

С.А. Вавилов, К.Ю. Ермоленко

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЕЙ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ

При решении задачи управления инвестиционным портфелем на основе модели, использованной в ранее опубликованной работе,¹ одним из актуальных является вопрос об оценке объема инвестиций и периода инвестирования, обеспечивающих выход системы управления на режим насыщения. Суть этого явления заключается в том, что за счет проведения многочисленных сделок система управления получает достаточно дополнительных средств в виде прибыли для продолжения спекуляций, не требуя инвестиций извне, т. е. становится самодостаточной.

С математической точки зрения поставленная задача сводится к вычислению функции $J(t)$ как интеграла от квадрата волатильности

$$J(t) = \int_0^t \sigma_s^2 ds \quad (1)$$

в режиме реального времени. Левый конец временного интервала $[0, t]$ соответствует моменту начала управления, а правый – текущему значению времени.

Отметим, что используемые здесь рассуждения предполагают, что цена актива x_t удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению²

$$dx_t = c_t x_t dt + \sigma_t x_t dW_t, \quad (2)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс (броуновское движение);

c_t – мгновенное изменение трендовой составляющей цены;

σ_t – значение волатильности.

Обратим внимание на то, что с математической точки зрения, в отличие от задач управления, возникающих в технике, трудность проблемы построения управления инвестиционным портфелем обусловлена прежде всего сильной нестационарностью параметров c_t и σ_t , входящих в (2), что особенно характерно для современных крайне нестабильных финансовых рынков.

БАВИЛОВ

Сергей Анатольевич

– д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры общей математики и информатики математико-механического факультета СПбГУ. Окончил математико-механический факультет ЛГУ (1978). С 1991 по 1997 г. работал в Университете г. Делфт (Нидерланды). Автор 75 научных и методических работ. Область научных интересов – методы прикладного функционального анализа, теория бифуркаций, управление инвестиционным портфелем на основе стохастической модели ценообразования.

© С.А. Вавилов, К.Ю. Ермоленко, 2005

Основная цель настоящей статьи заключается в проверке гипотезы, предполагающей, что для ряда высоколиквидных акций интегральная характеристика (1) с высокой степенью точности может быть аппроксимирована следующей линейной зависимостью:

$$\int_0^t \sigma_s^2 ds \approx \alpha \cdot t, \quad (3)$$

где α – априори известная, на момент времени $t = 0$, величина.

Одним из результатов статьи является положительный ответ на сформулированную гипотезу, что позволяет, как отмечалось выше, априори оценить необходимый период инвестирования и объем инвестиций для указанного в работе¹ класса управлений инвестиционным портфелем.

Сам способ построения интегральной характеристики (1) использует предложенный в статье метод, позволяющий на основе решения некоторой обратной задачи идентифицировать непосредственно величину (1) без промежуточного этапа вычисления самой волатильности σ_t внутри промежутка $[0, t]$. Оказывается, несмотря на то что изменение самой волатильности является сильно нестационарным процессом, флуктуации ее интегральной характеристики носят существенно более гладкий характер. В статье приведены конкретные примеры применения соответствующей техники вычисления характеристики (1) к задаче управления инвестиционным портфелем.

Для проверки адекватности самого предложенного метода вычисления (1) в статье рассматривается следующее значение для усредненной волатильности:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s^2 ds}. \quad (4)$$

Дело в том, что на относительно небольших временных интервалах, когда собственно волатильность σ_s может рассматриваться как постоянная величина ($\sigma_s = \sigma$), она может быть рассчитана на основе известной процедуры статистической обработки ценовых данных.³ Разумеется, что в этой ситуации величины $\bar{\sigma}$ и σ , полученные в результате применения двух независимых методов, должны быть близкими. Именно такая проверка соотношения величин $\bar{\sigma}$ и σ осуществляется в настоящей работе.

Отметим, что задача вычисления (1) возникает и при построении управления инвестиционным портфелем в рамках стратегии самофинансирования.⁴

Кроме того, в работе обсуждается вопрос о возможности построения программного управления инвестиционным портфелем, когда по задаваемой кривой доходности необходимо определять в режиме реального времени количество входящих в портфель бумаг.

