СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

С. А. Вавилов, К. Ю. Ермоленко

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ

В опубликованной ранее работе авторов[1] рассматривалась задача стохастического управления инвестиционным портфелем, содержащим один вид ценных бумаг и наличные деньги. Настоящее исследование посвящено обобщению полученных результатов на многомерный случай, т. е. построению управления инвестиционным портфелем, включающим бумаги произвольного количества видов и наличные деньги. Основной результат статьи связан с доказанным теоретически и подтвержденным экспериментально мультипликативным эффектом, когда наличие многомерности обеспечивает существенное увеличение прибыли в комбинированном портфеле по сравнению с суммарной прибылью независимо управляемых по каждому из отдельно взятых видов бумаг портфелей. Дополнительно в статье проводится экспериментальная проверка адекватности выбранной модели управления и, кроме того, теоретическое обоснование используемой модели ценообразования.

Перейдем к построению системы управления, занимающей длинную позицию для инвестиционного портфеля, включающего в себя несколько видов ценных бумаг и наличные деньги.

Введем в рассмотрение понятие стоимости портфеля, включающего в себя n видов ценных бумаг и определяемую f_t на момент времени t. Указанная величина определяется соотношением

Сергей Анатольевич ВАВИЛОВ — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры общей математики и информатики математико-механического факультета СПбГУ. Окончил математико-механический факультет ЛГУ (1978). С 1991 по 1997 г. работал в Университете г. Делфт (Нидерланды). Автор 75 научных и методических работ. Область научных интересов — методы прикладного функционального анализа, теория бифуркаций, управление инвестиционным портфелем на основе стохастической модели ценообразования.

Константин Юрьевич ЕРМОЛЕНКО — канд. экон. наук, ст. преподаватель кафедры экономической кибернетики СПбГУ. В 2000 г. окончил экономический факультет СПбГУ. В 2004 г. защитил кандидатскую диссертацию. Сфера научных интересов — управление инвестиционным портфелем, оценка бизнеса, инструментальные методы организации торговых систем. Автор пяти научных публикаций.

$$f_t = \sum_{i=1}^{n} a_{ti} x_{ti} + w_t \,, \qquad (1)$$

где a_{ti} – количество ценных бумаг i-го вида; w_t – количество денег в портфеле; x_{ti}– текущая цена бумаги i-го вида.

Зададим торговую стратегию, определяющую на каждый момент времени количество бумаг в портфеле, следующей зависимостью:

$$d\, f_t = \sum_{i=1}^{n} a_{ti}\, d\, x_{ti} + l(t, x_{t1}, \ldots, x_{tn}) d\, t\,. \qquad (2)$$

Построение управляющей функции $l(t, x_{t1}, \ldots, x_{tn})$, обеспечивающей асимптотический во времени рост стоимости капитала, является конечной целью решения поставленной задачи, при этом прирост стоимости капитала $\widetilde{p}_t$ вдоль наблюдаемых значений цен $\widetilde{x}_{t1}, \ldots, \widetilde{x}_n$ задается формулой

$$\widetilde{p}_t = \widetilde{f}_t - \int_0^t l(t, \widetilde{x}_{\tau 1}, \ldots, \widetilde{x}_{\tau n}) d\tau\,, \qquad (3)$$

где $\widetilde{f}_t$ – величина стоимости портфеля вдоль наблюдаемого значения цен, при этом интеграл в правой части соотношения (3) понимается в обычном римановском смысле и соответствует общему объему инвестируемых в портфель денежных средств. Асимптотический во времени рост стоимости капитала означает выполнение условия $\widetilde{p}_t \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Пусть выполняются следующие предположения:

1. Изменение цены i-й бумаги x_{ti} следует стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx_{ti} = c_{ti} x_{ti} dt + \sigma_{ti} x_{ti} dW_{ti}, \qquad (4)$$

где W_{ti} – независимые стандартные винеровские процессы, а мгновенные изменения трендовой составляющей цены c_{ti} и значения волатильностей σ_{ti} в шумовых составляющих цен необязательно должны быть наблюдаемыми и, соответственно, подлежать идентификации. Здесь предполагается, что σ_{ti} есть только функции времени, не зависящие от x_{ti}.

2. Наблюдаемые значения цен $\widetilde{x}_{ti}$ на любом заранее заданном временнóм интервале должны быть отделены от нуля некоторой отличной от нуля постоянной.

3. Волатильности σ_{ti} могут становиться меньше некоторого строго положительного порогового значения только на ограниченных промежутках времени.

4. В случае необходимости существует возможность дополнительно инвестировать в портфель требуемые денежные средства.

