

УДК 330.4

М. В. Рязанов

ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЙ СПРОСА НА СТРАХОВЫЕ УСЛУГИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

При определении тарифов страховые компании производят актуарную оценку своих обязательств по договору, оценку расходов на ведение дела, желаемой прибыли. Актуарная оценка обязательств выражается в виде нетто-ставки, которая обычно представляет собой сумму ожидаемой выплаты по договору и рискованной надбавки. Расходы на ведение дела включают в себя комиссионное вознаграждение страховому агенту или брокеру за заключение договора и прочие расходы страховой организации. Желаемую прибыль можно представить в виде альтернативных издержек, т. е. в виде прибыли, получаемой в случае выбора собственниками страховой организации иного варианта инвестиций. Описанный подход к определению страховых тарифов является общепринятым в страховой практике. Несомненным преимуществом метода является наличие оценки вероятности разорения страховой организации, на основе которой высший менеджмент может принимать решение о приемлемости той или иной ситуации. К недостаткам относится необходимость принятия предположений о требуемых объемах страхового портфеля, которые в реальности могут не выполняться по причине отсутствия спроса. Однако указанный недостаток преодолевается через дополнительное исследование спроса на страховые услуги.

Необходимо отметить, что проблемы построения функции спроса на страховые услуги с более общих позиций уже рассматривались в литературе [3]. Целью же настоящей работы является вывод зависимости в явном виде между объемом страховых услуг, которые приобретет оказавшийся в ситуации риска человек с конкретной функцией полезности, и ценой на эти услуги, устанавливаемой страховой организацией. В литературе функцию полезности, которая описывает поведение человека в условиях риска, еще называют функцией рискованной полезности [1, с. 93].

Итак, предположим существование функции полезности, в соответствии с которой индивидуум принимает решения. Для существования такой функции необходимо,

Михаил Владимирович РЯЗАНОВ — канд. экон. наук, старший преподаватель кафедры управления рисками и страхования СПбГУ. Окончил Экономический факультет СПбГУ (2000) и аспирантуру (2005). Сфера научных интересов — андеррайтинг в страховании, актуарная математика, управление рисками. Автор четырех научных работ.

© М. В. Рязанов, 2009

чтобы система рискованных предпочтений человека отвечала следующим условиям [4, с. 288]:

- 1) система предпочтений является полной и транзитивной;
- 2) любой объект, который есть комбинация других объектов с заданными вероятностями, никогда не будет предпочтительнее каждого такого другого объекта, и сразу все эти другие объекты не будут предпочтительнее комбинации;
- 3) если объект A предпочтительнее объекта B , а B предпочтительнее объекта C , тогда существует комбинация объектов A и C с заданными вероятностями, при которой индивидууму будут безразличны эта комбинация и объект B .

В данном случае под объектами понимаются состояния, в которых может оказаться человек с той или иной вероятностью, а под комбинациями объектов — ожидаемые состояния, причем комбинация объектов также является объектом.

Например, человек, обладающий благосостоянием W условных единиц, в том числе домом стоимостью X условных единиц, может утратить этот дом в течение года по причине пожара с вероятностью p . Тогда возможно рассмотреть следующие объекты:

- состояние человека, если дом не пострадал от пожара, с вероятностью $(1 - p)$, в этом случае размер его благосостояния останется W ;
- состояние человека, если дом сгорел, с вероятностью p , в этом случае размер его благосостояния станет равным $W - X$;
- ожидаемое состояние, определяемое как математическое ожидание благосостояния человека, т. е. $(1 - p) W + p (W - X)$.

При этом необходимо отметить, что человек, заплатив взнос в размере T , может приобрести страховой полис, предусматривающий, например, возмещение 90% нанесенного в случае возникновения пожара ущерба, т. е. установление безусловной франшизы в размере 10%. Тогда рассматриваемые объекты преобразуются:

- состояние человека, если дом не пострадал от пожара, с вероятностью $(1 - p)$, в этом случае размер его благосостояния станет равным $(W - T)$;
- состояние человека, если он утратил дом, с вероятностью p , в этом случае размер его благосостояния станет равным $(W - T - 0,1 X)$, так как ущерб в размере $0,9 X$ возместит страховая компания;
- ожидаемое состояние, определяемое как математическое ожидание благосостояния человека, которое также будет равным $(1 - p) (W - T) + p (W - T - 0,1 X)$.

