КРАТКИЕ НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 336

А. А. Федорова

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ КРЕДИТНОГО РИСКА БАНКА

В задаче управления кредитным риском портфеля одной из самых сложных проблем является моделирование эмпирической функции распределения убытков портфеля. Данная задача решается различными способами. Так, в модели CreditPortfolioView предлагается моделировать такую функцию на основе метода Монте-Карло [6]. Соответствующий алгоритм приведен в статье С. В. Ивлиева [2]. Однако учет коррелированности данных заемщиков не был рассмотрен при его построении. Эту проблему можно решить двумя способами: используя ковариационную матрицу вероятностей дефолтов или путем применения ковариационной матрицы убытков. В данной статье проведен сравнительный анализ предлагаемых способов моделирования убытков по кредитному портфелю.

Вначале рассмотрим алгоритм моделирования кредитного риска методом Монте-Карло [4, с. 3] при учете коррелированности данных компаний-заемщиков через ковариационную матрицу убытков. Для вычисления элементов ковариационной матрицы могут быть использованы значения регрессионных коэффициентов временных рядов убытков, характеризующих кредиты определенных заемщиков в течение срока кредитования.

Пусть портфель состоит из N кредитов. Для каждого кредита с номером j, при $j = 1...N$, заданы S_j — остаток ссудной задолженности по j-му кредиту, p_j — вероятность дефолта за год. Обозначим L_j — убыток по кредиту j вследствие дефолта. Пусть также задана ковариационная матрица убытков по портфелю $\Omega = \left\|\Omega_{ij}\right\| = E\big((L_i - p_iS_i)\times(L_j - p_jS_j)\big)$.

Необходимо смоделировать убыток L_p по всему портфелю

$$L_p = \sum_{j=1}^{N} L_j .$$

L_p как сумма дискретных случайных величин также представляет собой дискретную случайную величину, распределение которой не задается известными классом распределений. Рассчитаем числовые характеристики убытка L_p:

1) математическое ожидание убытков портфеля банка

$$M(L_p) = \sum_{j=1}^{N} M(L_j) = \sum_{j=1}^{N} p_jS_j;$$

Анна Анатольевна ФЕДОРОВА — соискатель кафедры экономической кибернетики СПбГУ, риск-аналитик отдела кредитных рисков корпораций (КИТ Финанс Инвестиционный банк). В 2004 г. окончила Экономический факультет СПбГУ. Автор 3 научных работ. Сфера научных интересов — кредитные риски.

2) дисперсия убытков портфеля банка

$$D(L_p)=D\Big(\sum_{j=1}^{N}L_j\Big)=\Big(M\sum_{j=1}^{N}L_j-M(\sum_{j=1}^{N}L_j)\Big)^2=M\Big(\sum_{j=1}^{N}L_j-\sum_{j=1}^{N}p_jS_j\Big)^2=\sum_{j=1}^{N}M(L_j-p_jS_j)^2+$$

$$+2\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{N}M(L_i-p_iS_i)(L_j-p_jS_j)=\sum_{j=1}^{N}\big(p_jS_j^2-p_j^2S_j^2\big)+2\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{N}L_{ij}=\sum_{j=1}^{N}p_j\big(1-p_j\big)S_j^2+2\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{N}L_{ij};$$

3) стандартное отклонение убытков портфеля банка

$$\sigma_{L_p}=\left(\sum_{j=1}^{N}p_j\big(1-p_j\big)S_j^2+2\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{N}L_{ij}\right)^{1/2},$$

где p_j — вероятность дефолта за горизонт анализа.

Величина $M(L_p)$ — ожидаемые убытки или ожидаемый уровень потерь и в соответствии с рекомендациями Базель 2 — необходимый размер резервов на возможные потери. Для построения количественной оценки кредитного риска в методологии VaR построим эмпирическую функцию распределения случайной величины L_p методом Монте-Карло.

Используем следующий алгоритм для моделирования:

1. Для каждого кредита j генерируются равномерно распределенные от 0 до 1 случайные величины: $D_j^k \approx R\big[0,1\big],\ j=1\ldots N$, где N — количество кредитов в портфеле.

