Г. И. Колесников, Н. В. Хованов, М. С. Юдаева

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КВАНТИФИКАЦИИ НЕЧИСЛОВЫХ ОЦЕНОК ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ*

Введение

При изложении модели «выбора портфеля» (*portfolio selection*) Г. Марковица многие популярные учебники предлагают использовать для оценки параметров модели только «объективные» статистические данные о доходности ценных бумаг, входящих в портфель[1]. Однако сам Марковиц в основополагающей работе «Выбор портфеля», публикацию которой в 1952 г. некоторые исследователи считают «моментом рождения современной финансовой экономики»[2], предлагал учитывать более широкий круг источников информации, используемой при построении оптимального портфеля, включающий в себя (наряду с «объективными» числовыми статистическими данными) и экспертную информацию, не имеющую числового характера. В этой связи предлагается использовать метод рандомизированной квантификации нечисловой экспертной информации, разработанный с учетом известной концепции «рационального ожидания» (*rational belief*) Дж. М. Кейнса (см. раздел 1), для создания методики построения рациональных

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-06-80271).

Геннадий Исаакович КОЛЕСНИКОВ — канд. экон. наук, член совета директоров ОАО «Нортгаз». Область научных интересов – математические модели и методы оценки, мониторинга и прогнозирования показателей финансово-экономической среды реализации долгосрочных и крупномасштабных корпоративных проектов.

Николай Васильевич ХОВАНОВ — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета СПбГУ. Область научных интересов – стохастические модели риска и неопределенности, теория и методы принятия решений в условиях дефицита информации.

Мария Сергеевна ЮДАЕВА — ассистент кафедры экономической кибернетики экономического факультета СПбГУ. Область научных интересов – общая теория принятия финансово-экономических решений, теоретико-игровые модели экономических процессов.

оценок ожидаемой доходности и риска ценных бумаг (см. раздел 2), позволяющей практически формировать оптимальный портфель с учетом как статистической, так и экспертной информации (см. раздел 3).

1. Рандомизированная квантификация ординальных вероятностей

Где-то с середины XIX в. по настоящее время научное мировоззрение переживает настоящую «стохастическую революцию», проявляющуюся в широком проникновении теоретико-вероятностных и статистических методов практически во все отрасли теоретических и прикладных исследований. Не осталась в стороне от этого обращения к анализу случайных, неопределенных и вероятностных аспектов изучаемых явлений и экономическая наука — многие зарубежные и отечественные исследователи говорят о «революции неопределенности», происходящей в экономике[3], и отмечают большую роль в ней «Трактата о вероятности» Дж. М. Кейнса[4].

В основе концепции Кейнса лежит трактовка вероятности как меры рационального ожидания (*rational belief*) субъекта экономической деятельности тех или иных событий, определенного объемом и характером знаний, которыми обладает данный субъект. Поскольку ожидание появления случайных событий обусловлено знаниями субъекта, постольку даваемые им оценки меры рационального ожидания являются, так сказать, «субъективными вероятностями» (*subjective probabilities*) соответствующих событий. Однако поскольку предполагается, что субъект пользуется рациональными методами выведения оценок степеней (*degrees*) рационального ожидания случайных событий из данного объема своих знаний, постольку между знаниями субъекта и получаемыми оценками вероятностей имеет место объективное логическое отношение. Если дополнительно предположить, что и сами знания, которыми обладает субъект, включают в себя объективные сведения о возможных шансах появления интересующих его событий, то степень объективности даваемых оценок «субъективных вероятностей» может ничуть не уступать степени объективности оценок, получаемых только на основе «объективных» статистических данных, обрабатываемых методами, субъективно выбираемыми статистиками.

Существенными особенностями «субъективной вероятности», отмечаемыми Кейнсом, являются ее нечисловой характер и возможная несравнимость между собой оценок вероятности различных событий. Признание нечислового характера рациональных ожиданий (*non-numerical expectations*) означает фактически, что хотя можно сравнивать различные степени $P(A)$, $P(B)$ рационального ожидания некоторых событий A, B соответственно, но эти субъективные вероятности $P(A)$, $P(B)$ не являются действительными числами и не допускают никаких арифметических операций. Более того, не все субъективные вероятности являются сравнимыми (*comparable*), т. е. для них затруднительно установить отношения «больше» или «меньше».

Эти представления Кейнса о неизмеримости (*immeasurability*) по шкале действительных чисел и о возможной несравнимости (*incomparability*) субъективных вероятностей (т. е. оценок степени рационального ожидания случайных событий) позднее были представлены в виде соответствующих аксиом[5]. Требования этих аксиом можно сформулировать в терминах современной теории шкал измерения качества, сказав, что оценка степени рационального ожидания событий производится субъектом по шкале частичного порядка (по ординальной шкале) $(X;\succ)$, представляющей собой множество пунктов $X = \{x\}$, на котором задано отношение строгого порядка $\succ$[6]. Заметим, что отношение строгого частичного порядка $\succ$ всегда можно продолжить до отношения строгого линейного порядка $\overset{L}{\succ}$, удовлетворяющего для любых пунктов $x_1, x_2 \in X$ логическому соотношению $[x_1 \succ x_2] \Rightarrow [x_1 \overset{L}{\succ} x_2]$.