В данном случае можно сказать, что человек к риску утраты своего дома вследствие пожара применил метод управления, заключающийся в приобретении полиса страхования от пожара. Причем он предъявил спрос на страхование в размере 90% от максимально возможной страховой защиты.

В литературе обычно рассматривают следующие непрерывные, дважды дифференцируемые функции полезности [2, с. 821]:

$$U(W) = \ln(c + W), \quad (1)$$

$$U(W) = -e^{-cW}, \quad (2)$$

$$U(W) = W - \frac{c}{2} W^2, \quad (3)$$

где W — фактор, отражающий уровень благосостояния, c — некоторый параметр.

Формула (1) задает логарифмический вид функции полезности (рис. 1), (2) – экспоненциальный вид функции полезности (рис. 2), (3) – квадратичный вид функции полезности (рис. 3).

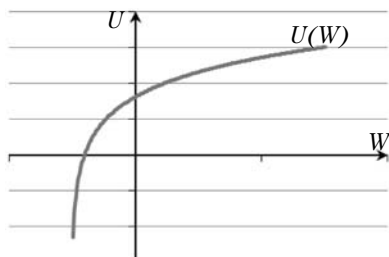


Рис. 1. Функция полезности логарифмического вида.

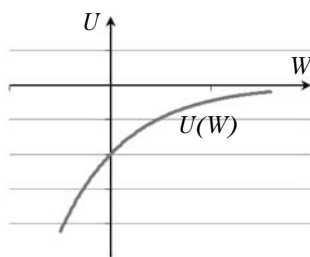


Рис. 2. Функция полезности экспоненциального вида.

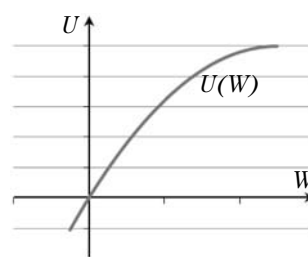


Рис. 3. Функция полезности квадратичного вида.

Рассмотрим человека, находящегося в ситуации риска, т. е. в такой ситуации, когда его текущее состояние может смениться одним из возможных состояний в будущем, при условии, что субъективные вероятности будущих состояний известны. Условимся рассматривать только чистые риски, в которых каждое будущее состояние не лучше текущего, так как с такими рисками обычно приходится работать страховым компаниям.

В целях защиты от риска человеку предлагается страховой продукт. В зависимости от цены продукта рассматриваемый человек, пользуясь критерием максимума ожидаемой полезности, определяет долю риска, которую он оставляет на собственном удержании — выраженную в процентах от размера ущерба безусловную франшизу и, соответственно, долю риска, которую передает страховой организации. Далее, путем сопоставления цены страхового продукта и доли риска, передаваемой страховой организации, выводится функция спроса на страховые услуги.

При этом человек решает задачу максимизации ожидаемой полезности путем выбора условий страхования (в нашем случае — безусловной франшизы). Предполагается следующее:

1) ситуация риска описывается случайной величиной, распределение которой известно рассматриваемому человеку и страховой компании;

2) человек принимает все свои решения исключительно на основе максимизации функции полезности, а страховая компания готова предложить страховой продукт с выбранной человеком франшизой;

3) размер наличных денежных средств, входящих в благосостояние человека, достаточен для оплаты страховой премии.

Задачи, которые могут быть поставлены страховой компанией, не рассматриваются.

Введем следующие обозначения:

W — уровень благосостояния,

X — размер убытка,

p — вероятность возникновения убытка,

d — величина франшизы,

k — коэффициент к ожидаемой выплате, через который в страховой премии учитывается доля рискованной надбавки, расходов на ведение дела и ожидаемой прибыли.

Предполагается, что X — это случайная величина, имеющая дискретное распределение, которая принимает значения $X_1, X_2, \dots, X_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответственно, причем $X_1 = 0$, что соответствует ситуации с отсутствием убытка.

