ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Д. Н. Колесов, Н. В. Хованов, М. С. Юдаева

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВАРИАНТОВ РАЗВИТИЯ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

Введение

При описании процессов, происходящих внутри сложных систем различной природы и назначения, широко используются методы, основанные на изучении так называемых «деревьев событий» (*event trees*)[1], представляющих собой графы, вершины которых соответствуют событиям, происходящим в изучаемых системах, а направленные ребра (дуги) – переходам от одних событий к другим. Знание условных вероятностей перехода от одних вершин дерева к вершинам, непосредственно следующим за ними, позволяет вычислить вероятности всех событий, интересующих исследователя. Необходимые для этого вычислительные формулы даются в начале настоящей статьи.

При попытке применить хорошо разработанный аппарат деревьев событий с заданными условными вероятностями переходов для описания и прогнозирования поведения сложных социально-политических и финансово-экономических систем и процессов различного масштаба (от реализации проектов развития отдельных фирм до описания поведения мировых финансов в целом) возникает проблема неопределенности задания указанных переходных вероятностей, имеющая своей причиной дефицит как статистической, так и экспертной информации[2].

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 06-06-80271).

Дмитрий Николаевич КОЛЕСОВ – канд. экон. наук, доцент, заведующий кафедрой экономической кибернетики СПбГУ. Область научных интересов – экономико-математические модели рынков ценных бумаг.

Николай Васильевич ХОВАНОВ – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета СПбГУ. Область научных интересов – стохастические модели риска и неопределенности, теория и методы принятия решений в условиях дефицита информации.

Мария Сергеевна ЮДАЕВА – ассистент кафедры экономической кибернетики СПбГУ. Область научных интересов – методы принятия решений в условиях неопределенности, системы планирования ресурсов предприятия (ERP-системы).

Для решения проблемы неопределенности переходных вероятностей нами разработан новый метод, опирающийся на восходящую еще к Томасу Байесу[3] концепцию рандомизации неопределенности, возникающей при использовании нечисловой, неточной и неполной информации, получаемой исследователем из источников различной надежности и значимости[4]. В результате применения этого *метода рандомизации неопределенности* исследователь получает дерево событий со случайными (т. е. рандомизированными) переходными вероятностями. В статье выводятся формулы, позволяющие оценить вероятности всех событий и измерить точность полученных оценок. Различные варианты разработанного метода, основанного на представлении сложного процесса в виде *дерева событий с рандомизированными переходными вероятностями* (ДСРПВ), были апробированы нами при решении различных задачах прогнозирования сложных финансово-экономических процессов[5].

В статье представлен иллюстративный пример использования концепции дерева событий со случайными переходными вероятностями для описания теоретико-игровой модели динамики финансовой системы некоторой страны. Строится соответствующее дерево событий с рандомизированными переходными вероятностями и дается оценка вероятности возникновения кризиса на финансовом рынке рассматриваемой страны.

В заключительной части статьи кратко обсуждается методологическая основа предложенной концепции ДСРПВ, связанная с вариантом теории вероятностей, разработанной Дж. М. Кейнсом для нужд описания экономических явлений в условиях неопределенности.

Дерево событий с переходными вероятностями

Для дальнейших рассуждений нам необходимо построить дерево событий общего вида. Начало такого формального построения начнем с задания простейшего ориентированного корневого дерева $T^{(0,1)}=\{A^{(0)}:A^{(1)}[i_1],\ i_1=1,\dots,r^{(1)}\}$, представляющего собой ориентированный граф, состоящий из корня $A^{(0)}$, соединенного $r^{(1)}$ дугами $(A^{(0)},\ A^{(1)}[i_1]), i_1=1,\dots,r^{(1)}$, начинающимися в этом корне, с вершинами $A^{(1)}[1],\dots,A^{(1)}[i_1],\dots,\ A^{(1)}[r^{(1)}]$.

Далее, используя каждую вершину $A^{(1)}[i_1]$ в качестве корня, пристроим к графу $T^{(0,1)}$ еще $r^{(1)}$ элементарных деревьев $T^{(1,2)}(i_1)=\{A^{(1)}[i_1]:A^{(2)}[i_1,i_2],i_2=1,\dots,r^{(2)}(i_1)\}$. Каждое из деревьев имеет $r^{(2)}(i_1)$ вершин, соединенных с корнем дугами $(A^{(1)}[i_1]:A^{(2)}[i_1,i_2]),\ i_1=1,\dots,r^{(1)},\ i_2=1,\dots,r^{(2)}(i_1)$. В результате получаем двухуровневое дерево $T^{(0,1,2)}=\{A^{(0)}:(A^{(1)}[i_1],A^{(2)}[i_1,i_2]), i_1=1,\dots,r^{(1)},i_2=1,\dots,r^{(2)}(i_1)\}$, имеющее корень $A^{(0)}$ и $r^{(2)}(1)+\dots+r^{(2)}(i_1)+\dots+r^{(2)}(r^{(1)})$ конечных вершин $A^{(2)}[1,1],\dots,A^{(2)}[i_1,i_2],\dots,\ A^{(2)}[\ r^{(1)},r^{(2)}(r^{(1)})]$.

Продолжим описанный процесс достройки дерева событий вплоть до присоединения к каждой конечной вершине $A^{(k-1)}[i_1,\dots,i_{k-1}]$ построенного на предыдущем этапе графа $T^{(0,\dots,k-1)}$ элементарных ориентированных деревьев $T^{(k-1,k)}(i_{k-1},i_k)$, имеющих структуру вида $T^{(k-1,k)}(i_{k-1},i_k)= =\{A^{(k-1)}[i_1,\dots,i_{k-1}]:A^{(k)}[i_1,\dots,i_k],i_k=1,\dots,r^{(k)}(i_1,\dots,i_{k-1})\}$. Таким образом, получаем k-уровневое ориентированное дерево, имеющее структуру вида $T^{(0,1,\dots,k)}=\{A^{(0)}:(A^{(1)}[i_1],\dots,A^{(k)}[i_1,\dots,i_k]),i_1= =1,\dots,r^{(1)},\dots,i_k=1,\dots,r^{(k)}(i_1,\dots,i_{k-1})\}$, имеющее корень $A^{(0)}$.