Суть утверждения заключается в том, что при выполнении условий 1–4 можно построить управление портфелем, обеспечивающее асимптотический во времени рост капитала, при этом существенно отметить, что само управление $l(t, \widetilde{x}_{t1}, \ldots, \widetilde{x}_n)$ не зависит явным образом от коэффициентов c_{ti} и σ_{ti} из соотношения (4).

Отметим, что сформулированные выше предположения 3 и 4 будут в дальнейшем уточнены на количественном уровне.

Перейдем к доказательству сформулированного утверждения.

Применяя к функции $f_t = f(t, x_{t1}, \ldots, x_{tn})$, где x_{ti} удовлетворяют (4), формулу Ито и сравнивая ее с соотношением (2), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{t\,i}^{2}x_{t\,i}^{2}\,\frac{\partial^{2} f}{\partial x_{t\,i}^{2}}=l(t,x_{t1},\ldots,x_{t\,n}),\tag{5}$$

$$a_{t\,i}=\frac{\partial f}{\partial x_{t\,i}}.\tag{6}$$

Для удобства вычислений, без потери общности и с использованием соответствующей нормировки, вытекающей из второго предположения, будем полагать, что значения $\widetilde{x}_{t\,i}$ принадлежат интервалу $(1, \beta_i)$, где $\beta_i > 1$. В дальнейшем границы указанной открытой полосы будем называть соответственно нижним и верхним порогом чувствительности.

Введем в рассмотрение $\varphi_i(x)$, которая является собственной функцией, соответствующей первому собственному числу λ_{1i} следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\frac{d^{2}\varphi_{i}}{d\,x^{2}}+\frac{\lambda_{1i}^{2}}{x^{2}}\varphi_{i}=0,\tag{7}$$

$$\varphi_{i}(1)=\varphi_{i}'(\beta_{i})=0.\tag{8}$$

Управление $l(t, x_{t1}, \ldots, x_{tn})$ зададим через вспомогательную функцию $v(t,\widetilde{x}_{t1},\ldots,\widetilde{x}_{n})$

$$l(t,x_{t1},\ldots,x_{t\,n})=\frac{v(t,\widetilde{x}_{t1},\ldots,\widetilde{x}_{t\,n})}{\prod\limits_{i=1}^{n}\varphi_{i}(\widetilde{x}_{t\,i})}\prod_{i=1}^{n}\varphi_{i}(x_{t\,i}).\tag{9}$$

Таким образом, $l(t,\widetilde{x}_{t1},\ldots,\widetilde{x}_{t\,n})=v(t,\widetilde{x}_{t1},\ldots,\widetilde{x}_{t\,n})$. На начальный момент управления $t = 0$ портфель будем считать пустым, т. е. не содержащим ни денег, ни бумаг и, соответственно,

$$f(0, x_{t1}, \ldots, x_{tn}) = 0.\tag{10}$$

Кроме того, зададим следующие граничные условия:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{t\,i}}\to 0 \text{ при } x_{t\,i}\to\beta_{i},\tag{11}$$

$$f(t, x_{t1}, \ldots, x_{ti}, \ldots, x_{tn}) \to 0 \text{ при } x_{ti} \to 1.\tag{12}$$

В силу соотношения (6) выполнение граничного условия (11) означает, что система управления стремится полностью избавиться от тех акций, цена которых приближается к верхнему порогу чувствительности. Для пояснения граничного условия (12) выпишем соотношение, непосредственно вытекающее из формул (1), (2),

$$w_{t}=-\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t}x_{\tau+d\tau,i}\,d\,a_{\tau i}+\int_{0}^{t}l(\tau,x_{\tau1},\ldots,x_{\tau n})d\tau.\tag{13}$$

Второе слагаемое в данной зависимости соответствует инвестируемому денежному потоку, первое слагаемое, взятое со знаком минус, характеризует изменение стоимости акций с учетом осуществляемых спекуляций. Поэтому смысл граничного условия (12) заключается в том, что при стремлении цены одного из видов ценных бумаг к нижней границе полосы чувствительности все высвободившиеся в результате спекуляций наличные деньги вкладываются в данный вид ценных бумаг.