Тогда страховую премию можно представить в следующем виде:

$$T = k(1-d) \sum_{i=1}^n X_i p_i. \quad (4)$$

Благосостояние человека будет можно представить в виде $W(X)$. Тогда

$$W_i = W_0 - T - dX_i = W_0 - k(1-d) \sum_{j=1}^n X_j p_j - dX_i, \quad i = 1 \dots n. \quad (5)$$

Полагая

$$m_1 = \sum_{j=1}^n X_j p_j, \quad (6)$$

выразим ожидаемое благосостояние в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{W} = E(W) &= \sum_{i=1}^n W_i p_i = \sum_{i=1}^n (W_0 - k(1-d)m_1 - dX_i) p_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (W_0 p_i - k(1-d)m_1 p_i - dX_i p_i) = W_0 \sum_{i=1}^n p_i - k(1-d)m_1 \sum_{i=1}^n p_i - d \sum_{i=1}^n X_i p_i = \\ &= \bar{W}_0 - k(1-d)m_1 - dm_1 = W_0 - km_1 + kdm_1 - dm_1 = W_0 - km_1 + d(km_1 - m_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, мы представили ожидаемое благосостояние в виде непрерывной функции $\bar{W}(d, k)$, откуда, например, можно выразить d :

$$d = \frac{\bar{W} - W_0 + km_1}{km_1 - m_1}. \quad (8)$$

Учитывая, что у нас имеется функция полезности $U(W)$, выразим величину полезности в следующем виде:

$$\begin{aligned} U(W_i) &= U(W_0 - k(1-d) \sum_{j=1}^n X_j p_j - dX_i) = U(W_0 - km_1 + kdm_1 - dX_i) = \\ &= U(W_0 - km_1 + d(km_1 - X_i)), \quad i = 1 \dots n. \end{aligned} \quad (9)$$

Ожидаемая полезность в этом случае составит:

$$\bar{U} = E(U(W)) = \sum_{i=1}^n U(W_i) p_i = \sum_{i=1}^n U(W_0 - km_1 + d(km_1 - X_i)) p_i. \quad (10)$$

Мы представили ожидаемую полезность в виде непрерывной функции $\bar{U}(d, k)$, которую и назовем функцией ожидаемой полезности.

В итоге при фиксированном k мы получили некоторую функцию $(\bar{W}, \bar{U})$, заданную параметрически в виде

$$(\bar{W}(d, k), \bar{U}(d, k)), \quad (11)$$

где параметр $d \in [0, 1]$.

Таким образом, страховая организация, задав коэффициент k , определяет функцию ожидаемой полезности $\bar{U}(d)$, максимизируя которую человек формирует спрос на страховую услугу в размере $(1-d)$ путем выбора уровня франшизы.

Определим, при каких d функция $\bar{U}(d)$ достигает своего максимума, для чего найдем $\bar{U}'_d(d)$:

$$\bar{U}'_d = \sum_{i=1}^n U'_W(W_0 - km_1 + d(km_1 - X_i))(km_1 - X_i)p_i. \quad (12)$$

Приравняв $\bar{U}'_d(d)$ нулю и разрешив полученное уравнение относительно d , получим точки, подозрительные на экстремум. Для определения экстремума проанализируем поведение $\bar{U}''_{dd}(d)$:

$$\bar{U}''_{dd} = \sum_{i=1}^n U''_{WW}(W_0 - km_1 + d(km_1 - X_i))(km_1 - X_i)^2 p_i. \quad (13)$$

Рассмотрим функцию полезности вида (1) $U(W(d)) = \ln(c + W(d))$, тогда

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^n \ln(c + W_0 - km_1 + d(km_1 - X_i))p_i, \quad (14)$$

$$\bar{U}'_d = \sum_{i=1}^n \frac{(km_1 - X_i)p_i}{c + W_0 - km_1 + d(km_1 - X_i)}. \quad (15)$$

Рассмотрев $\bar{U}'_d = 0$, получим уравнение относительно d :

$$\sum_{i=1}^n \frac{(km_1 - X_i)p_i}{c + W_0 - km_1 + d(km_1 - X_i)} = 0. \quad (16)$$

Приведя дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, получим многочлен степени $(n-1)$ в числителе и многочлен степени n в знаменателе. Таким образом, записать решение (16) относительно d в аналитическом виде в общем случае не получится, однако уравнение может быть решено с использованием приближенных методов.