Суть предлагаемого метода опирается на результаты работы,⁵ в которой рассматривалась модель управления инвестиционным портфелем, включающим в себя один вид ценных бумаг и наличные деньги. Стоимость портфеля на текущий момент времени t определяется зависимостью

ЕРМОЛЕНКО

Константин Юрьевич

– канд. экон. наук, ст. преподаватель кафедры экономической кибернетики СПбГУ. В 2000 г. окончил экономический факультет СПбГУ. Сфера научных интересов – применение информационных систем и технологий при управлении инвестиционным портфелем.

$$f_t = a_t x_t + w_t, \quad (5)$$

где a_t – количество ценных бумаг одного вида, w_t – количество денег в портфеле.

Здесь и далее предполагается, что система управления занимает только длинную позицию, т. е. $a_t \geq 0$ для любого t .

Задается торговая стратегия, определяющая на каждый момент времени количество бумаг в портфеле, следующей зависимостью:

$$df_t = a_t dx_t + l(t, x_t) dt, \quad (6)$$

тогда изменение стоимости капитала \tilde{p}_t вдоль наблюдаемого значения цены \tilde{x}_t , являющейся реализацией случайного процесса, определяемого (2), задается формулой

$$\tilde{p}_t = \tilde{f}_t - \int_0^t l(\tau, \tilde{x}_\tau) d\tau, \quad (7)$$

где \tilde{f}_t – величина стоимости портфеля вдоль наблюдаемой реализации цены \tilde{x}_t , при этом интеграл в правой части соотношения (7) понимается в обычном римановском смысле.

Предполагается, что выполняются следующие условия.

1. Изменение цены актива x_t удовлетворяет (2), при этом σ_t является функцией t и наблюдаемого значения цены актива \tilde{x}_t .

2. Наблюдаемое значение цены \tilde{x}_t на любом наперед заданном временном интервале принадлежит полосе, отделенной от нуля некоторой отличной от нуля постоянной, которую в дальнейшем будем называть нижним порогом чувствительности.

С использованием соответствующей нормировки, вытекающей из второго предположения, будем полагать, что значения \tilde{x}_t принадлежат интервалу $(1, \beta)$, где $\beta > 1$. В дальнейшем границы указанной открытой полосы будем называть соответственно нижним и верхним порогом чувствительности.

В рассмотрение вводится обозначение $\varphi(x)$, которое является собственной функцией, соответствующей первому собственному числу λ_1 следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{\lambda_1^2}{x^2} \varphi = 0, \quad (8)$$

$$\varphi(1) = \varphi'(\beta) = 0, \quad (9)$$

при этом $\lambda_1^2 = b^2 + \frac{1}{4}$, $\varphi(x_t) = \sqrt{x_t} \sin(b \ln x_t)$. Здесь b является минимальным строго положительным корнем уравнения $\operatorname{tg}(b \ln \beta) = -2b$.

Определяется новая управляющая функция $u(t, \tau, x_\tau)$, исходя из соотношения

$$l(\tau, x_\tau) = \frac{u(t, \tau, x_\tau)}{\varphi(\tilde{x}_t)} \cdot \varphi(x_t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \lambda_1^2 \int_\tau^t \sigma_s^2 ds} \quad (10)$$

Тогда, как показано в работе,⁶ изменение стоимости капитала вдоль наблюдаемого значения цены \tilde{x}_t задается зависимостью

$$\bar{p}_t = \int_0^t \frac{u(t, \tau, \bar{x}_\tau)}{\sqrt{\bar{x}_\tau} \sin(b \ln \bar{x}_\tau)} d\tau \cdot \sqrt{\bar{x}_t} \sin(b \ln \bar{x}_t) - \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 \int_\tau^t \sigma_s^2 ds} \cdot u(t, \tau, \bar{x}_\tau) d\tau, \quad (11)$$

при этом количество бумаг, которое необходимо иметь в портфеле при наблюдаемом значении цены, удовлетворяет соотношению

$$\bar{\alpha}_t = \int_0^t \frac{u(t, \tau, \bar{x}_\tau)}{\sqrt{\bar{x}_\tau} \sin(b \ln \bar{x}_\tau)} d\tau \cdot \frac{\partial}{\partial x_t} \left(\sqrt{x_t} \sin(b \ln x_t) \right) \Big|_{x_t = \bar{x}_t}. \quad (12)$$

Обратимся теперь непосредственно к способу построения интегральной характеристики (1) на основе формул (11), (12).