При использовании деревьев событий для моделирования сложных финансово-экономических систем и процессов можно использовать различные содержательные интерпретации формального объекта – ориентированного дерева $T^{(0,1,\dots,k)}$. Например, корень $A^{(0)}$ можно трактовать как некоторое *начальное событие* (скажем, резкое снижение объема платежных средств банка), из которого могут следовать *события* $A^{(1)}[1],\dots,\ A^{(1)}[r^{(1)}]$ (соответствующие, скажем, различным конфигурациям неплатежей по межбанковским кредитам), образующие полную группу попарно несовместных событий, т. е. группу подмножеств множества элементарных исходов Ω некоторого случайного испытания, удовлетворяющих условиям: (1) $A^{(1)}[i]\cap A^{(1)}[j]=\varnothing$, если $i,j=1,\ldots,r^{(1)}$, $i\neq j$; (2) $A^{(1)}[1]\cup\ldots\cup A^{(1)}[r^{(1)}]=\Omega$.

При другой интерпретации все узлы графа $T^{(0,1)}$ соотносятся с состояниями некоторой системы (системы национальной экономики, например). Тогда корень $A^{(0)}$ есть состояние системы в начальный момент времени t_0, а вершины $A^{(1)}[1],\ldots, A^{(1)}[r^{(1)}]$ — суть альтернативные состояния, в которые система может прийти в следующий момент времени $t_1>t_0$.

Столь же естественной является теоретико-игровая интерпретация вершин $A^{(1)}[1],\ldots, A^{(1)}[r^{(1)}]$ дерева $T^{(0,1)}$ как возможных альтернативных действий одного игрока (скажем, инвесторов-нерезидентов на российском рынке ГКО в 1998 г.) на первом шаге игры, начало которой соотносится с корневым узлом $A^{(0)}$.

Аналогично интерпретируются в рамках трех вышеописанных трактовок и все остальные элементарные поддеревья $T^{(j-1,j)}(i_{j-1},i_j)$, $,j=1,\ldots,k$, ориентированного дерева общего вида $T^{(0,1,\ldots,k)}$.

При использовании ориентированных деревьев для описания реальных объектов и процессов зачастую оказывается целесообразным объединение некоторых групп конечных вершин $A^{(k)}[i_1,\ldots,i_k]$ графа $T^{(0,1,\ldots,k)}$, которые соответствуют эквивалентным для исследователя результатам (например, различные стратегии участников финансового рынка могут привести к одному и тому же результату – финансовому кризису). Такие составные (агрегированные) вершины дерева представляют собой объединения $B_1,\ldots,B_n,\ldots,B_N$ вида $B_n=\bigcup_{s=1}^{S_n} A^{(k)}\left[i_1^{(s)},\ldots,i_k^{(s)}\right]$ попарно несовместных событий $A^{(k)}[i_1^{(s)},\ldots,i_k^{(s)}]$, $i_1^{(s)}=1,\ldots,r^{(1,s)},\ldots,$ $i_k^{(s)}=1,\ldots,r^{(k,s)}(i_1^{(s)},\ldots,i_{k-1}^{(s)})$.

На рис.1 приведена схема дерева $T^{(0,1,2,3)}$ с агрегированными вершинами B_1, B_n, B_N, $B_1=A^{(3)}[1,i_1,i_2]\cup A^{(3)}[i_1,1,1]$, $B_n=A^{(3)}[i_1,1,r^{(3)}(i_1,1)]\cup A^{(3)}[i_1,r^{(2)}(i_1),1]\cup A^{(3)}[r^{(1)},1,1]$,
$B_N=A^{(3)}[i_1,r^{(2)}(i_1),i_3]\, A^{(3)}[r^{(1)},i_2,1]\cup A^{(3)}[r^{(1)},r^{(2)}(r^{(1)}),r^{(3)}(r^{(1)},r^{(2)}(r^{(1)}))]$.

Далее мы будем одновременно интерпретировать все узлы построенного дерева $T^{(0,1,\ldots,k)}$ и как состояния некоторой системы, и как события, предполагая при этом, что для некоторых пар событий $(A^{(j-1)}[i_1,\ldots,i_{j-1}],\ A^{(j)}[i_1,\ldots,i_j])$ определены условные вероятности $p^{(j-1,j)}(i_{j-1},i_j)=P(A^{(j)}[i_1,\ldots,i_j]//A^{(j-1)}[i_1,\ldots,i_{j-1}])$, которые, в свою очередь, могут быть интерпретируемы как переходные вероятности, т. е. вероятности перехода $(A^{(j-1)}[i_1,\ldots,i_{j-1}]\to A^{(j)}[i_1,\ldots,i_j])$ из состояния $A^{(j-1)}[i_1,\ldots,i_{j-1}]$ в состояние $A^{(j)}[i_1,\ldots,i_j]$.

Построение системы таких условных (переходных) вероятностей начнем с элементарного дерева $T^{(0,1)}$. Для вершин $A^{(1)}[1],\ldots,A^{(1)}[r^{(1)}]$ этого дерева определены неотрицательные *переходные вероятности* $p^{(0,1)}(i_1)=P(A^{(1)}[i_1]//A^{(0)})$, $p^{(0,1)}(1)+\ldots+p^{(0,1)}(r^{(1)})=1$, где $p^{(0,1)}(i_1)$ есть вероятность того, что произойдет событие $A^{(1)}[i_1]$ при условии, что произошло начальное событие $A^{(0)}$, $i_1=1,\ldots,r^{(1)}$.

На каждом следующем этапе j, $k\geq j\geq 2$ построения дерева $T^{(0,1,\ldots,k)}$, когда появляются элементарные деревья $T^{(j-1,j)}(i_{j-1},i_j)$, вводятся неотрицательные условные вероятности $p^{(j-1,j)}(i_1,\ldots,i_j)=P(A^{(j)}[i_1,\ldots,i_j]//A^{(j-1)}[i_1,\ldots,i_{j-1}])$, где $p^{(j-1,j)}(i_1,\ldots,i_j)$ есть вероятность осуществления события $A^{(j)}[i_1,\ldots,i_j]$ при условии, что произошло событие $A^{(j-1)}[i_1,\ldots,i_{j-1}]$, $i_{j-1}=1,\ldots,r^{(j-1)}(i_1,\ldots,i_{j-2})$, $i_j=1,\ldots,r^{(j)}(i_1,\ldots,i_{j-1})$. Полагая, что вероятность $p^{(j-1,j)}(i_1,\ldots,i_j)$ перехода $(A^{(j-1)}[i_1,\ldots,i_{j-1}]\to A^{(j)}[i_1,\ldots,i_j])$ не зависит от вероятности $p^{(j-2,j-1)}(i_1,\ldots,i_{j-1})$ перехода $(A^{(j-2)}[i_1,\ldots,i_{j-2}]\to A^{(j-1)}[i_1,\ldots,i_{j-1}])$ (т. е., полагая, что события $A^{(0)},\ldots,A^{(j-1)}[i_1,\ldots,i_{j-1}]$, $A^{(j)}[i_1,\ldots,i_j]$ образуют простую цепь Маркова), получаем формулу