Анализ второй производной

$$\bar{U}''_{dd} = \sum_{i=1}^n \frac{-(km_1 - X_i)^2 p_i}{(c + W_0 - km_1 + d(km_1 - X_i))^2} < 0 \quad (17)$$

показывает, что $\bar{U}(d)$ выпукла вверх на всей области определения, следовательно, решение (16) будет точкой максимума.

Рассмотрим для примера случай*, когда величина X может принимать только два значения X_1, X_2 с вероятностями p_1, p_2 соответственно, причем $X_1 = 0$, а $p_1 = 1 - p_2$.

Тогда функции (6), (7), (10) с учетом (1) и (14) примут следующий вид (рис. 4, 5):

$$m_1 = p_2 X_2, \quad (18)$$

$$\bar{W} = (1 - p_2)(W_0 - km_1 + dkm_1) + p_2(W_0 - km_1 + d(km_1 - X_2)), \quad (19)$$

$$\bar{U} = (1 - p_2)\ln(c + W_0 - km_1 + dkm_1) + p_2\ln(c + W_0 - km_1 + d(km_1 - X_2)). \quad (20)$$

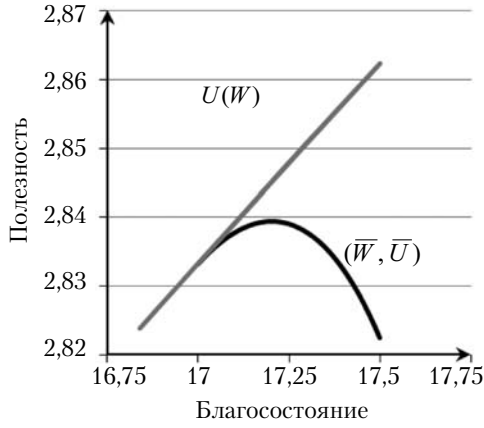


Рис. 4. Графики функций $U(W)$ и $(\bar{W}, \bar{U})$ для логарифмической функции полезности.

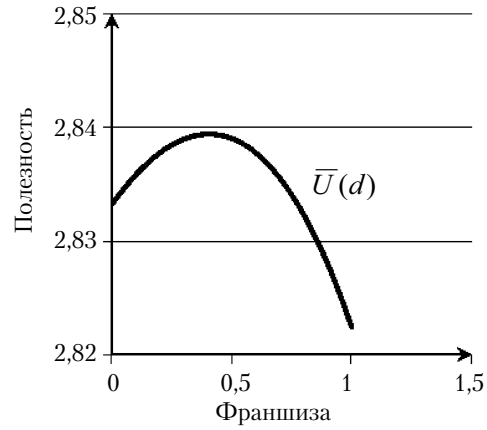


Рис. 5. График функции $\bar{U}(d)$ для логарифмической функции полезности.

$$\begin{aligned}\bar{U}'_d &= \frac{(1-p_2)km_1}{c+W_0-km_1+dkm_1} + \frac{p_2(km_1-X_2)}{c+W_0-km_1+d(km_1-X_2)} = \\ &= \frac{km_1-p_2km_1}{c+W_0-km_1+dkm_1} + \frac{p_2km_1-p_2X_2}{c+W_0-km_1+d(km_1-X_2)}.\end{aligned}\quad (21)$$

Представим $\bar{U}'$ в виде отношения числителя и знаменателя, т. е. $\bar{U}'_d = \frac{\bar{U}'_1}{\bar{U}'_2}$.