Часто бывает удобным моделировать абстрактное отношение строгого линейного порядка $x_1 \overset{L}{\succ} x_2$ между пунктами $x_1, x_2 \in X$ ординальной шкалы $(X; \overset{L}{\succ})$, отношением строгого неравенства $y_1 > y_2$ между числами y_1, y_2, взятыми из множества всех действительных чисел R^1. Указанное моделирование состоит в построении такого взаимно однозначного отображения $\varphi: X \to Y$ $(\varphi^{-1} : Y \to X)$ множества пунктов шкалы X и подмножества $Y \subseteq R^1$ множества действительных чисел R^1, что для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется соотношение $[x_1 \overset{L}{\succ} x_2] \Leftrightarrow [y_1 = \varphi(x_1) > y_2 = \varphi(x_2)]$. Процедуру построения такого ординального изоморфизма шкалы строгого линейного порядка $(X; \overset{L}{\succ})$ и шкалы «числового порядка» $(Y; >)$, $Y = \varphi(X) \subseteq R^1$, а также результат такого построения — отображение φ — называют квантификацией (арифметизацией, «оцифровкой», шкалированием путем установки числовых меток и т. д.) нечисловой шкалы $(X; \overset{L}{\succ})$ [7].

Любая квантификация $\varphi(x)$, $x \in X$, ординальной шкалы $(X; \overset{L}{\succ})$ может быть получена из любой другой квантификации $\psi(x)$ этой же шкалы при помощи возрастающей непрерывной функции $\xi : R^1 \to R^1$ путем суперпозиции $\varphi(x) = \xi(\psi(x))$. Таким образом, сравнительные оценки какого-либо качества, оцениваемого по ординальной шкале $(X; \overset{L}{\succ})$, определяются по числовой шкале типа $(Y; >)$ «с точностью до возрастающего непрерывного преобразования ξ».

Если задано только множество $\Phi = \{\varphi\}$ всех допустимых квантификаций шкалы линейного порядка $(X; \overset{L}{\succ})$, то у нас имеется неопределенность выбора конкретной квантификации φ из множества $\Phi = \{\varphi\}$. Эта неопределенность моделируется при помощи случайной (рандомизированной) квантификации $\tilde{\varphi}$, сопоставляющей каждой нечисловой градации $x \in X$ случайное число $\tilde{y} = \tilde{\varphi}(x) \in R^1$. Такая стохастическая квантификация ординальных шкал нашла широкое применение при решении многих теоретических и прикладных задач[8].

Для применения описанного выше метода рандомизированной квантификации к субъективным вероятностям, определяемым в рамках теории Дж. М. Кейнса, построим следующую цепочку рассуждений. Сначала воспользуемся представлением знания субъектом соотношений между нечисловыми градациями субъективных вероятностей в виде системы ограничений I, налагаемых на обычную числовую вероятность, определенную, например, аксиоматически. Такой подход вполне правомерен, так как обычно используемая аксиоматика вероятности является неполной и для однозначного числового определения значения вероятности случайного события необходимо ввести некоторый комплекс дополнительных условий[9]. Далее рассмотрим случайное испытание $\tilde{E}$, множество элементарных исходов $\Omega = \{\omega\}$ которого разбито на r попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_r$, образующих тем самым группу альтернативных событий (альтернатив): $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$; $A_1 \cup \ldots \cup A_r = \Omega$. Поставим задачу определения вероятностей $p_1, \ldots, p_r$ альтернатив $A_1, \ldots, A_r$ соответственно по информации I, определяемой знаниями субъекта.

Пусть имеется два вида информации относительно вероятностей $p_1, \ldots, p_r$: ординальная (нечисловая) информация OI, которая может быть формализована с помощью системы равенств и неравенств $OI = \{p_i > p_l, p_u = p_v;\ i, l, u, v = 1, \ldots, r\}$, и интервальная (неточная) информация II, которую можно описать с помощью системы интервалов $[a_i, b_i]$,

$0 \le a_i \le b_i$, $i = 1, \ldots, r$, для вероятностей $p_1, \ldots, p_r$. Зачастую экспертной информации I недостаточно для однозначного определения вероятностей $p_1, \ldots, p_r$, что позволяет говорить о неполной информации. Далее будем считать, что в распоряжении исследователя есть нечисловая, неточная и неполная информация $I = OI \cup II$ (ННН-информация), которую можно представить с помощью системы равенств и неравенств $I = \{p_i > p_l, p_u = p_v; a_t \le p_t \le b_t; i, l, u, v, t = 1, \ldots, r\}$ для вероятностей $p_1, \ldots, p_r$ альтернатив $A_1, \ldots, A_r$. Опыт работы с экспертами и специальные психометрические исследования показывают, что ННН-информация является, как правило, единственным видом надежной экспертной информации, доступной исследователю.