$$\begin{aligned}p^{(0,1,\ldots,j)}(i_1,\ldots,i_j)&=P(A^{(1)}[i_1]//A^{(0)})\cdot P(A^{(2)}[i_1,i_2]//A^{(1)}[i_1])\cdot\ldots\cdot P(A^{(j)}[i_1,\ldots,i_j]//A^{(j-1)}[i_1,\ldots,i_{j-1}])=\\&=p^{(0,1)}(i_1)\cdot p^{(1,2)}(i_1,i_2)\cdot\ldots\cdot p^{(j-1,j)}(i_1,\ldots,i_j)\end{aligned}\tag{1}$$

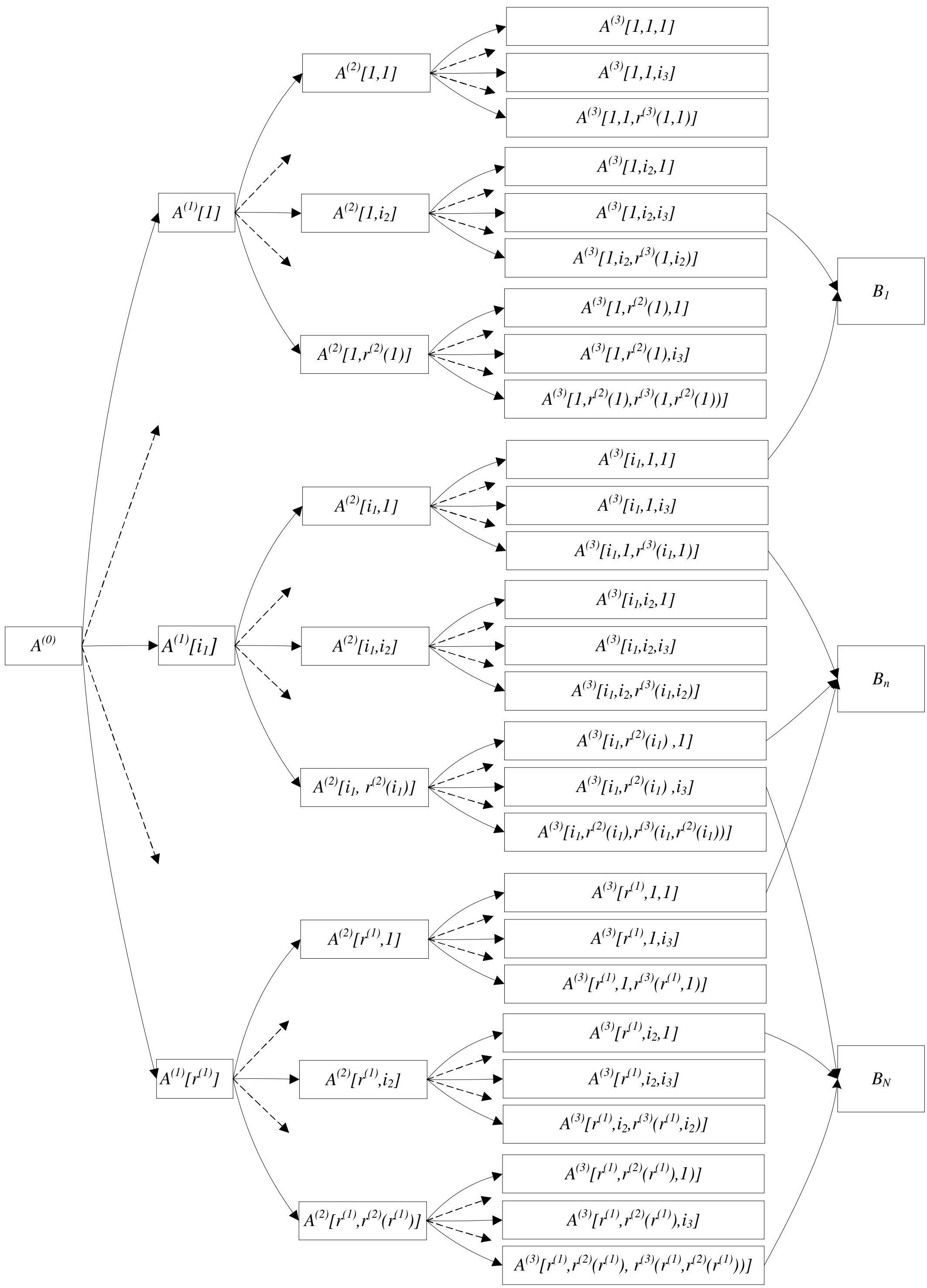

Рис 1. Дерево событий с агрегированными конечными вершинами.

для вычисления вероятности $p^{(0,1,\dots,j)}(i_1,\dots,i_j)$ осуществления перехода $(A^{(0)} \to \dots \to A^{(j)}[i_1,\dots,i_j])$ от начала $A^{(0)}$ дерева $T^{(0,1,\dots,k)}$ к его вершине $A^{(j)}[i_1,\dots,i_j]$.

Вероятность $P(B_n)=p_n^{(B)}$ составного события B_n можно вычислить по формуле

$$p_n^{(B)} = P(B_n) = P\left(\bigcup_{s=1}^{S_n} A^{(k)}\left[i_1^{(s)},\dots,i_k^{(s)}\right]\right) = \sum_{s=1}^{S_n} p^{(0,1,\dots,k)}\left(i_1^{(s)},\dots,i_k^{s}\right), \qquad (2)$$

где $i_1^{(s)}= 1,\dots, r^{(1,s)}, \dots , i_k^{(s)}= 1,\dots, r^{(k,s)}(i_1^{(s)},\dots,i_k^{(s)}), n=1,\dots,N$.

Очевидные модификации формул (1), (2) позволяют вычислить вероятности любых комбинаций событий, составляющих построенное дерево событий $T^{(0,1,\dots,k)}$.