Записывая решение смешанной задачи (10)–(12) для уравнения (5), где $l(t, x_{t1}, \ldots, x_{tn})$ определяется соотношением (9), получим

$$f(t, x_{t1}, \ldots, x_{tn}) = \int_0^t e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_{1i}^2\int_\tau^t \sigma_{si}^2 ds} \cdot \frac{v(\tau, \widetilde{x}_{\tau 1}, \ldots, \widetilde{x}_{\tau n})}{\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(\widetilde{x}_{\tau i})} d\tau \cdot \prod_{i=1}^{n}\varphi_i(x_{ti}), \tag{14}$$

при этом $\varphi(x_{ti}) = \sqrt{x_{ti}}\sin(b_i \ln x_{ti}), \lambda_{1i}^2 = b_i^2 + \frac{1}{4}$, а b_i является минимальным строго положительным корнем уравнения

$$tg(b_i \ln \beta_i) = -2b_i. \tag{15}$$

Отметим, что в соотношениях (14), (15) используется явный вид решения задачи (7), (8), при этом выбор соответствующих первых собственных чисел обеспечивает отличие от нуля соответствующих собственных функций внутри указанных интервалов.

Введем в рассмотрение новую управляющую функцию $u(t, x_{t1}, \ldots, x_{tn})$, исходя из соотношения

$$u(t, x_{t1}, \ldots, x_{tn}) = e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_{1i}^2\int_\tau^t \sigma_{si}^2 ds} \cdot v(t, x_{t1}, \ldots, x_{tn}), \tag{16}$$

и, используя зависимость (3), непосредственно получим формулу, определяющую изменение стоимости капитала вдоль наблюдаемых значений цен $\widetilde{x}_{t1}, \ldots, \widetilde{x}_{tn}$:

$$\widetilde{p}_t = \int_0^t \frac{u(\tau, \widetilde{x}_{\tau 1}, \ldots, \hat{x}_{\tau n})}{\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(\widetilde{x}_{\tau i})} d\tau \cdot \prod_{i=1}^{n}\varphi_i(\widetilde{x}_{ti}) - \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_{1i}^2\int_\tau^t \sigma_{si}^2 ds} \cdot u(\tau, \widetilde{x}_{\tau 1}, \ldots, \widetilde{x}_{\tau n}) d\tau. \tag{17}$$

Кроме того, исходя из формулы (6), нетрудно определить количество бумаг i-го вида, которое необходимо иметь в портфеле при наблюдаемых значениях цен

$$\widetilde{a}_{ti} = \int_0^t \frac{u(\tau, \widetilde{x}_{\tau 1}, \ldots, \widetilde{x}_{\tau n})}{\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(\widetilde{x}_{\tau i})} d\tau \cdot \frac{\partial}{\partial x_{ti}} \prod_{i=1}^{n}\varphi_i(x_{ti}) \Big|_{x_{t1}=\widetilde{x}_{t1}, \ldots, x_{tn}=\widetilde{x}_{tn}}. \tag{18}$$

Заметим, что если управление $u(t, \widetilde{x}_{t1}, \ldots, \widetilde{x}_{n})$ является любой ограниченной неотрицательной ступенчатой функцией, принимающей значения меньше некоторого порогового только на ограниченных промежутках времени, то первое слагаемое в формуле (17) положительное и неограниченно растет с ростом t, в то время как второе по модулю не превышает некоторой постоянной величины в силу ограничения, налагаемого на волатильности ценных бумаг, и вытекающего из третьего предположения.

Обратим внимание, что в соотношение (18) не входят не только c_{ti} из уравнения (4), но и волатильности σ_{ti}. Таким образом, для построения искомого управления нет необходимости идентифицировать указанные величины, хотя, как видно из соотношения (17), увеличение волатильностей ведет к существенному росту стоимости капитала.

Таким образом, на основе сделанных выше предположений 1–4 построена система управления инвестиционным портфелем, обладающая заданными свойствами.

Перейдем к рассмотрению вопроса о необходимом количестве инвестируемых средств и времени выхода системы управления на режим насыщения. Напомним, что режим насыщения обусловлен тем, что за счет прибыли, полученной в результате многочисленных спекулятивных сделок, совершаемой системой управления, эта система становится самодостаточной, т. е. не требует привлечения дополнительных денежных средств для продолжения дальнейшей работы.

Как было показано в одной из опубликованных ранее работ авторов[2], накопленные волатильности с ростом времени для широкого класса высоколиквидных ценных бумаг могут аппроксимироваться линейными зависимостями

$$\int_o^t \sigma_{\tau i}^2 d\tau \approx \alpha_i \cdot t, \tag{19}$$

где α_i – априори известные на момент времени $t = 0$ величины.

Отметим, что выполнение соотношений (19) по существу является результатом известной эргодической теоремы Биркхофа–Хинчина [3].