Сделать это можно следующим образом. Поскольку в формулу (12) для расчета числа ценных бумаг α_t на каждый момент времени t входят только цены совершаемых сделок \bar{x}_t и не входят значения волатильности, то, задавая $u(t, \tau, x_t)$ в виде произвольного строго положительного числа u_0 , нетрудно подсчитать получаемую при данном выбранном управлении прибыль, которую обозначим через $g(t)$. Приравняв правую часть соотношения (11) функции $g(t)$ и вводя вместо τ новую переменную $z = t - \tau$, получим следующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $v(t, z)$:

$$\int_0^t v(t, z) dz = h(t), \quad (13)$$

$$\text{где } \lambda(t, z) = e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 \int_{t-z}^t \sigma_s^2 ds} - 1, \quad h(t) = \int_0^t \frac{dz}{\varphi(x_{t-z})} \cdot \varphi(x_t) - t - \frac{1}{u_0} g(t).$$

Заметим, что в результате сделанных преобразований обеспечено выполнение условия $v(t, 0) = 0$. Алгоритм решения именно такого интегрального уравнения (13) описан в работе⁷ в связи с рассмотрением задачи сглаживания биржевых котировок. Искомая функция $v(t, z)$ ищется при этом в пространстве $L_2[0, t]$ на множестве функций ограниченной вариации, которое в силу второй теоремы Хелли⁸ является компактным множеством, обеспечивая тем самым ограниченность обратного оператора, соответствующего левой части (13). Таким образом, постановка обратной задачи (13) становится корректной, и сама задача имеет единственное решение.

В свою очередь искомая интегральная характеристика (1) выражается через $v(t, z)$ следующим образом:

$$\int_0^t \sigma_s^2 ds = -\frac{2}{\lambda_1^2} \ln[v(t, t) + 1]. \quad (14)$$

Для проверки корректности выбранной модели управления воспользуемся указанной выше усредненной характеристикой для волатильности (4). Сравним величину (4) со значением волатильности σ , получаемой на основе статистической обработки ценовых данных.

В таблицах 1, 2, 3 дан сравнительный анализ величин σ и $\bar{\sigma}$ для обыкновенных акций РАО «ЕЭС России», исходя из выборок, соответствующих ценам закрытия 10-минутных, 20-минутных и дневных (daily) свечей на различных временных интервалах с указанием числа использованных наблюдений. Как видно из анализа указанных таблиц (1, 2, 3), в

большинстве случаев значения σ и $\bar{\sigma}$ практически совпадают, что косвенно подтверждает адекватность модели управления инвестиционным портфелем, предложенной в работе.⁹ Вместе с тем наличие существенных расхождений в оценках указанных величин происходит на временных интервалах, соответствующих наиболее резкому изменению цен, когда само по себе введение усредненных характеристик является некорректным.

Таблица 1. Сравнение σ и $\bar{\sigma}$ на основе ценовых свечей с 10-минутным временным интервалом

Период времени	Кол-во наблюдений	$\bar{\sigma}$	σ
12.07 – 20.07.2004	346	0,0179	0,0129
28.06 – 01.07.2004	177	0,0291	0,0253
08.06 – 11.06.2004	169	0,0080	0,0077
27.04 – 30.04.2004	177	0,0075	0,0076
19.03 – 23.03.2004	33	0,0036	0,0030

Таблица 2. Сравнение σ и $\bar{\sigma}$ на основе ценовых свечей с 20-минутным временным интервалом

Период времени	Кол-во наблюдений	$\bar{\sigma}$	σ
14.07 – 20.07.2004	114	0,0224	0,0043
25.06 – 01.07.2004	114	0,0301	0,0279
08.06 – 15.06.2004	111	0,0134	0,0155
22.04 – 30.04.2004	164	0,0130	0,0093
19.03 – 23.03.2004	17	0,0058	0,0030