Дерево событий с рандомизированными переходными вероятностями

Предположим теперь, что в распоряжении исследователя имеется экспертная информация относительно переходных вероятностей $p^{(j-1,j)}(i_1,\dots,i_j)$, $i_j=1,\dots,r^{(j)}(i_1,\dots,i_{j-1})$, $j=1,\dots,k$ для k-уровневого дерева $T^{(0,1,\dots,k)}$.

Рассмотрим одно элементарное дерево событий $T^{(j-1,j)}(i_{j-1},i_j)$ с корневым элементом $A^{(j-1)}[i_1,\dots,i_{j-1}]$ и с $r^{(j)}(i_1,\dots,i_{j-1})$ непосредственно следующими событиями $A^{(j)}[i_1,\dots, i_{j-1},1]\dots,A^{(j)}[i_1,\dots, i_{j-1},r^{(j)}(i_1,\dots,i_{j-1})]$. Введем теперь упрощенные обозначения: число событий – $r=r^{(j)}(i_1,\dots,i_{j-1})$, альтернативы – $A_s=A^{(j)}[i_1,\dots, i_{j-1},s]$, вероятности – $p_s= p^{(j-1,j)}(i_1,\dots,i_{j-1},s)$, $s=1,\dots, r^{(j)}(i_1,\dots,i_{j-1})$.

Пусть каждый источник сведений предоставляет исследователю два вида информации относительно вероятностей $p_1,\dots,p_r$: ординальная (нечисловая) информация OI, которая может быть формализована с помощью системы равенств и неравенств $OI=\{p_i>p_l,\ p_u=p_v;\ i,l,u,v=1,\dots,r\}$, и интервальная (неточная) информация II, которую можно описать с помощью системы интервалов $[a_i,b_i]$, $0 \le a_i \le b_i$, $i=1,\dots,r$, для вероятностей $p_1,\dots,p_r$. Вполне возможно, что экспертной информации I будет недостаточно, чтобы точно определить значения вероятностей $p_1,\dots,p_r$, поэтому информацию I мы будем считать неполной. Таким образом, в распоряжении исследователя есть нечисловая, неточная и неполная информация $I=OI\cup II$ (ННН-информация), которую можно представить с помощью системы равенств и неравенств $I=\{p_i>p_l,\ p_u=p_v;\ a_t\le p_t\le b_t;\ i,l,u,v,t=1,\dots,r\}$ для вероятностей $p_1,\dots,p_r$ альтернатив $A_1,\dots,A_r$. Опыт работы с экспертами и специальные психометрические исследования показывают, что ННН-информация является, как правило единственным видом надежной экспертной информации, доступной исследователю[6].

Зафиксируем ННН-информацию I о вероятностях $p_1,\dots,p_r$ альтернатив $A_1,\dots,A_r$ и рассмотрим множество $P(r;I)$ *всех допустимых* (с точки зрения информации I) векторов вероятностей $p=(p_1,\dots,p_r)$. Множество $P(r;I)$ является подмножеством множества $P(r)=\{p=(p_1,\dots,p_r)\in R^r\colon p_i\ge 0,\ p_1+\dots+p_r =1\}$ всех векторов вероятностей. Следуя основной идее Т. Байеса о рандомизации неопределенности, будем моделировать неопределенный выбор вектора $p=(p_1,\dots,p_r)$ из множества $P(r;I)$ при помощи случайного выбора этого вектора. В результате получаем случайный вектор вероятностей, $\tilde{p}(I)=(\tilde{p}_1(I),\dots,\tilde{p}_r(I))$, $\tilde{p}_1(I)+\dots+\tilde{p}_r(I)=1$, равномерно распределенный на множестве $P(r;I)$. Построенную случайную величину $\tilde{p}_i(I)$ можно рассматривать как случайную оценку вероятности p_i с точки зрения информации I. Естественной усредненной оценкой вероятности альтернативы A_i является математическое ожидание $\mu_i(I)=E\tilde{p}_i(I)$ случайной вероятности $\tilde{p}_i(I)$. Стандартное отклонение $\sigma_i(I)=\sqrt{D\tilde{p}_i(I)}$ будем интерпретировать как меру точности полученной оценки. Для дальнейших расчетов нам также потребуется рассчитать ковариацию $\mathrm{cov}(\tilde{p}_i(I),\tilde{p}_j(I))=c_{ij}(I)$ случайных вероятностей $\tilde{p}_i(I),\tilde{p}_j(I), i,j=1,\dots,r, i\ne j$.

В более сложных ситуациях, когда информация поступает от нескольких экспертов, можно использовать механизм построения рандомизированных оценок вероятностей альтернатив по ННН-информации, получаемой из источников различной надежности, достоверности и значимости[7].

Возвращаясь к построенному k-уровневому дереву $T^{(0,1,\ldots,k)}$, предположим, что в распоряжении исследователя имеется ННН-информация I, которая формализована в виде системы равенств и неравенств для всех переходных вероятностей $p^{(j-1,j)}(i_1,\ldots,i_j)$, $i_1=1,\ldots,r^{(1)},\ldots,$ $i_j=1,\ldots,r^{(j)}(i_1,\ldots,i_{j-1})$, $j=1,\ldots,k$. В этом случае мы можем рассматривать случайную величину $\tilde{p}^{(j-1j)}(i_1,\ldots,i_j;I)$ как рандомизированную оценку вероятности $p^{(j-1,j)}(i_1,\ldots,i_j)$ в соответствии с информацией I, математическое ожидание $\mu^{(j-1,j)}(i_1,\ldots,i_j;I)$ – как усредненную оценку вероятности $A^{(j)}[i_1,\ldots,i_j]$, стандартное отклонение $\sigma^{(j-1,j)}(i_1,\ldots,i_j;I)$ – как меру точности полученной оценки. Таким образом, решается задача оценивания всех переходных вероятностей по ННН-информации I.

Подставляя в формулу (1) вместо вероятностей $p^{(0,1)}(i_1)$, $p^{(1,2)}(i_1, i_2)$, ... , $p^{(k-1,k)}(i_1,\ldots,i_k)$ их рандомизированные оценки, получаем случайную оценку

$$\tilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}(i_1,\ldots,i_k;I)=\tilde{p}^{(0,1)}(i_1;I)\cdot\tilde{p}^{(1,2)}(i_1,i_2;I)\cdot\ldots\cdot\tilde{p}^{(k-1,k)}(i_1,\ldots,i_k;I) \tag{3}$$

вероятности $p^{(0,1,\ldots,k)}(i_1,\ldots,i_k)$ перехода из начала $A^{(0)}$ дерева событий $T^{(0,1,\ldots,k)}$ к конечному событию $A^{(k)}[i_1,\ldots,i_k]$.