Рассмотрим множество $P(r; I)$ всех допустимых (с точки зрения информации I) векторов вероятностей $p = (p_1, \ldots, p_r)$. Множество $P(r; I)$ является подмножеством множества $P(r) = \{p = (p_1, \ldots, p_r) \in R^r : p_i \ge 0, p_1 + \ldots + p_r = 1\}$ всех возможных векторов вероятностей. Следуя идее о рандомизации неопределенности, будем моделировать неопределенный выбор вектора $p = (p_1, \ldots, p_r)$ из множества $P(r; I)$ при помощи случайного выбора этого вектора. Простейшим и наиболее часто используемым для моделирования полного отсутствия информации о случайном выборе элемента из множества является равномерное распределение, в пользу применения которого имеется много и теоретико-вероятностных аргументов[10]. В результате получаем случайный вектор вероятностей $\tilde{p}(I) = (\tilde{p}_1(I), \ldots, p_r(I)$, $\tilde{p}_1(I) + \ldots + \tilde{p}_r(I) = 1$, равномерно распределенный на множестве $P(r; I)$. Построенную случайную величину $\tilde{p}_i(I)$ можно рассматривать как случайную оценку вероятности p_i по информации I. В качестве числовой оценки вероятности p_i альтернативы A_i по ННН-информации I можно взять, например, математическое ожидание $\bar{p}_i(I) = E\,\tilde{p}_i(I)$ случайной величины $\tilde{p}_i(I)$. Различные варианты описанной схемы получения числовых оценок $\bar{p}_1(I), \ldots, \bar{p}_r(I)$ вероятностей альтернатив с использованием рандомизированной квантификации нечисловой, неточной и неполной информации I широко апробированы на многочисленных примерах решения различных прикладных задач[11].

Опишем кратко модификацию метода рандомизированной квантификации ННН-информации, которую можно будет использовать в следующем разделе для выбора оптимального портфеля ценных бумаг. Рассмотрим последовательность случайных испытаний $\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n$, имеющих непустые множества элементарных исходов $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(n)}$ соответственно. Для каждого множества элементарных исходов $\Omega^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$, задается его разбиение на альтернативные события $A^{(j)}[i_j]$, $i_j = 1, \ldots, r(j)$. Предполагается, что каждое событие $A^{(j)}[i_j]$, $i_j = 1, \ldots, r(j)$, $j = 1, \ldots, n$, имеет ненулевую вероятность $p^{(j)}(i_j) = P^{(j)}(A^{(j)}[i_j])$, которая не равна и единице: $0 < p^{(j)}(i_j) < 1$. Обозначим $p^{(j/1, \ldots, j-1)}(i_j/i_1, \ldots, i_{j-1}) = P(A^{(j)}[i_j] / A^{(1, \ldots, j-1)}[i_1, \ldots, i_{j-1}])$ вероятность появления в результате реализации случайного испытания $\tilde{E}^{(j)}$ события $A^{(j)}[i_j]$, при условии, что до этого в результате реализации случайных испытаний $\tilde{E}^{(1)}, \ldots, \tilde{E}^{(j-1)}$ произошли события $A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}$, соответственно.

Пусть в распоряжении исследователя имеется экспертная ННН-информация I относительно всех начальных $p^{(1)}(i_1) = P^{(1)}(A^{(1)}[i_1])$ и переходных $p^{(j/1, \ldots, j-1)}(i_j/i_1, \ldots, i_{j-1})$ вероятностей, определяющих вероятности появления событий $A^{(j)}[i_j]$, $i_j = 1, \ldots, r(j)$, в результате реализации случайного испытания $\tilde{E}^{(j)}$ при условии, что в результате реализации случайных испытаний $\tilde{E}^{(1)}, \ldots, \tilde{E}^{(j-1)}$ произошли события $A^{(1)}[i_1], \ldots, A^{(j-1)}[i_{j-1}]$.

Используя метод рандомизированной квантификации, построим систему случайных начальных $\tilde{p}^{(1)}(i_1)$ и условных $\tilde{p}^{(j/1, \ldots, j-1)}(i_j / i_1, \ldots, i_{j-1}; I)$ вероятностей, подстановка которых в известную формулу умножения вероятностей дает рандомизированную оценку $\tilde{p}^{(1, \ldots, n)}(i_1, \ldots, i_n; I) = \tilde{p}^{(1)}(i_1; I) \cdot \prod_{j=2}^{n} \tilde{p}^{(j/1, \ldots, j-1)}(i_j / i_1, \ldots, i_{j-1}; I)$ вероятности $p^{(1, \ldots, n)}(i_1, \ldots, i_n)$ осуществления в результате реализации последовательности случайных испытаний

$\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n$ цепочки событий $A^{(1)}[i_1]$, $A^{(2)}[i_2]$, …, $A^{(1,\ldots,n)}[i_n]$. В качестве искомой числовой оценки вероятности $p^{(1,\ldots,n)}(i_1, \ldots, i_n)$ естественно выбрать математическое ожидание $\overline{p}^{(1,\ldots,n)}(i_1, \ldots, i_n; I) = E\,\widetilde{p}^{(1,\ldots,n)}(i_1, \ldots, i_n; I)$ случайной величины $\widetilde{p}^{(1,\ldots,n)}(i_1, \ldots, i_n; I)$, вычисляемой по формуле $\overline{p}^{(1,\ldots,n)}(i_1, \ldots, i_n; I) = \overline{p}^{(1)}(i_1; I) \cdot \prod_{j=2}^{n} \overline{p}^{(j/1,\ldots,j-1)}(i_j / i_1, \ldots, i_{j-1}; I)$, где $\overline{p}^{(1)}(i_1; I) = E\,\widetilde{p}^{(1)}(i_1; I)$, $\overline{p}^{(j/1,\ldots,j-1)}(i_j / i_1, \ldots, i_{j-1}; I) = E\,\widetilde{p}^{(j/1,\ldots,j-1)}(i_j / i_1, \ldots, i_{j-1}; I)$ [12].

