КРАТКИЕ НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

А.Л. Тубина

МЕТОДИКИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

В современных условиях деятельность экономических агентов связана с необходимостью отслеживания и предсказания основных тенденций в изменении значений различных финансовых показателей. В процессе управления любой компанией одной из основных задач является постоянный контроль за изменением объема ресурсов, находящихся в распоряжении данной организации. Безусловно, динамика конкретного ресурса зачастую определяется внешними факторами. При принятии управленческих решений необходимо знать, каковы тенденции его изменения при постоянстве остальных факторов, иметь возможность прогнозировать его динамику в случае смены внешних экономических условий. Однако выявление такого рода закономерностей для многих показателей оказывается достаточно сложной задачей. В связи с этим в последнее время значительное внимание уделяют так называемым *однофакторным стохастическим моделям*, в которых будущие значения исследуемой переменной рассматриваются как функция от ее прошлых значений. Они предоставляют возможность осуществлять прогнозирование, анализируя временной ряд показателя изолированно. Положительным свойством является универсальность методов: их можно использовать для анализа и прогнозирования различных по своей сути экономических показателей. В качестве таковых могут выступать котировки ценных бумаг, остатки на счетах банков, фондовые индексы, курсы валют, совокупность всех активов или пассивов компании. Однофакторные модели могут быть успешно применены для моделирования банковской деятельности. В этом случае в качестве наблюдаемого ряда значений могут выступать привлеченные средства в целом, остатки на определенных банковских счетах, депозиты до востребования, срочные депозиты и т.д.[1]

Таким образом, диапазон применения однофакторных моделей достаточно широк. Для их реализации необходимо располагать серией наблюдений исследуемого показателя в течение относительно длительного промежутка времени. Следует отметить, что выбор длины базового ряда значений является отдельной задачей. С одной стороны, необходимо располагать достаточным количеством наблюдений, для того чтобы структура исходных данных удовлетворяла базовым предпосылкам моделей; с другой – выбор слишком большой серии исходных для прогнозирования значений может негативно сказаться на степени адекватности модели реальной экономической ситуации. В качестве статистической

ТУБИНА
Анна Леонидовна
– ассистент кафедры экономической кибернетики экономического факультета СПбГУ. В 2003 г. окончила с отличием экономический факультет СПбГУ по специальности «Математические методы и исследование операций в экономике». Сфера научных интересов – исследование динамики фондовых рынков, эконометрический анализ.

базы для данного исследования была выбрана динамика индекса РТС (рассматривалась выборка в 180 значений). Такой выбор может быть обусловлен двумя аспектами. Для большинства участников фондового рынка первоочередной является проблема предсказания основных тенденций развития. Важна возможность прогнозирования как динамики рынка в целом, так и «поведения» его отдельных инструментов.

Вместе с тем серьезным преимуществом данной статистической информации является ее открытость и доступность, что позволяет проводить независимую проверку полученных на основе данного анализа выводов.

Обратимся к анализу конкретных представителей класса однофакторных стохастических моделей. К методикам такого типа относятся *дискретные стохастические модели* (ДСМ). Наиболее распространенными постановками ДСМ являются аддитивная (АСМ) и мультипликативная (МСМ) формы. Принципиальное различие этих модификаций состоит в том, что мультипликативная форма предполагает экспоненциальную зависимость прогнозной величины от времени, тогда как в аддитивной модели она линейна. В рамках данного исследования предлагается провести детальный анализ АСМ, учитывая, что МСМ может быть протестирована с использованием аналогичных методов. Их основная предпосылка состоит в возможности представления динамики исследуемого показателя в виде ряда значений, наблюдаемых через дискретные промежутки времени. В связи с этим математическая постановка АСМ имеет вид:

$$\tilde{x}_n = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i, \quad (1)$$

где x_0 – объем показателя в начальный момент времени; $\tilde{\alpha}_i$ – случайные коэффициенты элементарного перехода от объема показателя в момент времени $(i-1)$ к объему показателя в момент времени i; $\tilde{x}_n$ – случайное значение величины показателя в момент времени n. При этом предполагается, что случайные коэффициенты элементарного перехода независимы и распределены нормально ($\tilde{\alpha}_i \in N(\mu'_i, \sigma'^2_i)$).