Поскольку второе слагаемое в формуле (17) представляет собой поток инвестируемых денежных средств, то на основании соотношений (19) данная величина, при постоянной функции управления u_0, может быть определена, исходя из следующей зависимости:

$$V \approx \frac{2 \cdot u_0}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{1i}^2 \cdot \alpha_i}. \tag{20}$$

При этом характерный временной масштаб выхода на режим насыщения задается формулой

$$T \approx \frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{1i}^2 \cdot \alpha_i}. \tag{21}$$

Таким образом, задаваемое время инвестирования определяет через λ_{1i}^2, в силу формулы (21), выбор ширины коридоров для бумаг каждого вида. В свою очередь, значение управляющей функции u_0 вычисляется исходя из формулы (20), при задаваемом объеме инвестируемых средств V.

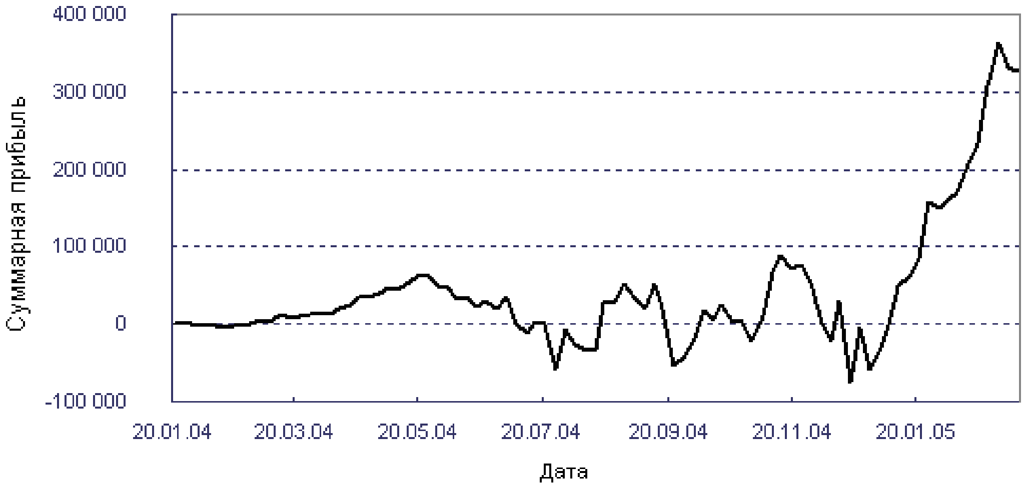
Заметим, что увеличение числа видов ценных бумаг в портфеле, согласно формуле (17), ведет к более интенсивному наращиванию стоимости капитала.

Анализируя соотношение (17), нетрудно также заметить, что при выполнении условий 1–4 и дополняющих их количественных зависимостей (19), можно ввести в рассмотрение понятие гарантированного времени выхода T^* системы управления на положительную доходность, при этом имеет место оценка

$$T^* < \frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{1i}^2 \cdot \alpha_i} \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\beta_i}. \tag{22}$$

В качестве примера рассмотрим два инвестиционных портфеля, первый из которых содержит только акции РАО «ЕЭС России», второй – «Сургутнефтегаза». В каждый портфель инвестируется по 1 млн руб. в течение года. Исходя из соотношений (20), (21) в случае, когда портфель содержит только один вид ценных бумаг ($n = 1$), рассчитывается ширина полосы, определяющая нижний и верхний пороги чувствительности, а также значение управляющей функции u_0 для каждой акции в отдельности. Как было показано в упоминавшейся выше статье[4], накопленная волатильность на временных интервалах, близких к одному году, для широкого класса высоколиквидных акций является, по существу, инвариантом и составляет около 20%. Тогда ценовой коридор по каждой отдельной бумаге соответствуют 50% отклонения от значения начальной цены акции. При этом величина $T^* < 1{,}7$ года характерна для инвестиционного портфеля, содержащего только один вид акций.

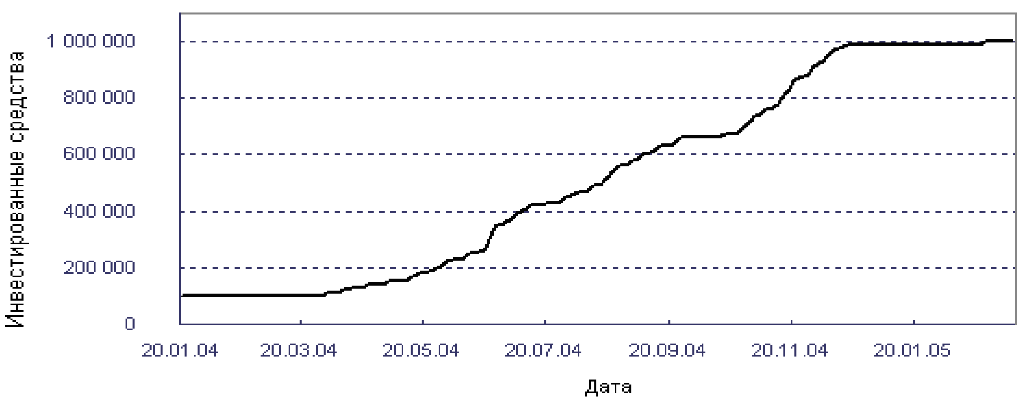
На рис. 1 приведен график суммарной прибыли, получаемой в результате работы двух независимых систем управления за период с 20 января 2004 по 11 марта 2005 г.