Знание всех оценок $\overline{p}^{(1,\ldots,n)}(i_1, \ldots, i_n; I)$ совместных вероятностей $p^{(1,\ldots,n)}(i_1, \ldots, i_n)$, $i_j = 1, \ldots, r(j)$, $j = 1, \ldots, n$ позволяет получить оценки $\overline{p}^{(j_1,\ldots,j_m)}(i_{j_1}, \ldots, i_{j_m}; I)$ всех частных вероятностей ($p^{(j_1,\ldots,j_m)}(i_{j_1}, \ldots, i_{j_m})$, $j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\}$, $1 \le m < n$, $j_r \ne j_s$ при $r \ne s$, по формуле $\overline{p}^{(j_1,\ldots,j_m)}(i_{j_1}, \ldots, i_{j_m}; I) = \sum \overline{p}^{(1,\ldots,n)}(i_1, \ldots, i_n; I)$, где суммирование ведется по всем значениям индексов $i_1, \ldots, i_n$, не совпадающих ни с одним из индексов $i_{j_1}, \ldots, i_{j_m}$. Оценки $\overline{p}^{(j)}(i_j; I)$ одномерных и оценки $\overline{p}^{(j,l)}(i_j, i_l; I)$ двумерных частных вероятностей будут использоваться далее для вычисления ожидаемой доходности и риска портфеля ценных бумаг.

2. Выбор портфеля методом квантификации нечисловых оценок вероятностей

Рассмотрим применение метода рандомизированной квантификации нечисловых вероятностей для построения оптимального портфеля ценных бумаг. Обратимся к исходной статье Г. Марковица[13], где процесс выбора оптимального портфеля ценных бумаг (*securities*) разделяется на два этапа. Первый этап начинается с наблюдения и опыта, а заканчивается формированием предположений (*beliefs*) о будущем поведении ценных бумаг, доступных инвестору. Второй этап начинается с обоснованных предположений (*relevant beliefs*) о будущем поведении ценных бумаг, а заканчивается выбором портфеля. Хотя рассматриваемая статья Марковица практически полностью посвящена второму этапу, но и по поводу первого, сейчас наиболее важного для нас этапа автор делает ряд интересных замечаний.

Прежде всего Г. Марковиц отмечает, что инвестору следует учитывать неопределенность будущих доходов (*returns*), получаемых от приобретенных ценных бумаг (*securities*), и ориентироваться, поэтому, на «ожидаемые» или «предугадываемые» доходы («*expected*» or «*anticipated*» *returns*). Предполагается, что инвестор имеет «постоянные вероятностные ожидания» (*static probability beliefs*), неизменные в течение всего учитываемого периода инвестирования и предшествующего ему «обучающего» периода, в течение которого собирается статистика доходности отдельных ценных бумаг.

Хотя анализируемая статья не содержит обсуждения трудного вопроса о том, как инвестор формирует (или должен формировать) свои вероятностные ожидания (*probability beliefs*), Марковиц прямо указывает на нечисловой (точнее, на «ординальный», порядковый) характер суждений инвестора о вероятностях интересующих его событий. К тому же в статье Марковица отмечается приблизительный и частично субъективный характер «вероятностных ожиданий» инвестора. Отмечается также возможность совместного использования (*combining*) статистических методов (*statistical techniques*) и экспертных суждений (*judgment of experts*) для формирования рациональных (*reasonable*) вероятностных ожиданий инвестора.

В качестве одного из возможных практических подходов к формированию системы вероятностных ожиданий инвестора Марковиц предлагает предварительно оценить статистические параметры случайных доходов от различных ценных бумаг, а затем корректировать полученные числовые оценки с учетом дополнительной экспертной информации. В своей Нобелевской лекции Г. Марковиц говорит и о возможности практического использования методов, развиваемых в рамках концепции «субъективных вероятностей» (*subjective probabilities*) Л. Сэвиджа[14], для построения системы вероятностных ожиданий инвестора[15].

В целом из рассматриваемой статьи Марковица можно сделать вывод, что автор предполагает систему вероятностных ожиданий инвестора достаточной для получения числовых оценок математического ожидания, дисперсии и коэффициентов ковариации случайной доходности ценных бумаг, составляющих портфель. Этот вывод подтверждается и другими, более поздними публикациями Марковица[16]. Поэтому приложение описанного в предыдущем разделе метода рандомизированной квантификации нечисловой экспертной информации мы будем ориентировать именно на получение числовых оценок указанных статистических характеристик случайной доходности.

Пусть в инвестиционный портфель включены n различных ценных бумаг, случайный вектор доходности $\tilde{x} = (\tilde{x}^{(1)}, ..., \tilde{x}^{(n)})$ которых является n-мерной непрерывной случайной величиной, описываемой плотностью распределения вероятностей $f_{\tilde{x}}(x_1, ..., x_n)$, принимающей положительные значения на некотором n-мерном параллелепипеде Δ и равной нулю вне этого параллелепипеда. Ребра параллелепипеда предполагаются параллельными осям координат n-мерного евклидова пространства R^n, что позволяет представить Δ в виде декартова произведения $\Delta = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{n} [d^{(j)}(0), d^{(j)}(r(j)))$ полуоткрытых интервалов $[d^{(j)}(0), d^{(j)}(r(j)))$, где $-\infty < d^{(j)}(0) < d^{(j)}(r(j)) < +\infty$, $j = 1, \ldots, n$.