Предположим, необходимо предсказать будущую динамику некоторого показателя на основе его известных последовательных значений $x_0, x_1, ..., x_k$*. Тогда прогнозные значения будут строиться по следующему соотношению (2):

$$x_n = x_0 + n\mu, \quad (2)$$

где μ – оценка математического ожидания коэффициентов $\tilde{\alpha}_i$ (выборочное математическое ожидание).

В настоящее время для анализа временных рядов также широко используются *модели Бокса –Дженкинса*, среди которых выделяют: авторегрессионную модель, модель скользящего среднего, смешанную модель авторегрессии и скользящего среднего.[2] Последняя (ARMA) предполагает, что значение исследуемого ряда задается линейной функцией от его предыдущих значений, а также от прошлых ошибок:

$$y_t = \theta_1 \cdot y_{t-1} + ... + \theta_p \cdot y_{t-p} + \varepsilon_t - \gamma_1 \cdot \varepsilon_{t-1} - ... - \gamma_q \cdot \varepsilon_{t-q}, \quad (3)$$

где $y_{t-1}, ..., y_{t-p}$ – лаги зависимой переменной; ε_t - ошибки наблюдений; $\theta_1, ...\theta_p$ - оцениваемые в модели константы при лагах зависимой переменной; $\gamma_1, ...\gamma_q$ – константы при лагах ошибок.

---

* Предполагается, что $x_0, x_1, ..., x_k$ принимают неотрицательные значения.

Каждый из описанных методов обладает своей спецификой и может использоваться при соблюдении определенных условий. В связи с этим ниже предлагается сравнительный анализ представленных моделей. Одним из предположений, в рамках которых формулируются методики ДСМ, является независимость коэффициентов элементарного перехода. Рассмотрим реализацию проверки этой предпосылки на примере индекса РТС. В качестве объекта исследования использовались ежедневные данные (исключая выходные дни и официальные праздники) за период 10.03. – 26.10.1999 (180 значений). Табл. 1 содержит значения функции автокорреляции для коэффициентов элементарного перехода, рассчитанных в соответствии с АСМ-методикой (расчеты проводились в программе EViews 3.1).

Таблица 1. **Коэффициенты автокорреляции (аддитивная модель)**

	AC	PAC	*Q*–Статистика	Вероятность
1	–0.099	–0.099	1.7804	0.182
2	0.110	0.101	4.0020	0.135
3	–0.076	–0.057	5.0717	0.167
4	–0.025	–0.048	5.1860	0.269

В соответствии с полученными значениями вероятностей (больше 0,05) и *Q*-статистики, на уровне значимости 5% есть основания принять гипотезу о том, что исследуемый ряд является белым шумом. Иными словами, коэффициенты элементарного перехода, построенные для АСМ, независимы.

Следующей необходимой операцией перед использованием методик ДСМ является проверка гипотезы о нормальном распределении коэффициентов элементарного перехода (α_i в аддитивной модели). Для решения этой задачи используется процедура статистической проверки гипотезы о принадлежности выборки генеральной совокупности на основе χ^2 критерия.[3] Проиллюстрируем методику проведения такой проверки на примере ряда ежедневных значений индекса РТС за период 10.03. - 26.10.1999 (180 значений). В соответствии с постановкой АСМ были рассчитаны коэффициенты α_i, вычислены их выборочные среднее и дисперсия. Результаты расчетов, необходимых для получения статистики χ^2, представлены в табл. 2.