Тогда, после приведения к общему знаменателю:

$$\begin{aligned}\bar{U}'_1 &= km_1c + km_1W_0 - k^2m_1^2 + d(k^2m_1^2 - km_1X_2) - \\ &- p_2km_1c - p_2km_1W_0 + p_2k^2m_1^2 - d(p_2k^2m_1^2 - p_2km_1X_2) + \\ &+ p_2km_1c + p_2km_1W_0 - p_2k^2m_1^2 + dp_2k^2m_1^2 - p_2X_2c - p_2X_2W_0 + p_2X_2km_1 - dp_2X_2km_1 = \\ &= km_1c + km_1W_0 - k^2m_1^2 - p_2X_2c - p_2X_2W_0 + p_2X_2km_1 + d(k^2m_1^2 - km_1X_2) = \\ &= km_1c + km_1W_0 - k^2m_1^2 - m_1c - m_1W_0 + km_1^2 + d(k^2m_1^2 - km_1X_2).\end{aligned}\quad (22)$$

$$\bar{U}'_2 = (c+W_0-km_1+dkm_1)(c+W_0-km_1+d(km_1-X_2)).\quad (23)$$

Отсюда следует, что $\bar{U}' = 0$ при

$$d = \frac{km_1c + km_1W_0 - k^2m_1^2 - m_1c - m_1W_0 + km_1^2}{km_1X_2 - k^2m_1^2} = \frac{kc + kW_0 - k^2m_1 - c - W_0 + km_1}{kX_2 - k^2m_1}\quad (24)$$

при условии $\bar{U}'_2 \neq 0$, т. е.

$$d \neq \frac{c+W_0-km_1}{-km_1} \text{ и } d \neq \frac{c+W_0-km_1}{X_2-km_1}.\quad (25)$$

В результате мы получили функцию спроса (рис. 6).

$$D(k) = 1 - d(k),\quad (26)$$

где $d(k)$ определяется в виде (24). Следовательно,

$$D(k) = 1 - \frac{kc + kW_0 - k^2m_1 - c - W_0 + km_1}{kX_2 - k^2m_1}. \quad (27)$$

Проведя аналогичные рассуждения, можно также построить функции $D(k)$ для функций полезности вида (2) $U(W) = -e^{-cW}$ и (3) $U(W) = W - \frac{c}{2}W^2$.

Полученные результаты могут, например, найти свое применение, когда лицу, оказавшемуся в ситуации риска, нужно выбрать оптимальный вариант воздействия на риск. Причем необходимо отметить, что данную ситуацию можно рассматривать в более широком контексте, не обязательно связывая выбираемый метод воздействия на риск со страхованием.

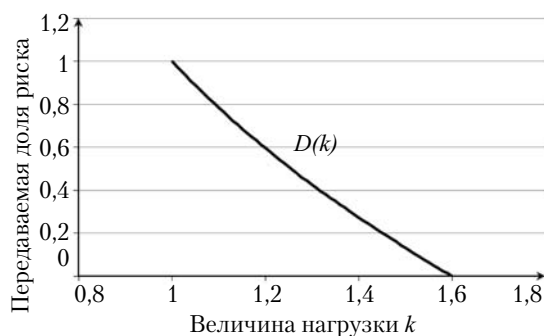


Рис. 6. График функции спроса на страховые услуги $D(k)$ человека с функцией полезности $U(W(d)) = \ln(c + W(d))$.

* Здесь и далее для расчетов использованы материалы семинара «Insurance Market Behavior and Health Insurance», проведенного Говардом Дж. Болником (Howard J. Bolnick, MBA, FSA, MAAA, Hon FIA) в Санкт-Петербурге в 2003 г.

1. Воронцовский А. В. Управление рисками: учеб. пособие. СПб., 2000.
2. Лобанов А. А., Чугунов А. В. Энциклопедия финансового риск-менеджмента. М., 2006.
3. Braun M., Muermann A. The Impact of Regret on the Demand for Insurance // The Journal of Risk and Insurance. 2004. Vol. 71. N 4. P. 737–767.
4. Friedman M., Savage L. J. The Utility Analysis of Choices Involving Risk // The Journal of Political Economy. 1948. Vol. 56. Issue 4. P. 288.

Статья поступила в редакцию 17 сентября 2009 г.