Аппроксимируем частную плотность распределения $f_{\tilde{x}}^{(j)}(x^{(j)})$ случайной доходности $\tilde{x}^{(j)}$ кусочно-постоянной плотностью $f_{\tilde{z}}^{(j)}(z^{(j)})$ соответствующей случайной величины $\tilde{z}^{(j)}$. Кусочно-постоянная плотность $f_{\tilde{z}}^{(j)}(z^{(j)})$ строится следующим образом. Вся область (интервал) $[d^{(j)}(0), d^{(j)}(r(j)))$ возможных значений случайной величины $\tilde{x}^{(j)}$ разбивается на $r(j)$ интервалов $[d^{(j)}(i_j-1), d^{(j)}(i_j))$, $i_j = 1, \ldots, r(j)$, последовательно идущими точками $d^{(j)}(0) < d^{(j)}(1) <\ldots< d^{(j)}(i_j - 1) < d^{(j)}(i_j) <\ldots< d^{(j)}(r(j))$. Плотность $f_{\tilde{z}}^{(j)}(z^{(j)})$ принимает постоянное значение $f_{\tilde{z}}^{(j)}(z^{(j)}) = \overline{p}^{(j)}(i_j; I) \Big/ [d^{(j)}(i_j) - d^{(j)}(i_j - 1)]$, когда аргумент $z^{(j)}$ принимает значения из интервала $[d^{(j)}(i_j-1), d^{(j)}(i_j))$. Здесь положительный параметр $\overline{p}^{(j)}(i_j)$ есть полученная в предыдущем разделе оценка вероятности того, что значение случайной доходности $\tilde{x}^{(j)}$ попадет в интервал $[d^{(j)}(i_j-1), d^{(j)}(i_j))$.

Кусочно-постоянная плотность $f_{\tilde{z}}^{(j)}(z^{(j)})$ может быть представлена в виде смеси $f_{\tilde{z}}^{(j)}(z^{(j)}) = \sum_{i_j=1}^{r(j)} \overline{p}^{(j)}(i_j) f^{(j)}(z^{(j)}; i_j)$ плотностей $f^{(j)}(z^{(j)}; i_j) = 1 / [d^{(j)}(i_j) - d^{(j)}(i_j - 1)]$ случайных величин $\tilde{z}^{(j)}(i_j)$, равномерно распределенных на интервалах $[d^{(j)}(i_j - 1), d^{(j)}(i_j))$, $i_j = 1, \ldots, r(j)$. Такое представление плотности $f_{\tilde{z}}^{(j)}(z^{(j)})$ в виде смеси плотностей равномерно распределенных случайных величин $\tilde{z}^{(j)}(i_j)$ позволяет найти оценки математического ожидания и дисперсии случайной доходности $\tilde{z}^{(j)}$:

$$\overline{\mu}^{(j)}(I) = E\,\tilde{z}^{(j)} = \sum_{i_j=1}^{r(j)} \overline{p}^{(j)}(i_j; I)\, \frac{d^{(j)}(i_j - 1) + d^{(j)}(i_j)}{2},$$

$$[\overline{\sigma}^{(j)}(I)]^2 = D\,\tilde{z}^{(j)} = E[\tilde{z}^{(j)}]^2 - [E\,\tilde{z}^{(j)}]^2 =$$

$$= \sum_{i_j=1}^{r(j)} \overline{p}^{(j)}(i_j; I)\, \frac{[d^{(j)}(i_j - 1)]^2 + d^{(j)}(i_j - 1)\, d^{(j)}(i_j) + [d^{(j)}(i_j)]^2}{2} -$$

$$- \sum_{i_j=1}^{r(j)} [\overline{p}^{(j)}(i_j; I)]^2\, \frac{[d^{(j)}(i_j - 1) + d^{(j)}(i_j)]^2}{4} -$$

$$- 2 \sum_{\substack{i,\, k=1 \\ i<k}}^{r(j)} \overline{p}^{(j)}(i; I)\, \overline{p}^{(j)}(k; I) \frac{[d^{(j)}(i - 1) + d^{(j)}(i)][d^{(j)}(k - 1) + d^{(j)}(k)]}{4}\ .$$

Для оценки ковариации $\operatorname{cov}(\tilde{x}^{(j)}, \tilde{x}^{(i)})$ случайных доходностей $\tilde{x}^{(j)}$ и $\tilde{x}^{(l)}$ j-й и l-й ценных бумаг необходимо аппроксимировать их совместную плотность $f_{\tilde{x}}^{(j,\,l)}(x^{(j)}, x^{(l)})$ кусочно-постоянной плотностью $f_{\tilde{z}}^{(j,\,l)}(z^{(j)}, z^{(l)})$, описывающей случайные доходности $\tilde{z}^{(j)}, \tilde{z}^{(l)}$. Кусочно-постоянная плотность $f_{\tilde{z}}^{(j,\,l)}(z^{(j)},\ z^{(l)})$ строится следующим образом. Вся область (прямоугольник) $\Delta^{(j,\,l)} = [d^{(j)}(0), d^{(j)}(r(j))) \cdot [d^{(l)}(0), d^{(l)}(r(l)))$ возможных значений двумерной случайной величины $(\tilde{x}^{(j)},\ \tilde{x}^{(l)})$ разбивается на $r(j) \cdot r(l)$ прямоугольников $\Delta^{(j,\,l)}(i_j, i_l) = [d^{(j)}(i_j - 1), d^{(j)}(i_j)) \cdot [d^{(l)}(i_l - 1), d^{(l)}(i_l))$, $i_j = 1, \ldots, r(j)$, $i_l = 1, \ldots, r(l)$, точками деления $d^{(j)}(0) < d^{(j)}(1) <\ldots< d^{(j)}(i_j - 1) < d^{(j)}(i_j) <\ldots< d^{(j)}(r(j))$ отрезка $[d^{(j)}(0), d^{(j)}(r(j)))$ и точками деления $d^{(l)}(0) < d^{(l)}(1) <\ldots< d^{(l)}(i_l - 1) < d^{(l)}(i_l) <\ldots< d^{(l)}(r(l))$ отрезка $[d^{(l)}(0), d^{(l)}(r(l)))$.