Таблица 3. Сравнение σ и $\bar{\sigma}$ на основе дневных (daily) ценовых свечей

Период времени	Кол-во наблюдений	$\bar{\sigma}$	σ
27.04 – 04.08.2004	69	0,0378	0,0344
22.01 – 30.04.2004	70	0,0460	0,0452
18.09.2003–15.01.2004	80	0,0193	0,0226
21.04 – 15.09.2003	102	0,0357	0,0321

На рис. 1 представлен график изменения интегральной характеристики (1) (кривая 1) на основе дневных (daily) ценовых свечей в период с 12.01.2003 до 30.06.2004. На этом же рисунке дана интерполяция кривой 1 в виде некоторой линейной функции (прямая 2).

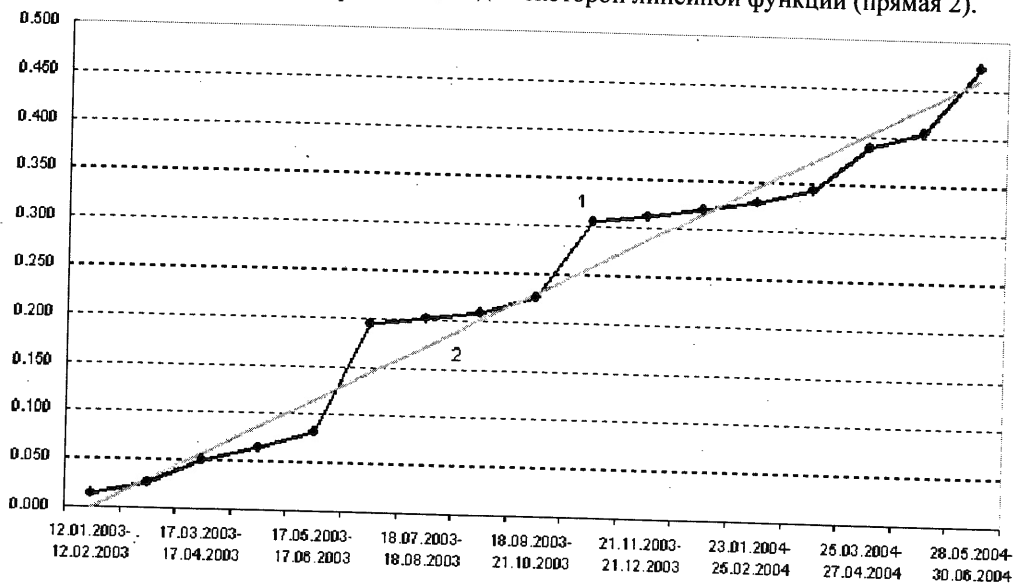


Рис. 1. График изменения интегральной характеристики (1) на основе дневных (daily) ценовых свечей в период с 12.01.2003 до 30.06.2004 для обыкновенных акций РАО «ЕЭС России» (кривая 1) и ее линейная интерполяция (прямая 2).

Заметим, что теоретическое значение изменения стоимости капитала в силу формулы (11) может быть оценено сверху и снизу на основе предельных значений волатильностей следующим образом:

$$\tilde{p}_t^H \leq \tilde{p}_t \leq \tilde{p}_t^B, \quad (15)$$

где

$$\tilde{p}_t^H = \int_0^t \frac{u(t, \tau, \tilde{x}_\tau)}{\sqrt{\tilde{x}_\tau} \sin(b \ln \tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \sqrt{\tilde{x}_t} \sin(b \ln \tilde{x}_t) - \int_0^t u(t, \tau, \tilde{x}_\tau) d\tau, \quad (16)$$

$$\tilde{p}_t^B = \int_0^t \frac{u(t, \tau, \tilde{x}_\tau)}{\sqrt{\tilde{x}_\tau} \sin(b \ln \tilde{x}_\tau)} d\tau \cdot \sqrt{\tilde{x}_t} \sin(b \ln \tilde{x}_t). \quad (17)$$

Для высоколиквидных акций, торгуемых как на американском, так и на российском рынке, указанные теоретическая и фактическая кривые изменения стоимости капитала обладают высокой степенью положительной корреляции, что с учетом погрешностей, обусловленных округлениями и дискретизацией, свидетельствует об адекватности использованной модели ценообразования. При этом реальная кривая изменения стоимости капитала во всех рассмотренных до настоящего времени случаях находилась строго в диапазоне между \tilde{p}_t^H и \tilde{p}_t^B .