Из формулы (3) можно вывести формулы для математического ожидания

$$E\tilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}(i_1,\ldots,i_k;I)=\mu^{(0,1,\ldots,k)}(i_1,\ldots,i_k;I)=\mu(i;I)=\prod_{j=1}^{k}\mu^{j-1,j}(i_1,\ldots,i_j;I), \tag{4}$$

дисперсии

$$D\tilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}(i_1,\ldots,i_k;I)=\prod_{j=1}^{k}\left(\mu^{j-1,j}(i_1,\ldots,i_j;I)^2+\sigma^{j-1,j}(i_1,\ldots,i_j;I)^2\right)-\prod_{j=1}^{k}\mu^{j-1,j}(i_1,\ldots,i_j;I)^2 \tag{5}$$

и ковариации

$$\begin{gathered}\operatorname{cov}\left(\tilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}\left(i_1,\ldots,i_j,i_{j+1}^{(1)},\ldots,i_k^{(1)};I\right),\tilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}\left(i_1,\ldots,i_j,i_{j+1}^{(2)},\ldots,i_k^{(2)};I\right)\right)=\\ =\prod_{r=1}^{j}\left(\mu^{r-1,r}(i_1,\ldots,i_r;I)^2+\sigma^{r-1,r}(i_1,\ldots,i_r;I)^2\right)\times\\ \times\left(c^{(j-1)}\left(i_1,\ldots,i_{j-1};j^{(1)},j^{(2)};I\right)+\mu^{r-1,r}\left(i_1,\ldots,i_j,i_{j+1}^{(1)};I\right)\mu^{r-1,r}\left(i_1,\ldots,i_j,i_{j+1}^{(2)};I\right)\right)\times\\ \times\prod_{r=j+2}^{k}\left(\mu^{r-1,r}\left(i_1,\ldots,i_j,i_{j+1}^{(1)},\ldots,i_r^{(1)};I\right)\mu^{r-1,r}\left(i_1,\ldots,i_j,i_{j+1}^{(2)},\ldots,i_r^{(2)};I\right)\right)-\\ -\prod_{r=1}^{j}\mu^{r-1,r}(i_1,\ldots,i_r;I)^2\prod_{r=j+1}^{k}\left(\mu^{r-1,r}\left(i_1,\ldots,i_j,i_{j+1}^{(1)},\ldots,i_r^{(1)};I\right)\mu^{r-1,r}\left(i_1,\ldots,i_j,i_{j+1}^{(2)},\ldots,i_r^{(2)};I\right)\right),\end{gathered} \tag{6}$$

случайной оценки вероятности $p^{(0,1,\ldots,k)}(i_1,\ldots,i_k)$, где $\mu^{(j-1,j)}(i_1,\ldots,i_j;I)$ – математическое ожидание, $s^{(j-1,j)}(i_1,\ldots,i_j;I)$ – стандартное отклонение случайной оценки, $c^{(j-1)}(i_1,\ldots,i_{j-1},j^{(1)},j^{(2)};I)$ —ковариация случайных оценок переходных вероятностей $p^{(j-1,j_{(1)})}(i_{1,\ldots,i_{j(1)}})$, $p^{(j-1,j_{(2)})}(i_1,\ldots,i_{j_{(2)}})$.

Если необходимо агрегировать некоторые конечные вершины дерева событий $T^{(0,1,\ldots,k)}$, то из формул (2), (4)–(6) можно вывести формулы для математических ожиданий

$$E\tilde{p}_n^{(B)}(I)=E\left[\sum_{s=1}^{S_n}\tilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}\left(i_1^{(s)},\ldots,i_k^{(s)};I\right)\right]=\sum_{s=1}^{S_n}E\tilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}\left(i_1^{(s)},\ldots,i_k^{(s)};I\right)=\sum_{s=1}^{S_n}\mu\left(i^{(s)};I\right) \tag{7}$$

и дисперсий
$$D\widetilde{p}_n^{(B)}(I)=\sum_{s,t=1}^{S_n}\mathrm{cov}\left(\widetilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}\left(i_1^{(s)},\ldots,i_k^{(s)};I\right),\widetilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}\left(i_1^{(t)},\ldots,i_k^{(t)};I\right)\right)=$$
$$=\sum_{s=1}^{S_n}D\widetilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}\left(i_1^{(s)},\ldots,i_k^{(s)};I\right)-2\sum_{\substack{s,t=1,\\ s<t}}^{S_n}\mathrm{cov}\left(\widetilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}\left(i_1^{(s)},\ldots,i_k^{(s)};I\right),\widetilde{p}^{(0,1,\ldots,k)}\left(i_1^{(t)},\ldots,i_k^{(t)};I\right)\right) \quad (8)$$

случайных оценок вероятностей $p_1^{(B)},\ldots,p_N^{(B)}$ агрегированных событий $B_1,\ldots,B_N$ соответственно.

Таким образом, в рамках построенной модели *дерева событий с рандомизированными переходными вероятностями* (ДСРПВ) выведены формулы (4)–(8), позволяющие вычислять оценки вероятностей любых комбинаций событий, составляющих дерево исследуемых событий $T^{(0,1,\ldots,k)}$.

Применение модели ДСРПВ для оценки вероятности финансового кризиса

В данном разделе мы приведем пример применения теоретико-игровой интерпретации разработанной модели ДСРПВ для оценки вероятностей альтернатив развития финансового рынка некоторой условной страны. Хотя страна, фигурирующая в нашем иллюстративном примере, является условной, моделирование динамики ее финансовой системы строится на вполне реальных данных. Эти данные изложены в рабочих материалах Национального бюро экономических исследований США[8]. В указанных материалах на примере Таиланда, Малайзии, Австралии, Южной Африки и других стран анализируется влияние крупных зарубежных инвестиционных фондов на стабильность курса национальной валюты и тем самым на стабильность финансового рынка в целом.

Рассмотрим простейший вариант теоретико-игровой модели динамики сложной системы «финансовый рынок страны», определяемый деревом событий, представленным на рис. 2.