Плотность $f_{\tilde{z}}^{(j,l)}(z^{(j)}, z^{(l)})$ принимает постоянное значение $f_{\tilde{z}}^{(j,l)}(z^{(j)}, z^{(l)}) = \overline{p}^{(j,l)}(i_j, i_l; I) \big/ [d^{(j)}(i_j) - d^{(j)}(i_j - 1)][d^{(l)}(i_l) - d^{(l)}(i_l - 1)]$, когда аргумент $(z^{(j)},\ z^{(l)})$ принимает значения из $\Delta^{(j,\,l)}(i_j, i_l) = [d^{(j)}(i_j - 1), d^{(j)}(i_j)) \cdot [d^{(l)}(i_l - 1), d^{(l)}(i_l))$. Здесь положительный параметр $\overline{p}^{(j,\,j)}(i_j, i_l; I)$ есть полученная в предыдущем разделе оценка вероятности попадания случайной доходности $(\tilde{x}^{(j)}, \tilde{x}^{(l)})$ в прямоугольник $\Delta^{(j,\,l)}(i_j, i_l)$.

Так построенная кусочно-постоянная плотность $f_{\tilde{z}}^{(j,l)}(z^{(j)}, z^{(l)})$ может быть представлена в виде смеси $f_{\tilde{z}}^{(j,l)}(z^{(j)}, z^{(l)}) = \sum_{i_j=1,\, i_l}^{r(j)\ r(l)} \overline{p}^{(j,l)}(i_j, i_l; I)\, f^{(j,l)}(z^{(j)}, z^{(l)}; i_j, i_l)$ плотностей $f^{(j,\,l)}(z^{(j)}, z^{(l)}; i_j, i_l) = 1 / [d^{(j)}(i_j) - d^{(j)}(i_j - 1)][d^{(l)}(i_l) - d^{(l)}(i_l - 1)]$ двумерных случайных величин $(\tilde{z}^{(j)}(i_j), \tilde{z}^{(l)}(i_l))$, равномерно распределенных на прямоугольниках $\Delta^{(j,\,l)}(i_j, i_l)$, $i_j = 1, \ldots, r(j)$, $i_l = 1, \ldots, r(l)$. Заметим, что очевидное представление совместной плотности $f^{(j,\,l)}(z^{(j)}, z^{(l)}; i_j, i_l)$ в виде произведения $f^{(j,\,l)}(z^{(j)}, z^{(l)}; i_j, i_l) = f^{(j)}(z^{(j)}; i_j) \cdot f^{(l)}(z^{(l)}; i_l)$ означает независимость одномерных равномерно распределенных случайных величин $\tilde{z}^{(j)}(i_j), \tilde{z}^{(l)}(i_l)$, из которой следует соотношение $E\,\tilde{z}^{(j)}(i_j)\,\tilde{z}^{(l)}(i_l) = E\,\tilde{z}^{(j)}(i_j) \cdot E\,\tilde{z}^{(l)}(i_l)$, влекущее простую формулу $E\,\tilde{z}^{(j)}(i_j)\,\tilde{z}^{(l)}(i_l) = [d^{(j)}(i_j - 1) + d^{(j)}(i_j)][d^{(l)}(i_l - 1) + d^{(l)}(i_l)] \big/ 4$.

Представление плотности $f_{\tilde{z}}^{(j,l)}(z^{(j)}, z^{(l)})$ в виде смеси плотностей двумерных случайных величин $(\tilde{z}^{(j)}(i_j), \tilde{z}^{(l)}(i_l))$, равномерно распределенных на прямоугольниках $\Delta^{(j,\,l)}(i_j, i_l)$, $i_j = 1, \ldots, r(j)$, $i_l = 1, \ldots, r(l)$, позволяет найти оценку второго смешанного начального момента $E\,\tilde{z}^{(j)}\tilde{z}^{(l)} = \sum_{i_j=1,\, i_l=1}^{r(j)\ r(l)} \overline{p}^{(j,l)}(i_j, i_l; I)[d^{(j)}(i_j - 1) + d^{(j)}(i_j)][d^{(l)}(i_l - 1) + d^{(l)}(i_l)] \big/ 4$ и оценку

$$\overline{\sigma}^{(j,\,l)}(I) = \operatorname{cov}(\tilde{z}^{(j)}, \tilde{z}^{(l)}) = E\,\tilde{z}^{(j)}\tilde{z}^{(l)} - E\,\tilde{z}^{(j)}\ E\,\tilde{z}^{(l)} =$$

$$= \sum_{i_j=1,\ i_l=1}^{r(j)\ \ r(l)} [\overline{p}^{(j,l)}(i_j, i_l; I) - \overline{p}^{(j)}(i_j; I)\,\overline{p}^{(l)}(i_l; I)]\,([d^{(j)}(i_j - 1) + d^{(j)}(i_j)][d^{(l)}(i_l - 1) + d^{(l)}(i_l)] \big/ 4)$$

ковариации случайных доходностей $\tilde{z}^{(j)}, \tilde{z}^{(l)}$.