Соответствующие кривые приведены на рис. 2 и 3 при управлении портфелями, содержащими акции компаний PAO «ЕЭС России» и Dell. Computers Corporation соответственно.

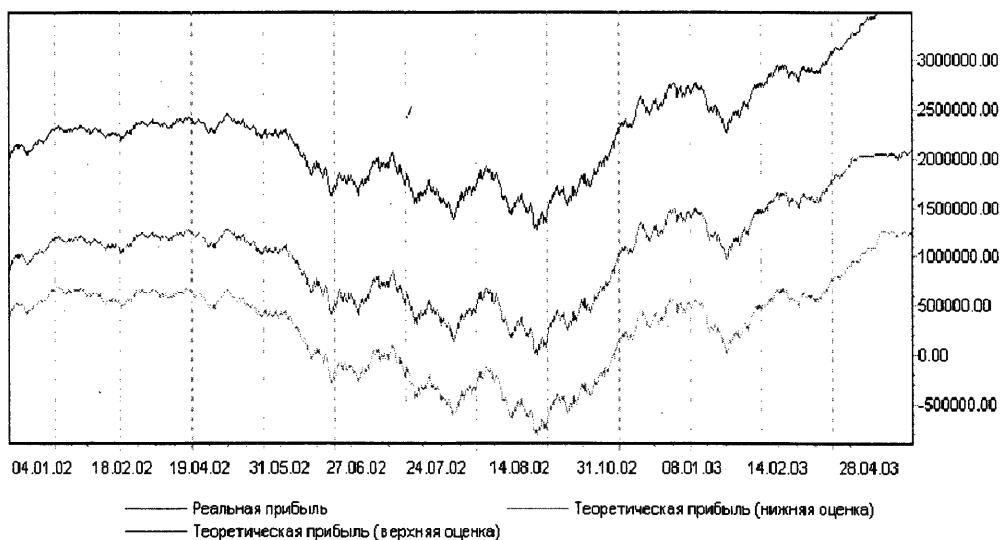


Рис. 2. График изменения теоретической и реальной прибыли при спекуляции акциями PAO «ЕЭС России» за период с 04.01.2002 по 28.04.2003.

Кроме того, второе слагаемое в формуле (11) имеет смысл величины инвестируемого денежного потока, который при ограниченной сверху управляющей функции $u(t, \tau, x_\tau)$ стремится к некоторой постоянной с течением времени. Другими словами, отклонение между кривыми, соответствующими верхней оценке теоретической прибыли и ее реальным значениям на рис. 2 и 3, становится фактически постоянной величиной начиная с некоторого момента времени.

Интерполируя интегральную характеристику (1) в виде линейной функции (3), нетрудно оценить время выхода T на режим насыщения

$$T \approx \frac{2}{\lambda_1^2 \cdot \alpha} \quad (19)$$

и соответствующий объем V требуемых для этого денежных средств

$$V \approx \frac{2 \cdot u_0}{\lambda_1^2 \cdot \alpha} \quad (20)$$

при условии выбора управляющей функции $u(t, \tau, x_\tau)$ в виде постоянной u_0 .

Разумеется, что величины (19), (20) зависят через λ_1^2 от выбора нижнего порога чувствительности. Другими словами, указанные характеристики становятся тем меньше, чем выше нижний порог чувствительности. В этом смысле естественное стремление уменьшить значения (19), (20) увеличивает вероятность того, что цена актива X_t «пробьет» нижний порог чувствительности, делая тем самым данную систему управления некорректной.