Пусть первым игроком выступает правительство страны (далее — «правительство»), которое в начале игры (событие $A^{(0)}$) может выбрать два варианта действий – допустить зарубежные инвестиционные фонды на национальный финансовый рынок (событие $A^{(1)}[1]$) или не допустить (событие $A^{(1)}[2]$).

С помощью различных «действий» второго игрока мы хотим отразить возможность разных состояний финансово-экономической конъюнктуры (курс национальной валюты, параметры денежной и фискальной политики, показатели дефицита / профицита бюджета, структура портфеля государственных займов, стоимость обслуживания государственного долга и т. д.[9]), влияющей на поведение крупных инвесторов на финансовом рынке рассматриваемой страны. Предположим, что такой условный игрок (далее, согласно принятой в теории игр терминологией, — «природа») может «выбрать» одно из двух своих состояний – благоприятствующее инвестициям зарубежных фондов в долгосрочные ценные бумаги рассматриваемой страны (события $A^{(2)}[i_1,1]$, $i_1=1,2$) или не благоприятствующее (события $A^{(2)}[i_1,2]$, $i_1=1,2$).

Пусть в качестве третьего игрока выступает совокупность крупных зарубежных инвестиционных фондов (далее — «инвестор»), работающих на финансовом рынке рассматриваемой страны и имеющих возможность выбрать одно из следующих действий. Во-первых, «инвестор» может вложить значительную часть своих денежных ресурсов в долгосрочные ценные бумаги (события $A^{(3)}[i_1,i_2,1]$, $i_1,i_2=1,2$), что, естественно, стабилизирует

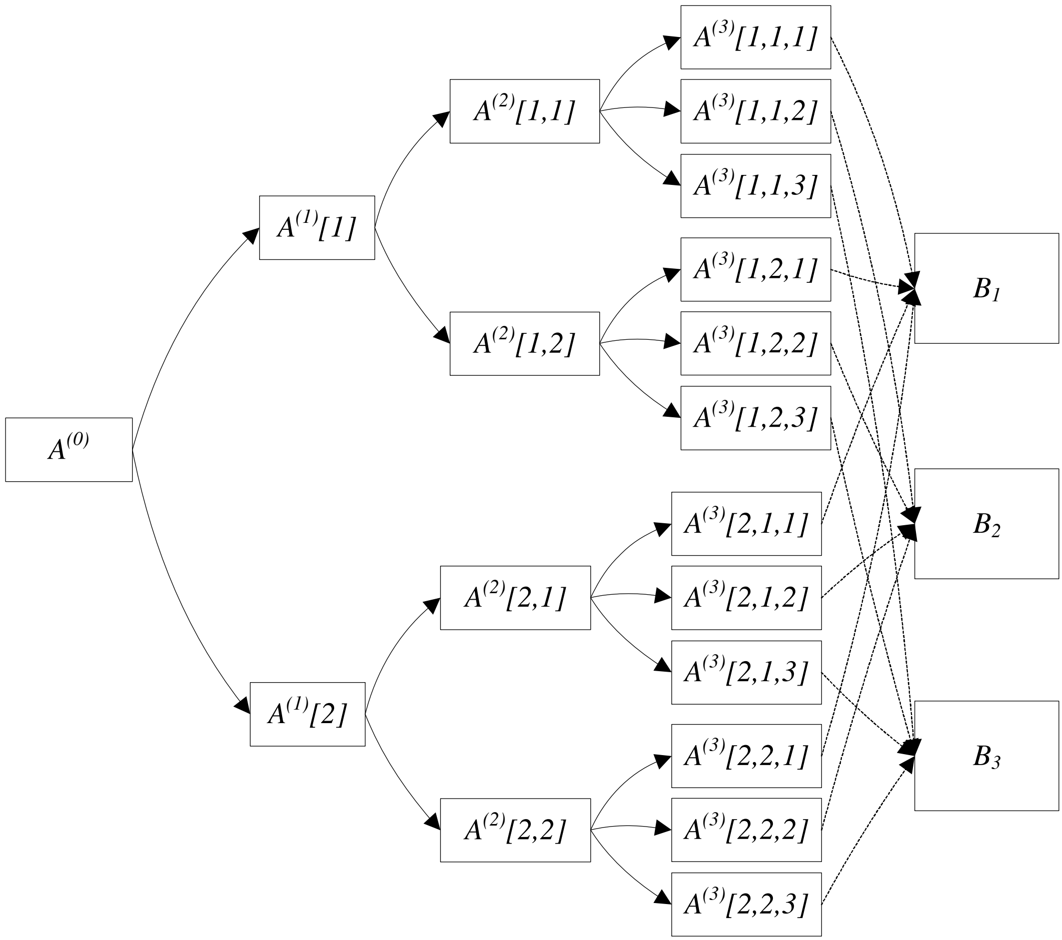

Рис. 2. Теоретико-игровое дерево событий на финансовом рынке.

финансовый рынок страны и укрепит курс национальной валюты. Во-вторых, зарубежные инвестиционные фонды могут закупить весь спектр ценных бумаг (краткосрочных, среднесрочных и долгосрочных) в пропорциях, обеспечивающих status quo на финансовом рынке рассматриваемой страны (события $A^{(3)}[i_1,i_2,2]$, $i_1,i_2=1,2$). И, наконец, в-третьих, «инвестор» может полностью вложить все свои ресурсы в большое число краткосрочных ценных бумаг, быстро зафиксировать прибыль и немедленно вывести практически все свои капиталы с финансового рынка рассматриваемой страны (события $A^{(3)}[i_1,i_2,3]$, $i_1,i_2=1,2$) с разрушительными для этого рынка последствиями (дефолт по государственным финансовым обязательствам, резкое падение курса национальной валюты и т. д.).