Итак, получены все оценки математических ожиданий $\overline{\mu}^{(j)}(I)$, дисперсий $[\overline{\sigma}^{(j)}(I)]^2$ и ковариаций $\overline{\sigma}^{(j,\,l)}(I),\ j, l = 1, \ldots, n$, достаточные (в рамках модели Марковица) для выбора оптимального портфеля ценных бумаг. Действительно, задача выбора оптимального портфеля сводится к задаче минимизации квадратичной формы $\overline{\sigma}^2(x_1, \ldots, x_n; I) = \sum_{j,\ l=1}^{n} x_j x_l\ \overline{\sigma}^{(j,\,l)}(I)$, $\overline{\sigma}^{(j,\,j)}(I) = [\overline{\sigma}^{(j)}(I)]^2$, где $x_1, \ldots, x_n$ суть относительные доли ценных бумаг, входящих в портфель ($x_j \geq 0$, $x_1 + \ldots + x_n = 1$), при линейном ограничении $\overline{\mu}(x_1, \ldots, x_n; I) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\mu}^{(j)}(I) \geq \mu_0 > 0$. Иными словами, ищется такой портфель $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, который при заданном минимально приемлемом уровне μ_0 ожидаемой доходности $\overline{\mu}(x_1^*, \ldots, x_n^*; I)$ обеспечивает минимальный уровень риска инвестиций, измеряемый дисперсией $\overline{\sigma}^2(x_1^*, \ldots, x_n^*; I)$ доходности этого портфеля.

3. Пример формирования оптимального портфеля по нечисловой экспертной информации

Проиллюстрируем предлагаемый подход к построению оптимального портфеля ценных бумаг с использованием метода рандомизированной квантификации нечисловой экспертной информации о вероятностях событий на примере создания портфеля из трех видов акций, торгуемых на ММВБ: (1) акции НК «ЛУКойл»; (2) акции Сбербанка; (3) акции РосБизнесКонсалтинга. Доходность акций вычисляется за месяц и пересчитывается в годовые проценты. В качестве «обучающего» периода, в течение которого будут определяться необходимые статистические оценки вероятностей, математических ожиданий, дисперсий и ковариаций доходности рассматриваемых трех акций, выбирается период с 1 января 2005 по 31 декабря 2005 г. «Контрольным» периодом, в течение которого будут сравниваться показатели оптимального портфеля, составленного только по статистической информации, полученной за обучающий период, с показателями оптимального портфеля, учитывающего экспертную ННН-информацию, будет служить период с 1 января 2006 по 31 декабря 2006 г.

По статистической информации о котировках рассматриваемых акций за обучающий период, взятой на веб-сайте www.rbc.ru, построим статистические оценки параметров доходности этих акций: $\min^{(j)}$ ($\max^{(j)}$) — минимальное (максимальное) значение доходности j-й акции, наблюдаемое за обучающий период; $Mean^{(j)}$ — среднее значение доходности; $St.\,Dev^{(j)}$ — стандартное отклонение значений доходности. Числовые значения этих статистических характеристик доходности приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения характеристик месячной доходности акций за обучающий период

j	Название	Тикер	$\min^{(j)}$, %	$\max^{(j)}$, %	$Mean^{(j)}$, %	$St.\,Dev^{(j)}$, %
1	«ЛУКойл»	LKOH	–11,49	25,05	7,90	7,18
2	Сбербанк	SBER	–11,41	35,24	10,66	9,76
3	РБК	RBC	–10,02	27,80	9,59	7,45

Используем крайние значения $\min^{(j)}$, $\max^{(j)}$ (скорректированные экспертом в ту или иную сторону) для задания границ интервалов $[d^{(j)}(0), d^{(j)}(r(j)))$, $j = 1, 2, 3$, возможного варьирования доходности соответствующих акций. Положив $r(j) = 3$, разделим каждый из этих интервалов точками $d^{(j)}(0) < d^{(j)}(1) < d^{(j)}(2) < d^{(j)}(3)$ на три интервала $[d^{(j)}(0), d^{(j)}(1))$, $[d^{(j)}(1), d^{(j)}(2))$, $[d^{(j)}(2), d^{(j)}3))$. Выделение таких интервалов учитывает следующую экспертную информацию: попадание в конце контрольного периода значения доходности j-й акции в интервал $[d^{(j)}(0), d^{(j)}(1))$ означает существенное (для инвестора) снижение уровня доходности; попадание значения доходности j-й акции в интервал $[d^{(j)}(1), d^{(j)}(2))$ означает несущественное (для инвестора) варьирование доходности; попадание значения доходности в интервал $[d^{(j)}(2), d^{(j)}(3))$ означает существенное (для инвестора) повышение уровня доходности соответствующей акции. Установленные значения границ указанных интервалов приведены в табл. 2.