Таблица 2. **Значения вычисленной статистики χ^2 для коэффициентов элементарного перехода АСМ; μ = 0.2166; σ = 3.4667**

Интервал	Верхняя граница интервала	Частота попадания в *к*-й интервал, $\nu_к$	Вероятность попадания в *к*-й интервал, $p_к$	Значение $\chi^2_к$
$(-\infty, \mu-1{,}5\sigma]$	–4.98351	7	0.0668	2.1000
$(\mu-1{,}5\sigma, \mu-\sigma]$	–3.25014	19	0.0918	0.3682
$(\mu-\sigma, \mu-0{,}5\sigma]$	–1.51676	22	0.1499	0.9188
$(\mu-0{,}5\sigma, \mu]$	0.216614	40	0.1915	0.8895
$(\mu, \mu+0{,}5\sigma]$	1.949988	39	0.1915	0.5972
$(\mu+0{,}5\sigma, \mu+0\sigma]$	3.683363	27	0.1499	0.0000
$(\mu+\sigma, \mu+1{,}5\sigma]$	5.416737	16	0.0918	0.0172
$(\mu+1{,}5\sigma, \infty]$	∞	10	0.0668	0.3411

Полученное выборочное значение статистики

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{8} \chi_k^2 = 5.232 \qquad (4)$$

не превышает критического значения $\chi^2_{0.05}(5) = 11.07$. Таким образом, нет оснований отвергать гипотезу, и можно считать, что ряд коэффициентов элементарного перехода АСМ распределен по нормальному закону. Такая проверка делает обоснованным дальнейшее применения аддитивной модели для прогнозирования.

Следует отметить, что реализация аналогичных проверок для мультипликативной формы дискретной стохастической модели дает положительные результаты: коэффициенты элементарного перехода МСМ независимы, и гипотеза о «нормальности» их распределения может быть принята. Таким образом, для выбранного диапазона исходных данных прогнозы могут быть построены как с помощью АСМ, так и с использованием МСМ. Хотя следует отметить, что зачастую на основе результатов проверки гипотезы о нормальности распределения коэффициентов элементарного перехода необходимо однозначно отдавать предпочтение одной из форм ДСМ.[4]

Теперь обратимся к требованиям, предъявляемым к исходному ряду значений моделями ARMA. Авторегрессионный процесс и процесс скользящей средней предполагают, что анализируемые данные являются *стационарными.*[5] Поэтому перед применением ARMA необходимо провести соответствующую проверку (расчеты для данного исследования проводились в эконометрическом пакете EViews 3.1). Результаты теста на порядок интегрируемости, проведенного для 180 исследуемых значений индекса РТС, позволяют предположить, что исходный ряд не является стационарным: вычисленная ADF-статистика – 2.0489 превышает критические значения –3.4669 (1%), – 2.8771 (5%), –2.5750 (10%). Вместе с тем аналогичный тест, проведенный для ряда разностей индекса РТС, позволяет сделать вывод о его стационарности: значение ADF-статистики (–11.0203) меньше 1% критического уровня (–3.4669). Иными словами, исходный ряд значений индекса РТС является интегрируемым первого порядка: операция взятия первых разностей преобразует его в стационарный и делает возможным дальнейшее применение ARMA модели.

После проверки соответствия исходных данных основным предпосылкам моделей можно переходить непосредственно к построению прогнозов. При анализе ряда значений индекса РТС оказалось, что наиболее адекватной процессу моделью является AR(1):

$$D\_\mathrm{RTS}_t = 0.185354 \cdot D\_\mathrm{RTS}_{t-1},$$

при этом в соответствии с проведенной коррекцией на гетероскедастичность условная дисперсия ошибок моделируется по GARCH(1,2):

$$\sigma_t^2 = 1.412009 + 0.044681 \cdot u^2_{t-1} + 1.642530 \cdot \sigma^2_{t-1} - 0.814099 \cdot \sigma^2_{t-2}.$$

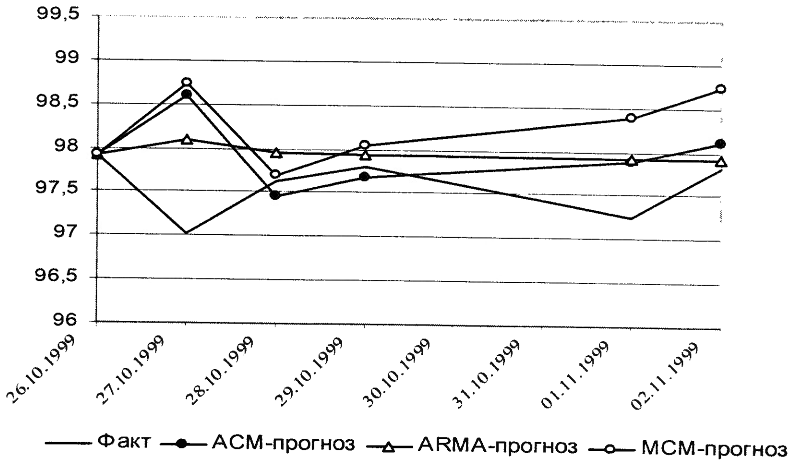
Была проведена проверка на наличие автокорреляции остатков (в EViews 3.1 – «Serial Correlation LM Test») (табл. 3).