2. Генерируются псевдослучайные дискретные векторы $\Lambda^k=\big\{\lambda_j^k\big\},\ j=1\ldots N$,

$$\text{где}\quad \lambda_j^k=\begin{cases}S_j, D_j^k\geq 1-p_j\\ 0, D_j^k<1-p_j\end{cases}.$$

3. Вектор убытков по возможным потерям $\overline{L}=\{L_j\}$, $j=1\ldots N$, распределенный с математическим ожиданием $\overline{M}=\{p_iS_i\}$, $i=1\ldots N$ и ковариационной матрицей Ω, получается через линейное преобразование [3] вида

$$\overline{L}=A\Lambda^k+\overline{M}.$$

Обычно полагают, что матрица преобразования A является нижней треугольной матрицей

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \ldots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN}\end{bmatrix},$$

элементы a_{ij} которой определяются рекуррентной формулой

$$a_{ij}=\frac{L_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}a_{ik}a_{jk}}{\sqrt{L_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1}a_{jk}^2}},\quad 1\leq j\leq i\leq N.$$

По предложенному алгоритму были произведены вычисления в программе Mathematica для портфеля из 10 кредитов, характеристики которых указаны в таблице.

Таблица

Кредитный портфель

Характеристики кредита \ № п.п, j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сумма, тыс. рублей, S_j	100	500	60	900	200	550	420	180	720	360
Вероятность дефолта за год, p_j	2,0%	1,0%	5,0%	1,0%	3,0%	3,0%	5,0%	10,0%	3,0%	4,0%

На рис. 1а и 1б представлен график убытков с единичной ковариационной матрицей убытков для указанного кредитного портфеля.

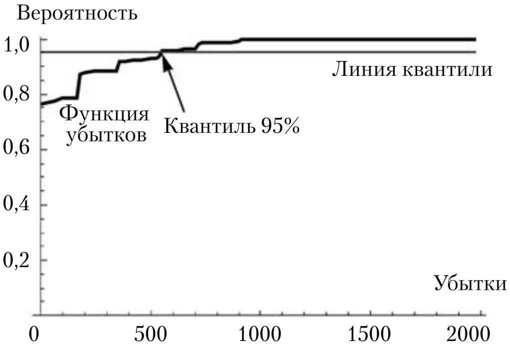

Рис. 1а. График функции убытков с единичной ковариационной матрицей убытков.

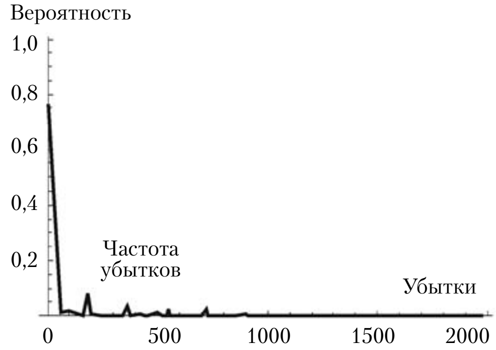

Рис. 1б. График частоты убытков при единичной ковариационной матрице убытков.

На рис. 1а представлен график функции убытков. Функция убытков показывает при имитации методом Монте-Карло, какова частота испытаний с убытками, не превышающими выбранную величину. Можно также привести график частоты убытков (на рис. 1б), который показывает при имитации методом Монте-Карло, какова частота испытаний с убытками выбранной величины.

Теперь рассмотрим случай высококоррелированных убытков. Для примера пусть все члены ковариационной матрицы равны 0,9, кроме равных единице элементов главной диагонали (рис. 2а и 2б).

При такой ковариационной матрице можно считать, что все 10 кредитов выданы одному заемщику. Сравнивая рис. 1а и рис. 2а, можно видеть, что 95%-ный квантиль распределения убытков или *VaR* [1] сместились влево. Таким образом, оказывается, что при недиверсифицированном кредитном портфеле риск дефолта ниже, чем при диверсифицированном.

При реализации второго подхода рассмотрим алгоритм моделирования кредитного риска методом Монте-Карло с учетом коррелированности данных через ковариационную матрицу вероятностей дефолтов. Для вычисления элементов ковариационной матрицы могут быть использованы значения регрессионных коэффициентов временных рядов вероятностей дефолтов, характеризующих определенных заемщиков в течение срока кредитования. Так, известные рейтинговые агентства на постоянной основе публикуют

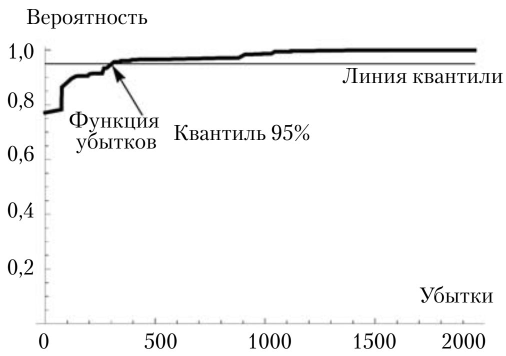

Рис. 2а. График функции убытков с фиксированной ковариационной матрицей убытков.