Предположим далее, что эксперт, ориентирующийся на указанные ранее рабочие материалы Национального бюро экономических исследований, фиксирует имеющуюся у него ННН-информацию обо всех переходных вероятностях на дереве событий в виде следующих систем равенств и неравенств:

$I^{(0,1)}=\{p^{(0,1)}(1)>p^{(0,1)}(2)\}$,

$I^{(1,2)}(1)=\{p^{(1,2)}(1,2)> p^{(1,2)}(1,1);\ p^{(1,2)}(1,2)\geq 0,6\}$,
$I^{(1,2)}(2)=\{p^{(1,2)}(2,2)> p^{(1,2)}(2,1);\ p^{(1,2)}(2,1)\ \geq 0,75\}$,
$I^{(2,3)}(1,1)=\{p^{(2,3)}(1,1,1)> p^{(2,3)}(1,1,2)> p^{(2,3)}(1,1,3);\ p^{(2,3)}(1,1,1)\geq 0.7;\ p^{(2,3)}(1,1,3)\leq 0,1\}$,
$I^{(2,3)}(2,1)=\{p^{(2,3)}(2,1,1)> p^{(2,3)}(2,1,2)> p^{(2,3)}(2,1,3);\ p^{(2,3)}(2,1,1)\geq 0.5\}$,
$I^{(2,3)}(1,2)=\{p^{(2,3)}(1,2,3)> p^{(2,3)}(1,2,2)> p^{(2,3)}(1,2,1);\ p^{(2,3)}(1,2,3)\geq 0.7;\ p^{(2,3)}(1,2,1)\ \leq 0,1\}$,
$I^{(2,3)}(2,2)=\{p^{(2,3)}(2,2,1)< p^{(2,3)}(2,2,3)\}$.

Используя экспертную ННН-информацию I в качестве входных данных для системы поддержки принятия решений (СППР) АСПИД-3W[10], можно получить оценки $\mu^{(0,1)}(i_1)$, $\mu^{(1,2)}(i_1,i_2)$, $\mu^{(2,3)}(i_1,i_2,i_3)$ переходных вероятностей $p^{(0,1)}(i_1)$, $p^{(1,2)}(i_1,i_2)$, $p^{(2,3)}(i_1,i_2,i_3)$, $i_1,i_2=1,2;\ i_3=1,2,3$. Эти оценки приведены в таблице вместе со значениями показателей точности, измеряемых стандартными отклонениями $\sigma^{(0,1)}(i_1)$, $\sigma^{(1,2)}(i_1,i_2)$, $\sigma^{(2,3)}(i_1,i_2,i_3)$ соответственно.

Далее, на основе формул (4)–(6) можно получить математические ожидания $\mu(1,1,1;I),\ldots$, $\mu(2,2,3;I)$, стандартные отклонения $\sigma(1,1,1;I),\ldots,\sigma(2,2,3;I)$ и ковариации случайных оценок вероятностей $p^{(0,1,2,3)}(1,1,1;I),\ldots,p^{(0,1,2,3)}(2,2,3;I)$ перехода от начального состояния $A^{(0)}$ ко всем двенадцати конечным событиям $A^{(3)}[1,1,1],\ldots,A^{(3)}[2,2,3]$, соответствующим альтернативным исходам игры на финансовом рынке рассматриваемой страны. Эти исходы игры объединяются в три агрегированных события:

$B_1= A^{(3)}[1,1,1]\cup A^{(3)}[1,2,1]\cup A^{(3)}[2,1,1]\cup A^{(3)}[2,2,1]$,
$B_2= A^{(3)}[1,1,2]\cup A^{(3)}[1,2,2]\cup A^{(3)}[2,1,2]\cup A^{(3)}[2,2,2]$,
$B_3= A^{(3)}[1,1,3]\cup A^{(3)}[1,2,3]\cup A^{(3)}[2,1,3]\cup A^{(3)}[2,2,3]$,

каждое из которых соответствует определенному конечному состоянию финансового рынка рассматриваемой страны:

B_1 – устойчивость финансового рынка возрастает;
B_2 – устойчивость финансового рынка сохраняется;
B_3 – наступает кризис финансового рынка.

Формулы (7)–(8) позволяют найти оценки (математические ожидания $\mu^{(0,1,2,3)}(B_n)$) вероятностей $p^{(0,1,2,3)}(B_n)$ агрегированных исходов B_n, $n=1,2,3$, игры, соответствующей дереву

Оценки переходных вероятностей и значения показателей их точности

Вероятность	Оценка	Точность	Вероятность	Оценка	Точность
$p^{(0,1)}(1)$	0,750	0,144	$p^{(0,1)}(2)$	0,400	0,041
$p^{(1,2)}(1,1)$	0,250	0,144	$p^{(2,3)}(1,2,2)$	0,155	0,066
$p^{(1,2)}(1,2)$	0,800	0,129	$p^{(2,3)}(1,2,3)$	0,805	0,072
$p^{(1,2)}(2,1)$	0,125	0,085	$p^{(2,3)}(2,1,1)$	0,665	0,120
$p^{(1,2)}(2,2)$	0,875	0,085	$p^{(2,3)}(2,1,2)$	0,255	0,104
$p^{(2,3)}(1,1,1)$	0,805	0,072	$p^{(2,3)}(2,1,3)$	0,080	0,060
$p^{(2,3)}(1,1,2)$	0,155	0,066	$p^{(2,3)}(2,2,1)$	0,166	0,117
$p^{(2,3)}(1,1,3)$	0,040	0,030	$p^{(2,3)}(2,2,2)$	0,333	0,235
$p^{(2,3)}(1,2,1)$	0,040	0,030	$p^{(2,3)}(2,2,3)$	0,500	0,204

событий, представленному на рис. 2, и определить точность (стандартные отклонения $\sigma^{(0,1,2,3)}(B_n)$) этих оценок:

$\mu^{(0,1,2,3)}(B_1)\pm \sigma^{(0,1,2,3)}(B_1)=0,202 \pm 0,079;$

$\mu^{(0,1,2,3)}(B_2)\pm \sigma^{(0,1,2,3)}(B_2)=0,197 \pm 0,082;$

$\mu^{(0,1,2,3)}(B_3)\pm \sigma^{(0,1,2,3)}(B_3)=0,600 \pm 0,064.$

Таким образом, построенное по объединенной экспертной ННН-информации дерево событий $T^{(0,1,2,3)}$ с рандомизированными переходными вероятностями $\tilde{p}^{(1,2)}(i_1,i_2)$, $\tilde{p}^{(2,3)}(i_1,i_2,i_3)$, $i_1,i_2=1,2;\ i_3=1,2,3$ позволяет обнаружить достаточно большие шансы (почти 6 против 4) наступления кризиса на финансовом рынке рассматриваемой страны.