Источник: Котировки РТС (www.vts.ru).

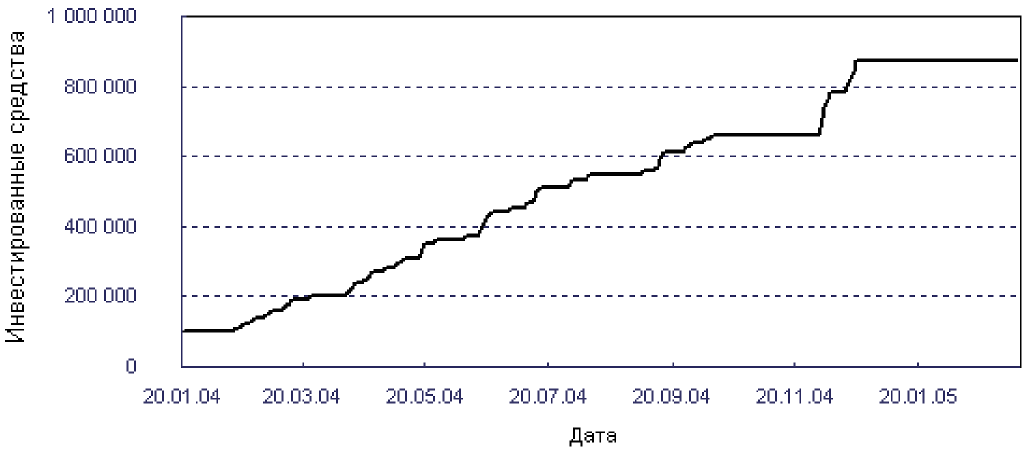
Рис. 1. Динамика суммарной прибыли, получаемой в результате работы двух независимых систем управления за период с 20 января 2004 по 11 марта 2005 г.

На рис. 2, 3 изображена динамика поступления инвестируемых средств соответственно в первый и второй портфели.



Источник: Там же.

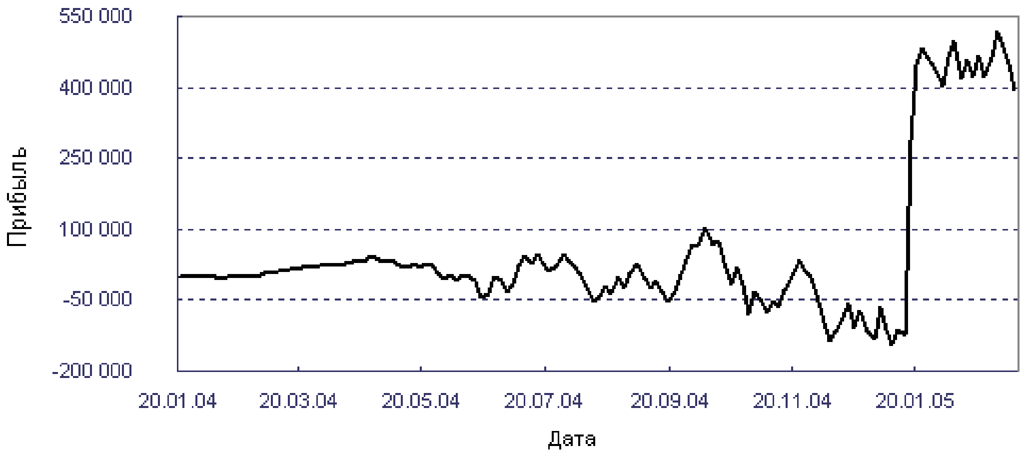
Рис. 2. Динамика поступления инвестируемых средств в портфель, состоящий из акций РАО «ЕЭС России».



Источник: Там же.