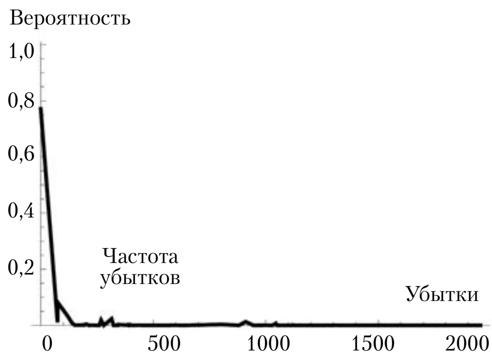

Рис. 2б. График частоты убытков с фиксированной ковариационной матрицей убытков.

рейтинги [5] ряда предприятий, на основе которых могут быть сформированы временные ряды вероятностей дефолтов этих предприятий.

Пусть, как и ранее, есть портфель, состоящий из N кредитов: для каждого кредита с номером j при $j = 1... N$ заданы S_j — остаток ссудной задолженности j-го кредита, p_j — вероятность дефолта в текущем году, X_j — дискретная случайная величина, принимающая значения 1 с вероятностью, равной вероятности дефолта p_j, и значение 0 с вероятностью $1 - p_j$. Назовем L_j — убыток по j-му кредиту.

Предположим, что задана $\Sigma = \left\|\sigma_{ij}\right\| = E\big((X_i - p_i)(X_j - p_j)\big)$ — ковариационная матрица вероятностей дефолтов.

Алгоритм моделирования кредитного риска будет сводиться к следующей процедуре.

1. Сгенерируем N случайных величин Z_j со стандартным нормальным распределением, тогда величина $\overline{X} = A\overline{Z} + \overline{p}$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $p = \left\|p_1, p_2, \ldots, p_N\right\|^T$ и ковариационной матрицей Σ, если A является нижней треугольной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{bmatrix},$$

элементы a_{ij} которой определяются рекуррентной формулой

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} a_{ik}a_{jk}}{\sqrt{\sigma_{jj} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2}}, 1 \le j \le i \le N.$$

2. Оцениваем компоненты вектора $\overline{X}^k$.

3. $L_j^k = \begin{cases} S_j, X_j^k \ge 1 - p_j, \\ 0, X_j^k < 1 - p_j. \end{cases}$

4. Окончательная сумма убытков

$$L_p^k = \sum_{j=1}^{N} L_j^k \ .$$

По второму алгоритму также проведены вычисления в программе Mathematica по кредитному портфелю из 10 кредитов, представленному в таблице. Построим графики убытков для случая отсутствия корреляций между дефолтами (рис. 3а и 3б):

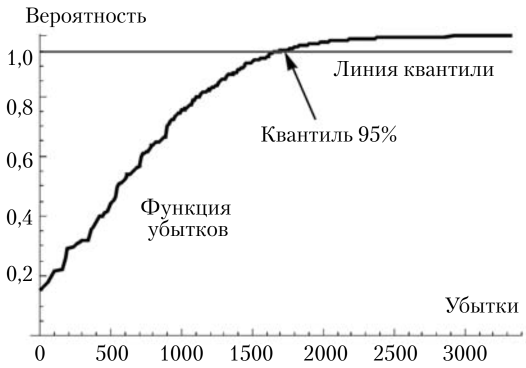

Рис. 3а. График функции убытков с единичной ковариационной матрицей дефолтов.

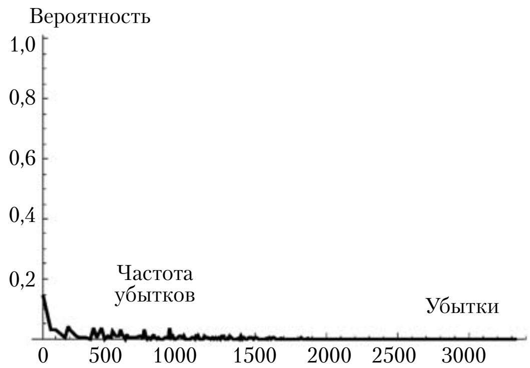

Рис. 3б. График частоты убытков с единичной ковариационной матрицей дефолтов.