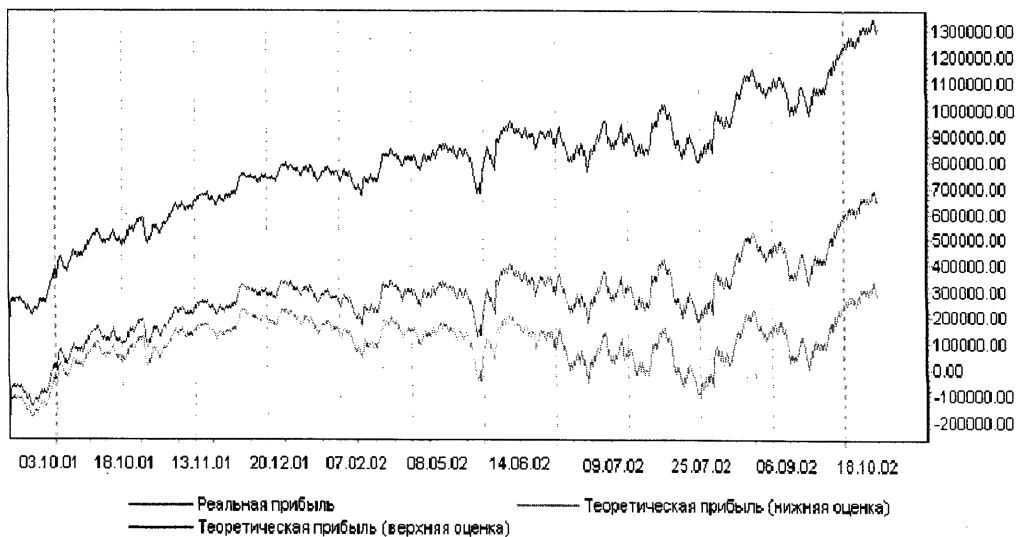


Рис. 3. График изменения теоретической и реальной прибыли при спекуляции акциями компании Dell Corporation за период с 03.10.2001 по 18.10.2002.

В табл. 4 приведены оценки величины (19) в днях для различных порогов чувствительности ρ , выраженных в процентном отношении от значения цены актива, соответствующего времени открытия портфеля. Кроме того, здесь же приведены объемы необходимых средств, выраженные в рублях, для выхода на режим насыщения. В качестве функции управления $u(t, \tau, x_\tau)$ выбрана постоянная u_0 , значение которой также приведено в табл. 4. Отметим, что значения u_0 здесь выбираются таким образом, что при начальном объеме инвестированных средств в размере 100 000 руб. указанная сумма денег полностью расходуется на приобретение бумаг при безоткатном падении цены на 25% от значения, соответствующего первой совершенной сделке. Здесь полоса (l, β) полагается симметричной относительно цены актива при открытии портфеля. Величина α при этом выбирается исходя из интерполяции интегральной характеристики (1), соответствующей рис. 1.

Таблица 4. Зависимость времени выхода на режим насыщения (в днях) от выбора нижнего порога чувствительности (в %)

ρ (%)	5	15	25	40	50
T (дн.)	3 322	2 187	1 572	965	671
u_0	21 119,53	4 641,47	2 020,91	789,54	441,41
V (руб.)	70 164 395,07	10 154 320,12	3 178 243,75	761 781,82	296 856,26

Разумеется, что при выборе полосы $(1, \beta)$ необходимо хеджировать длинную позицию опционами пут со страйками, близкими к значению нижнего порога чувствительности.

Нельзя не обратить внимания и на следующий факт. Дело в том, что при расчете накопленной волатильности (1) на различных как перекрывающихся, так и не перекрывающихся временных интервалах, соответствующих одному году, для таких высоколиквидных российских акций, как РАО «ЕЭС России» и «Сургутнефтегаз», указанная величина остается практически инвариантной и составляет значение, близкое к 0,2.

Здесь же обратим внимание на следующую особенность при построении управления инвестиционным портфелем. Дело в том, что выбор порогов чувствительности, в силу формулы (19), определяет период инвестирования T , в то время как значение постоянной управляющей функции u_0 вычисляется, исходя из формулы (20), в соответствии с планируемым объемом инвестируемых средств V на период инвестирования T .