Таблица 3. **Тест Бреуша–Годфрея на наличие автокорреляции остатков**

Значение F-статистики	1.749572	Вероятность	0.125583
Значение R^2	8.190406	Вероятность	0.146050

Значения рассчитанных статистик (и вероятностей) позволяют принять гипотезу об отсутствии автокорреляции.

В связи с тем, что ДСМ и ARMA являются инструментами краткосрочного прогнозирования, имеет смысл рассматривать прогнозы с небольшим горизонтом прогнозирования. В частности, на рисунке представлено взаимное расположение прогнозных значений, полученных с использованием ARMA и обеих форм ДСМ.



Прогнозы индекса РТС, полученные на базе АСМ, МСМ и ARMA.

Для оценки качества получаемых прогнозов предлагается использовать величину *относительного отклонения*.[6] Одним из возможных количественных показателей для сопоставления точности прогнозов, получаемых на основе различных методик, можно использовать средний коэффициент относительного отклонения, вычисляемый по формуле

$$\bar{\rho} = \frac{1}{K}\sum_{t=1}^{K}\rho_t, \qquad (5)$$

где ρ_t – коэффициент относительного отклонения фактического значения от прогнозного на момент времени t (измеряется в процентах); K – горизонт прогнозирования (т. е. количество построенных прогнозных значений). Для прогнозов, представленных на рис.1, $K=5$.

В табл. 4 приведены значения средних коэффициентов относительных отклонений для продемонстрированных выше прогнозов.

Таблица 4. **Показатели качества АСМ, МСМ и ARMA прогнозов индекса РТС**

Прогнозная методика	**АСМ**	**МСМ**	**ARMA**
$\bar{\rho}$	0.58%	0.84%	0.48%

И с т о ч н и к : данные РТС (http: //rts.ru).

Средний коэффициент относительного отклонения в ARMA модели несколько меньше. Это говорит о том, что формально для данной выборки значений наиболее предпочтительной является именно эта методика прогнозирования. Однако, учитывая, что разница в значениях коэффициента составляет доли процента (достаточно малая величина отклонения), можно сделать вывод о возможности альтернативного применения анализируемых моделей.

Опыт практического применения методик, опирающихся на ДСМ и ARMA, позволяет сделать вывод о возможности их успешного применения для целей краткосрочного прогнозирования. В качестве достоинства обоих типов прогнозных методик можно отметить относительную «нежесткость» предпосылок, допускающих их применение. Процедура работы с ARMA позволяет модифицировать исходные данные так, чтобы дальнейшее применение модели было возможно. В случае ДСМ результат проверки гипотезы о нормальности распределения, как правило, дает положительную оценку возможности дальнейшего использования обеих моделей или же одной из них.

---

[1] Конюховский П. В. Микроэкономическое моделирование банковской деятельности. СПб., 2001. С. 151–164

[2] Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. Эконометрика: Начальный курс: Учебник. 5-е изд., испр. М., 2001. С. 262–274.

[3] Крамер Г. Математические методы статистики. М., 1975. С. 453–489. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., 1999. С. 151–155.

[4] Конюховский П. В. Моделирование стохастической динамики финансовых ресурсов. СПб., 2002. С. 118–119.

[5] Verbeek M. A guide to modern econometrics. 2000. John Wiley & Sons, Ltd. P. 235–241.

[6] Конюховский П. В. Моделирование стохастической динамики финансовых ресурсов. С. 8--89.

Статья поступила в редакцию 29 декабря 2004 г.