Представим также случай высокой корреляционной связи между дефолтами, когда все элементы ковариационной матрицы равны, например, 0,9, кроме единичных элементов главной диагонали (рис. 4а, 4б).

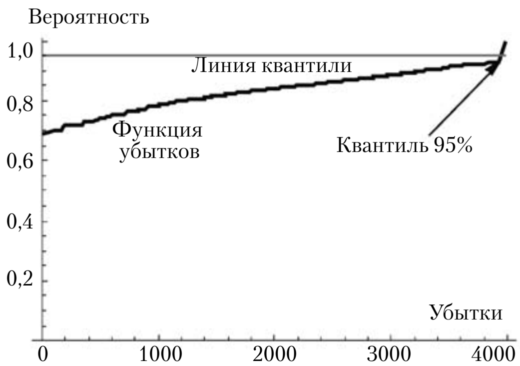

Рис. 4а. График функции убытков с фиксированной ковариационной матрицей дефолтов.

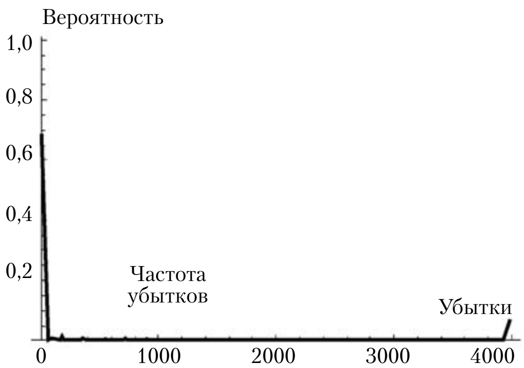

Рис. 4б. График частоты убытков при фиксированной ковариационной матрице дефолтов.

Заметим, что в последнем случае 95%-ный квантиль распределения убытков существенно сместилась вправо. В данном случае можно считать, что портфель состоит из кредитов одного заемщика и представляет собой недиверсифицированный портфель. Таким образом, при данном способе моделирования оказывается, что риск недиверсифицированного портфеля больше.

В результате можно сделать следующие выводы. В обоих алгоритмах моделирования кредитного риска методом Монте-Карло используется учет коррелированности данных компаний-заемщиков. В первом алгоритме для этого применяется ковариационная матрица убытков, во втором — ковариационная матрица вероятностей дефолтов. Первый алгоритм показал, что чем менее диверсифицирован кредитный портфель, тем меньше величина *VaR* — неожидаемых убытков. Так, например, при изменении структуры ковариационной матрицы убытков с единичной матрицы на матрицу, в которой все элементы главной диагонали равны единице, остальные элементы равны 0,9, оказывается, что *VaR* портфеля кредитов смещается влево. Второй алгоритм продемонстрировал обратный вывод: чем выше корреляция между дефолтами и менее диверсифицирован портфель, тем выше *VaR* — неожидаемые убытки по портфелю. То есть при изменении структуры ковариационной матрицы вероятностей дефолтов с единичной матрицы на матрицу, в которой все элементы главной диагонали равны единице, остальные элементы равны 0,9, оказывается, что *VaR* портфеля кредитов смещается вправо. В целом можно сделать вывод, что второй алгоритм моделирования при возрастании степени коррелированности данных по портфелю кредитов и более высоких значениях элементов ковариационной матрицы вероятностей дефолтов демонстрирует более высокие значения VaR, поэтому второй алгоритм больше применим к моделированию коррелированности данных заемщиков по портфелю.

1. *Волков С. Н.* Оценивание кредитного риска: теоретико-вероятностные подходы. URL: http://www.creditrisk.ru/ publications/n_13/ (дата обращения: 17.08.2009).

2. *Ивлиев С. В.* Исследование кредитного риска методом Монте-Карло. URL: www.riskland.ru/lib/CreditRisk MonteCarlo.shtml (дата обращения: 17.08.2009).

3. *Лемешко Б. Ю., Помадин С. С.* Корреляционный анализ наблюдений многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5. № 3. С. 115–130.

4. *Соболь И. М.* Метод Монте-Карло. М., 1968. С. 3.

5. Рейтинги агентства Moody's предприятий России. URL: http://www.moodys.ru/mdcsPage.aspx?mdcsId=13&template =ratinglists (дата обращения: 17.08.2009).

6. *Wilson T. C.* Portfolio Credit Risk. FRBNY Economic policy review, 1998. P. 71–82.

Статья поступила в редакцию 17 сентября 2009 г.