Наконец, рассмотрим вопрос о возможности программного управления инвестиционным портфелем, когда величина получаемой прибыли во времени задается изначально без учета изменения цены актива в режиме реального времени. В этой ситуации, после введения новой переменной $\tau = t - \tau$, задача построения программного управления в виде функции $u(t, \tau, x_\tau)$ сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$\int_0^t u(t, t - \tau, \tilde{x}_{t-\tau}) \cdot \chi(t, \tau) d\tau = y(t), \quad (21)$$

где $y(t)$ – задаваемая изначально функция изменения прибыли во времени,

$$\chi(t, \tau) = \frac{\sqrt{\tilde{x}_t} \cdot \sin(b \cdot \ln \tilde{x}_t)}{\sqrt{\tilde{x}_{t-\tau}} \cdot \sin(b \cdot \ln \tilde{x}_{t-\tau})} - e^{-\frac{1}{2} \lambda_1^2 \int_{t-\tau}^t \sigma_s^2 ds},$$

при этом введение новой переменной τ гарантирует выполнение стандартного условия $\chi(t, 0) = 0$.

На рис. 4 представлен график изменения реальной прибыли в рублях (кривая 1) при спекуляциях обыкновенными акциями РАО «ЕЭС России» в случае, когда программное управление задается линейной функцией $y(t) = \gamma \cdot t$ (прямая 2). Разумеется, что использование непрерывной модели управления (21) подразумевает введение процедуры дискретизации. В данном конкретном случае выбирались 20-минутные временные интервалы, внутри которых для решения соответствующей некорректной задачи использовались статистические данные в виде цен закрытия минутных свечей.

Разумеется, что возникающая в результате процедуры дискретизации инерционность при принятии решений приводит, как видно из рис. 4, к сильным колебаниям реальной прибыли в окрестности прямой, задающей программное управление. При этом по оси абсцисс на рис. 4 задаются даты и время совершения сделок в 2004 г. В перспективе, благодаря развитию электронно-вычислительных средств, позволяющих обрабатывать большие массивы информации в режиме реального времени, появляется возможность использовать для обработки данных при решении задачи (21) непосредственно цены совершаемых сделок, что должно существенно уменьшить эффект запаздывания в принятии решения на проведение той или иной торговой операции. Кроме того, современные информационные технологии в принципе позволяют совершать сделки в автоматическом режиме по рыночной цене с практически неограниченной скоростью выставления заявок.

Однако, по всей видимости, сама по себе идея программного управления инвестиционным портфелем не является перспективной, поскольку извлечение строго фиксированной прибыли, независимо от динамики цен актива, может приводить к необходимости дополнительного инвестирования такого объема денежных средств, что

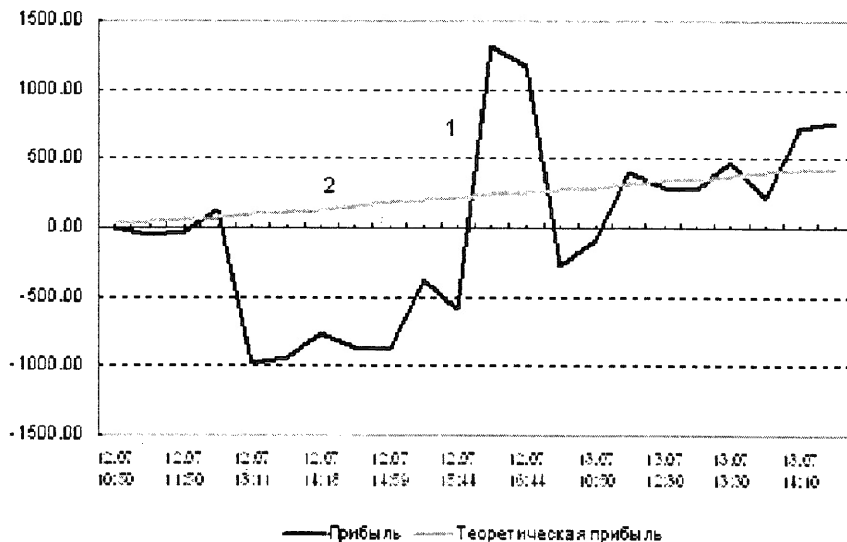


Рис. 4. График изменения реальной прибыли в рублях (кривая 1) при спекуляциях обыкновенными акциями РАО «ЕЭС России» в случае, когда программное управление задается линейной функцией (прямая 2).

получаемая в результате подобных операций норма прибыли окажется слишком низкой и не будет представлять интереса для инвестора.