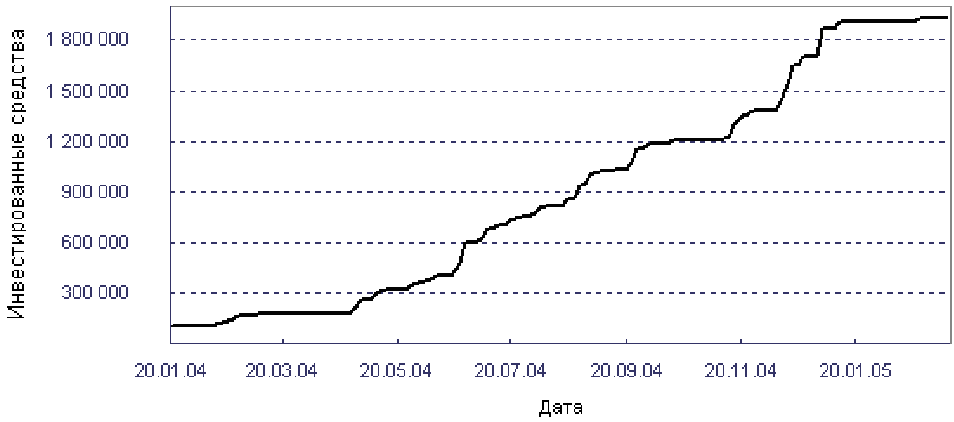
Рис. 3. Динамика поступления инвестируемых средств в портфель, состоящий из акций «Сургутнефтегаза».

Наряду с указанными портфелями введем в рассмотрение третий портфель, содержащий два вида упомянутых акций и управляемый на основе схемы, предложенной в настоящей работе. Нижние и верхние пороги чувствительности выбираются такими же, как и в каждом из двух независимо управляемых портфелей. Объем инвестиций составляет при этом 2 млн руб., и значение управляющей функции u_0 рассчитывается на основе формулы (20). На рис. 4 представлен график изменения прибыли, получаемой в результате работы системы управления, рассмотренной в настоящей статье. Соответственно на рис. 5 изображена динамика поступления инвестируемых средств в описанный комбинированный портфель.



Источник: Там же.

Рис. 4. Динамика изменения прибыли, получаемой в результате работы системы управления комбинированным портфелем.



Источник: Там же.

Рис. 5. Динамика поступления инвестируемых средств в комбинированный портфель.

Сравнивая представленные рисунки, нетрудно убедиться, что в соответствии с теоретическими выводами величина прибыли комбинированного портфеля существенно больше, чем в случае, когда деньги инвестируются поровну в каждый из двух независимо управляемых портфелей.

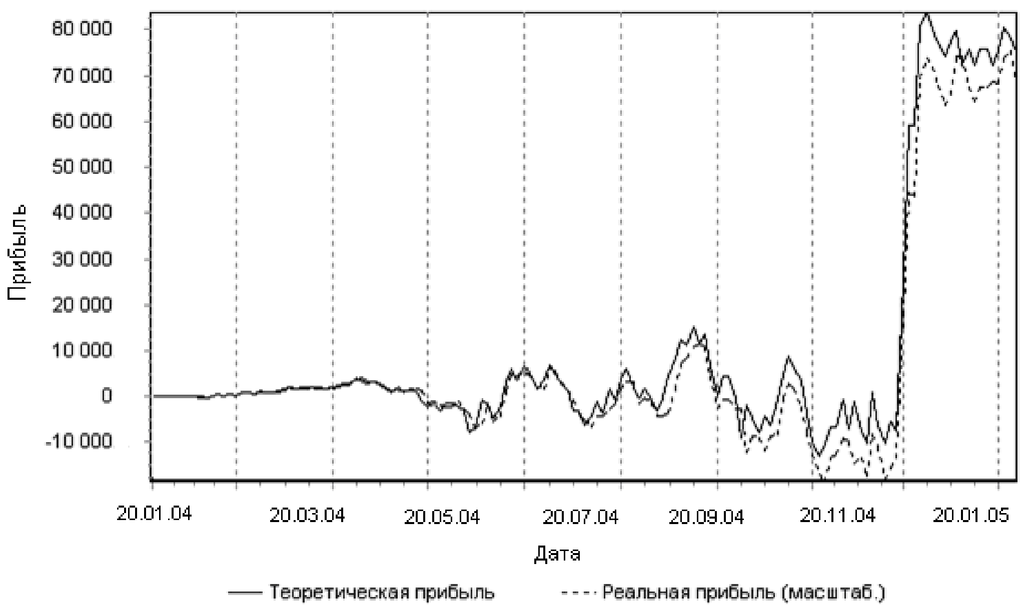
В таблице приведен протокол работы системы управления комбинированным портфелем за период с 23 января по 27 марта 2004 г.

Протокол работы системы управления комбинированным портфелем за период с 23 января по 27 марта 2004 г.

