю.* Метод определения одной интегральной характеристики для волатильности в задаче управления инвестиционным портфелем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2005. Сер. 5: Экономика. Вып. 1. С. 114–124.
  2. *Валдайцев С. В.* Оценка бизнеса: Учебное пособие. 3-е изд. М.: Изд-во Проспект, 2008. 576 с.
  3. *Воронцовский А. В.* Управление рисками: Учеб. пособие. СПб.: ОЦЭиМ, 2004. 458 с.
  4. *Кузнецов Д. Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 800 с.
  5. *Лимитовский М. А.* Инвестиционные проекты и реальные опционы на развивающихся рынках. Учебно-практическое пособие. М.: Дело, 2004. 528 с.
  6. Сборник инвестиционных предложений развития инфраструктуры туризма в Ленинградской области. СПб.: ООО «ХИТ интернешнл», 1999. 60 с.
  7. *Cortazar G., Gravel M., Urzua J.* The Valuation of Multidimensional American Real Options using Compete-based Simulation. *Computer & Operations Research*. Issue 35. 2008. 113–129 p.
  8. *Hull J.* Options, Futures & Other Derivatives. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 720 с.
  9. *Kulatilaka N. H.* The Theory of Real Options & its Applications to the Investment Strategies. Taipei. Taiwan: International Exchange Committee. Tamkang University, 2000.
  10. *Lei M., Fox G.* Operating Options and Commodity Price Processes. 2004. URL: <http://www.realoptions.org/papers2004/LeiOperating.pdf> (дата обращения: 01.09.2008).
  11. *Pereira P., Rodrigues A., Armada M. J. R.* The Optimal Timing for the Construction of an International Airport: a Real Options Approach with Multiple Stochastic Factors and Shocks. URL: [http://www.realoptions.org/papers2006/Rodrigues\\_pra06\\_airport.pdf](http://www.realoptions.org/papers2006/Rodrigues_pra06_airport.pdf) (дата обращения: 01.09.2008).
  12. *Smit H. T. J., Trigeorgis L.* Strategic Investment: Real Options and Games. New Jersey: Princeton University Press. 2004. 472 p.
  13. *Trigeorgis L.* Real options: managerial flexibility & strategy in resource allocation. Cambridge Mass. 1996. 406 p.
  14. *Weir J. G.* The Valuation of Petroleum Lease Contracts as Real Options. 2004. URL: [http://www.realoptions.org/papers2005/Weir\\_Full%20Thesis%20-%20040926-1.pdf](http://www.realoptions.org/papers2005/Weir_Full%20Thesis%20-%20040926-1.pdf) (дата обращения: 01.09.2008).
  15. *Winston W. L.* A Tutorial on Using EXCEL and EXCEL Add-ins to Value Real Options. 1999. URL: <http://www.realoptions.org/papers1999/WINSTONExcel.PDF> (дата обращения: 01.09.2008).

Статья поступила в редакцию 25 мая 2009 г.