Заключение

Нетрудно заметить, что разработанный метод оценки вероятностей альтернатив развития сложных систем на основе построения ДСРПВ предполагает выявление *представлений* эксперта о значениях вероятностей появления альтернатив. Иными словами, возможная интерпретация метода ДСРПВ лежит в рамках концепции «рационализации представлений», выдвинутой известным английским экономистом Дж. М. Кейнсом в его знаменитой работе 1921 г.[11] и получившей строгое математическое обоснование в статьях Б. Купмана[12]. Указанный подход Кейнса к оценке «степени рациональной веры» (*degree of rational believe*) эксперта в осуществление тех или иных событий начинает в настоящее время привлекать внимание исследователей как адекватная схема для описания поведения субъектов финансово-экономической деятельности[13]. Согласно этому подходу, хотя и невозможно исключить субъективный элемент в экспертных оценках вероятности, обычно носящих к тому же нечисловой характер, но можно сделать эти оценки «рациональными» за счет адекватного учета всей имеющейся у эксперта информации и придания этой информации строгой логической формы[14].

В рамках концепции «рационализации» субъективных оценок вероятностей вопрос о соответствии этих оценок «объективным» частотам появления альтернатив и не ставится, но косвенно сам факт рационализации представлений эксперта о возможных путях развития сложных финансово-экономических систем увеличивает, несомненно, степень обоснованности этих оценок. К тому же в ситуациях, когда требуется экспертное прогнозирование поведения таких систем на значительно удаленном горизонте времени, сомнительно само существование упомянутых «объективных» частот, так как в этом случае отсутствует стационарность процесса развития, являющаяся необходимым условием для возможности проверки соответствия вероятностей эмпирически наблюдаемым частотам.

---

[1] *Рябинин И. А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПб., 2000; *Соложенцев Е. Д.* Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и технике. СПб., 2004; *Dugan J., Sullivan K., Coppit D.* Developing a high-quality software tool for fault tree analysis // Proc. IEEE Intern. Symposium on Software Reliability Engineering. Boca Raton (Florida), 1999. P. 222–231; *Fragole J., Minarik J., Railsback J.* Fault Tree Book. Washington, 2002; *Sullivan K., Coppit D., Dugan J.* The Galileo Fault Tree Analysis Tool // Proc. 29th Annual International Symposium on Fault-Tolerant Computing. Madison (Wisconsin), 1999. P. 232–235.

[2] *Катькало В. С.* Теория стратегического управления: этапы развития и основные парадигмы. СПб., 2002; *Cioffi-Revilla C.* Politics and Uncertainty. Cambridge, 1998; *Prahalad C., Hamel G.* Strategy as a field of study // Strategic Management Journal. 1994. Vol. 15. N 1. P. 5–16; *Williamson O.* Strategy research: governance and competence perspectives // Strategic Management Journal. 1999. Vol. 20. N 12. P. 1087–1108.

[3] *Bayes T.* An essay towards solving a problem in the doctrine of chances // Biometrika. 1958. Vol. 45. P. 296–315. (Reprinted from Philosophical Transactions of London Royal Society, 1763).

[4] *Маркова Е. В., Маслак А. А.* Рандомизация и статистический вывод. М., 1986; *Хованов Н. В.* 1) Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб., 1996; 2) Математические модели риска и неопределенности. СПб., 1998; 3) Три типа математических моделей неопределенности // Измерительная техника. 2005. № 9. С. 39–44.

[5] *Горшков А. С., Мясников А. В., Хованов Н. В.* Прогнозирование эволюции сложных систем в условиях неопределенности // Материалы 6-й международной конференции «Анализ, прогнозирование и управление в сложных системах». Т. 2. СПб., 2005. С. 168–174; *Колесников Г. И., Федотов Ю. В., Хованов Н. В.* Оценка вероятностей альтернатив развития фондового рынка в условиях дефицита числовой информации // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2005. Сер. 10. Вып. 2. С. 151–160; *Макаров А. В., Федотов Ю. В., Хованов Н. В.* Байесовская модель оценки вероятностей альтернативных состояний финансово-экономической среды реализации инвестиционных проектов // Материалы Международной научной конференции «Экономическая наука: проблемы теории и методологии». Секции 5–10. СПб., 2002. С. 141–142; *Хованов Н. В.* Оценка сложных экономических объектов и процессов в условиях неопределенности: К 95-летию метода сводных показателей А. Н. Крылова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5. Экономика. 2005. Вып. 1. С. 138–144; *Хованов Н. В., Федотов Ю. В.* Рациональная оценка вероятностей альтернатив состояния среды осуществления проектов – основа эффективного стратегического менеджмента // Материалы конференции «Концепции и инструменты эффективного менеджмента». СПб., 2005. С. 31–32.

[6] *Ларичев О.И., Мошкович Е.М.* Качественные методы принятия решений. М., 1996; *Biswas T.* Decision-Making under Uncertainty. London, 1997; *Hogarth R.* Cognitive processes and the assessment of subjective probability distributions // Journal of American Statistical Association. 1975. Vol. 70. P. 271–289; *Tversky A., Kahneman D.* Judgment under uncertainty: heuristics and biases // Science. 1974. Vol. 46. P. 1124–1131.

[7] *Hovanov N. V., Yudaeva M. S., Kotov N. V.* Alternatives probabilities estimation by means of non-numeric, non-exact and non-complete information obtained from sources of different reliability // Proceedings of the International Scientific School «Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems». SPb., 2005. P. 271–277.

[8] *Corsetti G., Pesenti P., Roubini N.* The role of large players in currency crises // NBER Working Paper. 2001. N 8303.

[9] *Davis E.* Debt, Financial Fragility and Systemic Risk. Oxford, 1995; *Summers H. S.* International Financial Crises: Causes, Prevention and Cures // The American Economic Review. 2000. Vol. 90. P. 1–16.

[10] *Колесов Д. Н., Михайлов М. В., Хованов Н. В.* Оценка сложных финансово-экономических объектов с использованием системы поддержки принятия решений АСПИД-3W. СПб., 1998.

[11] *Keynes J.* A Treatise on Probability. London, 1921.

[12] *Koopman B.* 1) The axioms and algebra of intuitive probability // Annals of Mathematics. 1940. Vol. 41. P. 269–292; 2) The bases of probability // Bulletin of the American Mathematical Society. 1940. Vol. 46. P. 763–774.

[13] *Макашева Н. А.* Вероятностная логика Дж. М. Кейнса и базисные понятия экономической теории // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы экономической науки и хозяйственной практики». СПб., 2004. С. 192–194.

[14] *Кайберг Г.* Вероятность и индуктивная логика. М., 1978.

Статья поступила в редакцию 2 ноября 2006 г.