Дата	Время	Цена EESR	Портфель EESR	Цена SNGS	Портфель SNGS	Чистая прибыль	Доходность, % год	Свободные средства
1	2	3	4	5	6	7	8	9
23.01.04	15:30	9.364	0	17.34	0	0.00	0.00	90 254.00
26.01.04	11:45	9.110	300	17.00	400	–227.13	–2.07	79 810.00
29.01.04	17:00	9.348	700	17.31	800	181.04	1.65	68 349.60
01.02.04	12:00	9.045	1000	17.05	1300	–470.50	–3.12	57 007.10
04.02.04	16:30	8.780	1500	16.71	1700	–1452.13	–9.64	43 383.10
07.02.04	17:30	8.919	2100	16.37	2200	–1923.05	–8.26	28 503.30
10.02.04	11:45	8.463	2300	16.08	3000	–3849.96	–15.61	16 908.90
13.02.04	11:45	8.605	3100	16.34	3300	–2563.99	–8.91	9447.40
16.02.04	15:30	8.795	3800	16.94	4000	548.34	1.67	5635.40
19.02.04	13:00	9.080	4600	17.25	4400	3214.83	8.09	3469.40
22.02.04	16:45	8.822	4800	16.97	5000	573.54	1.40	2202.70
25.02.04	12:00	9.220	5500	17.23	5300	4107.20	8.33	1457.60
29.02.04	14:00	8.965	5300	16.93	6200	906.35	1.84	7187.90
03.03.04	17:30	9.114	6000	18.44	6500	11 555.21	21.63	19 325.90

1	2	3	4	5	6	7	8	9
06.03.04	16:00	8.956	7500	17.72	5100	6708.82	11.13	8042.70
09.03.04	11:45	9.100	7700	18.58	6200	13 135.42	19.18	13 768.70
12.03.04	14:15	8.897	8500	18.86	5500	12 929.10	16.85	10 742.40
15.03.04	12:30	8.740	9900	19.24	5000	13 256.19	16.98	11 099.70
18.03.04	11:45	8.883	11400	19.65	4300	16 649.70	20.96	13 253.10
21.03.04	15:15	9.026	11600	20.00	4100	19 731.87	24.83	16 350.10
24.03.04	16:15	9.184	11700	20.32	3900	22 830.71	28.25	24 282.90
27.03.04	14:00	9.003	11500	20.02	3600	19 637.27	22.75	4372.10

Для проверки адекватности выбранной модели управления сравним значение теоретической прибыли, получаемой на основе формулы (17), и реальной прибыли, вычисляемой исходя из фактического числа акций, имеющихся в портфеле, в соответствии с формулой (18). Отметим, что теоретическая и реальная прибыли вычисляются на основе цен, масштабированных для акций каждого отдельного вида на соответствующий нижний порог чувствительности. На рис. 6 дано сравнение масштабированной теоретической и реальной прибыли, получаемой при управлении комбинированным портфелем.



Источник: Там же.

Рис. 6. Динамика изменения масштабированной теоретической и реальной прибыли, получаемой в результате работы системы управления комбинированным портфелем.

Отметим, что адекватность выбранной модели управления подтверждается не только сравнением теоретических и экспериментальных данных. Так, предположение о том, что волатильности σ_{ti} не зависят от случайных процессов x_{ti}, имеет определенное теоретическое обоснование, приводимое ниже.

Зададимся моделью ценообразования $x_t = \exp(h_t)$[5], где x_t соответствует цене отдельно взятой акции, а h_t представляет собой процесс авторегрессии любого конечного порядка. Рассмотрим непрерывный аналог данной модели. Зададим h_t в следующем виде:

$$h_t = c_1 h_{t-\Delta} + c_2 h_{t-2\Delta} + \ldots + c_n h_{t-n\Delta} + \varepsilon_t, \tag{23}$$

где ε_t – белый шум, а Δ – заданный временно́й интервал. Как хорошо известно[6], соотношение (23) может быть переписано в конечных разностях

$$a_1 \nabla^n h_t + a_2 \nabla^{n-1} h_t + \ldots + a_n \nabla h_t + a_{n+1} h_t = \varepsilon_t \ , \tag{24}$$

где a_i – некоторые коэффициенты, определяемые через c_i, при этом $\nabla^{k+1} h_t = \nabla(\nabla^k h_t)$ и $\nabla h_t = h_t - h_{t-\Delta}$.