В табл. 5 представлены данные об объемах привлекаемых средств и значения получаемой прибыли (в рублях) в результате спекуляций обыкновенными акциями РАО «ЕЭС России», соответствующих рис. 4.

Резюмируя вышесказанное, отметим, что, по всей видимости, в рамках приведенной схемы наиболее перспективным является выбор кусочно-непрерывного управления, обеспечивающего, как показано в работе,¹⁰ асимптотический рост получаемой прибыли во времени.

Наконец, заметим, что проблема вычисления интегральной характеристики (1) представляет значительный интерес не только при рассмотрении вопросов, связанных с управлением активами на фондовых рынках. Так, при использовании теории опционов для оценки рискованных инвестиций, информация о волатильности с экономической точки зрения позволяет оценивать предельную настоящую стоимость всех предварительных расходов, связанных с планируемым на определенное будущее расширением бизнеса.¹¹ Однако и здесь возможна сильная неустойчивость в изменении значений собственно волатильности во времени. В этой ситуации не исключена целесообразность использования в расчетных формулах усредненной волатильности, получаемой на основе интегральной характеристики (1).

Таблица 5. Данные об объемах привлекаемых средств и значения получаемой прибыли (руб.) в результате спекуляций обыкновенными акциями РАО «ЕЭС России», соответствующих рис. 4

Время	Цена	Операция	Портфель	Прибыль	Привлеченные средства
12.07 10:50	7,176	19300	19300	0,00	138 496,80
12.07 11:10	7,173	-50800	-31500	-58,05	364 446,30
12.07 11:50	7,172	-9300	-40800	-26,60	431 145,90
12.07 12:10	7,168	178900	138100	136,20	1 421 046,70
12.07 13:11	7,160	-136800	1300	-969,69	1 421 046,70
12.07 13:57	7,177	17700	19000	-943,85	1 421 046,70
12.07 14:18	7,186	13800	32800	-770,56	1 421 046,70
12.07 14:39	7,183	-29600	3200	-869,72	1 421 046,70
12.07 14:59	7,180	121800	125000	-880,10	1 421 046,70
12.07 15:21	7,184	-149700	-24700	-378,74	1 421 046,70
12.07 15:44	7,193	59100	34400	-597,91	1 421 046,70
12.07 16:24	7,248	-30300	4100	1317,09	1 421 046,70
12.07 16:44	7,215	-17200	-13100	1166,44	1 421 046,70
12.07 18:45	7,329	38200	25100	-268,60	1 421 046,70
13.07 10:50	7,336	-14500	10600	-88,67	1 421 046,70
13.07 11:50	7,380	-33000	-22400	405,10	1 421 046,70
13.07 12:30	7,385	24300	1900	296,49	1 421 046,70
13.07 13:10	7,375	10700	12600	269,87	1 421 046,70
13.07 13:30	7,390	111600	124200	470,40	1 421 046,70
13.07 13:50	7,388	-151500	-27300	220,34	1 421 046,70
13.07 14:10	7,369	33800	6500	721,93	1 421 046,70
13.07 14:50	7,375	60000	66500	766,61	1 421 046,70

¹ Вавилов С. А., Ермоленко К. Ю. Стохастические системы управления портфелем ценных бумаг // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 5. Экономика. 2003. Вып. 3. № 21. С. 113–122.

² Уотшем Т. Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. М., 1999.

³ Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В. Инвестиции. М., 1998.

⁴ Harrison J.M., Karp D. M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // Journal of Economic Theory. 1979. № 20. P. 381–408.

⁵ Вавилов С. А., Ермоленко К. Ю. Указ. соч. С. 113–122.

⁶ Там же.

⁷ Вавилов С. А., Ермоленко К. Ю. Процедура сглаживания биржевых котировок без использования настраиваемых по историческим данным параметров // Вест. С.-Петербург. ун-та. Сер. 5. Экономика. 2004. Вып. 2. № 13.

⁸ Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1989.

⁹ Вавилов С. А., Ермоленко К. Ю. Стохастические системы управления портфелем ценных бумаг. С. 113–122.

¹⁰ Там же.

¹¹ Воронцовский А. В. Управление рисками. СПб., 2000.

Статья поступила в редакцию 29 декабря 2004 г.