Запишем непрерывный аналог разностного уравнения (24)

$$a_1 \Delta^n \frac{d^n h_t}{d t^n} + a_2 \Delta^{n-1} \frac{d^{n-1} h_t}{d t^{n-1}} + \ldots + a_n \Delta \frac{d h_t}{d t} + a_{n+1} h_t = \varepsilon_t \ . \tag{25}$$

Решение задачи Коши для уравнения (25) на интервале $[0, t]$ может быть представлено в виде

$$h_t = \varphi(t) + \int_0^t G(t-s) d W_s \ , \tag{26}$$

где $\varphi(t)$ – некоторая детерминированная функция, а $G(t–s)$ – неслучайная передаточная функция, представляющая собой подынтегральное выражение в соответствующем интеграле Ито. Зафиксируем t и для удобства введем новое обозначение $F(s) = G(t–s)$. Поскольку $F(s)$ — детерминированная функция, имеет место формула интегрирования по частям для интеграла Ито в выражении (26). Таким образом, справедливы следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \int_0^t G(t-s) d W_s &= \int_0^t F(s) d W_s = F(t) W_t - \int_0^t W_s \dot{F}(s) d s = \\ &= G(0) W_t + \int_0^t W_s \dot{G}(t-s) d s = G(0) \int_0^t d W_s + \int_0^t W_s \dot{G}(t-s) d s \ , \end{aligned} \tag{27}$$

которые приводят к соотношению

$$d\left[\int_0^t G(t-s) d W_s\right] = G(0) d W_t + W_t \dot{G}(0) d t + \left\{\int_0^t W_s \ddot{G}(t-s) d s\right\} d t \ . \tag{28}$$

Окончательно, с использованием выражения (23), получаем стохастическое представление для h_t

$$d h_t = \left[\dot{\varphi}(t) + W_t \dot{G}(0) + \int_0^t W_s \ddot{G}(t-s) d s\right] d t + G(0)\, d W_t \ . \tag{29}$$

Применяя к зависимости $x_t = \exp(h_t)$ формулу Ито, непосредственно получим

$$d x_t = \left\{\left[\dot{\varphi}(t) + W_t \dot{G}(0) + \int_0^t W_s \ddot{G}(t-s)\, d s\right] + \frac{1}{2} G^2(0)\right\} x_t d t + G(0) x_t d W_t \ , \tag{30}$$

что в точности соответствует стохастическому уравнению

$$dx_t = c_t x_i dt + \sigma_t x_t dW_t, \tag{31}$$

где $c_t = \dot{\varphi}(t) + W_t \dot{G}(0) + \int\limits_0^t W_s \ddot{G}(t-s)\, d\, s + \frac{1}{2} G^2(0)\, ,\, \sigma_t = G(0).$

Таким образом, волатильность σ_t не зависит от W_t и, следовательно, от x_t. Соответственно, когда изменяется число слагаемых или коэффициентов, входящих в уравнение авторегрессии, имеет место скачкообразное изменение значения волатильности $\sigma_t = G(0)$.

При практической реализации стохастических систем управления, по существу, возникает два вида рисков:

1) выход значений цен акций, составляющих инвестиционный портфель, из априори выбранных ценовых коридоров;

2) существенное уменьшение суммы значений накопленных волатильностей по всем акциям, составляющим инвестиционный портфель, на всем периоде инвестирования, ниже априори заданной величины.

В случае нереализации указанных рисков за временной период, определяемый формулой (22), происходит гарантированный выход системы управления на положительную доходность.

Эффективное управление рисками при этом осуществляется приобретением опционов пут со страйками, близкими к значению нижних порогов чувствительности.

В заключение отметим, что наличие в портфеле нескольких видов ценных бумаг приводит к определенной специфике при реализации соответствующего управления на практике. Дело в том, что в случае, когда система управления совершает операции одновременно с несколькими видами акций, возможно выставление только рыночных заявок (*market order*). Иначе возможна ситуация, когда заявка будет выполнена по одному виду ценных бумаг и не будет выполнена по другому, что может привести к сбою работы системы управления в целом.

---

[1] *Вавилов С. А., Ермоленко К. Ю.* Стохастические системы управления портфелем ценных бумаг // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2003. Вып. 3. С. 113–122.

[2] *Вавилов С. А., Ермоленко К. Ю.* Метод определения одной интегральной характеристики для волатильностей в задаче управления инвестиционным портфелем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2005. Вып. 1. С. 114–124.

[3] *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М., 1969. С. 341.

[4] *Вавилов С. А., Ермоленко К. Ю.* Метод определения одной интегральной характеристики для волатильностей в задаче управления инвестиционным портфелем.

[5] *Vavilov S. A.* On the probability models to control the investor portfolio. In the book: Asymptotic methods in probability and statistics with applications. Boston; Basel; Berlin, 2001. P. 535–546.

[6] *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов: прогноз и управление. М., 1972.

Статья поступила в редакцию 19 апреля 2007 г.