Для того чтобы инвестор представлял общий характер статистических связей между доходностью различных акций, вычислим по данным за обучающий период выборочные коэффициенты корреляции $R(j, l)$ для всех трех пар акций: $R(1, 2) = R(LKOH, SBER) = 0{,}41$, $R(1, 3) = R(LKOH, RBC) = 0{,}34$, $R(2, 3) = R(SBER, RBC) = –0{,}47$. По выборочным коэффициентам корреляции $R(j, l)$ и стандартным отклонениям $St.\ Dev^{(j)}$, $St.\ Dev^{(j)}$ можно определить выборочные ковариации $COV(j, l) = R(j, l) \cdot St.\ Dev^{(j)} \cdot St.\ Dev^{(l)}$, $j, l = 1, 2, 3$, доходности различных акций.

Таблица 2

Границы разбиения интервалов возможных значений месячной доходности акций

j	Название	$d^{(j)}(0)$, %	$d^{(j)}(1)$, %	$d^{(j)}(2)$, %	$d^{(j)}(3)$, %
1	«ЛУКойл»	–5	0	12	35
2	Сбербанк	–10	0	10	35
3	РБК	–15	0	10	15

Учитывая приведенные статистические характеристики доходности акций, подсчитанные для обучающего периода, эксперт сначала вводит нечисловую, неточную и неполную информацию $I^{(1)}$ о трех начальных вероятностях $p^{(1)}(i_1) = P(A^{(1)}[i_1])$, $A^{(1)}[i_1] = [d^{(1)}(i_1 - 1), d^{(1)}(i_1))$ $i_1 = 1, 2, 3 : I^{(1)} = \{p^{(1)}(1) > p^{(1)}(3); p^{(1)}(2) > 0{,}5\}$.

Из этой информации по методу рандомизированной квантификации ННН-информации получаем три рандомизированные вероятности $\tilde{p}^{(1)}(i_1; I^{(1)})$, $i_1 = 1, 2, 3$. Затем для каждого $i_1 = 1, 2, 3$ эксперт указывает ННН-информацию $I^{(2/1)}(i_1)$, $i_1 = 1, 2, 3$:

$I^{(2/1)}(1) = \{p^{(2/1)}(2/1) > p^{(2/1)}(1/1) > p^{(2/1)}(3/1); p^{(2/1)}(3/1) < 0{,}1\}$,

$I^{(2/1)}(2) = \{p^{(2/1)}(3/2) > p^{(2/1)}(2/2) > p^{(2/1)}(1/2)\}$,

$I^{(2/1)}(3) = \{p^{(2/1)}(3/3) > p^{(2/1)}(2/3) > p^{(2/1)}(1/3)\}$,

получая рандомизированные оценки $\tilde{p}^{(2/1)}(i_2 / i_1; I^{(2/1)}(i_1))$ для трех переходных вероятностей $p^{(2/1)}(i_2/i_1) = P(A^{(2)}[i_2] / A^{(1)}[i_1])$, $i_1, i_2 = 1, 2, 3$.

Наконец, эксперт вводит для каждой пары индексов (i_1, i_2) ННН-информацию $I^{(3/1, 2)}(i_1, i_2)$ об условных вероятностях $p^{(3/1, 2)}(i_3/i_1, i_2) = P(A^{(3)}[i_3] / A^{(1)}[i_1], A^{(2)}[i_2])$, $i_1, i_2 = 1, 2, 3$:

$I^{(3/1, 2)}(1, 1) = \{p^{(3/1, 2)}(2/1, 1) > p^{(3/1, 2)}(1/1, 1) > p^{(3/1, 2)}(3/1, 1); p^{(3/1, 2)}(3/1, 1) > 0.7\}$,

$I^{(3/1, 2)}(1, 2) = \{p^{(3/1, 2)}(2/1, 2) > p^{(3/1, 2)}(1/1, 2) > p^{(3/1, 2)}(3/1, 2)\}$,

$I^{(3/1, 2)}(1, 3) = \{p^{(3/1, 2)}(3/1, 3) > p^{(3/1, 2)}(2/1, 3); p^{(3/1, 2)}(1/1, 3) < 0.1\}$,

$I^{(3/1, 2)}(2, 1) = \{p^{(3/1, 2)}(2/2, 1) = p^{(3/1, 2)}(3/2, 1); p^{(3/1, 2)}(1/2, 1) < 0.1\}$,

$I^{(3/1, 2)}(2, 2) = \{p^{(3/1, 2)}(2/2, 2) = p^{(3/1, 2)}(3/2, 2); p^{(3/1, 2)}(1/2, 2) < 0.1\}$,

$I^{(3/1, 2)}(2, 3) = \{p^{(3/1, 2)}(3/2, 3) = p^{(3/1, 2)}(2/2, 3); p^{(3/1, 2)}(1/2, 3) < 0.1\}$,

$I^{(3/1, 2)}(3, 1) = \{p^{(3/1, 2)}(2/3, 1) > p^{(3/1, 2)}(3/3, 1) > p^{(3/1, 2)}(1/3, 1); p^{(3/1, 2)}(2/3, 1) > 0{,}7; p^{(3/1, 2)}(1/3, 1) < 0.1\}$,

$I^{(3/1, 2)}(3, 2) = \{p^{(3/1, 2)}(3/3, 2) > p^{(3/1, 2)}(2/3, 2) > p^{(3/1, 2)}(1/3, 2)\}$,

$I^{(3/1, 2)}(3, 3) = \{p^{(3/1, 2)}(3/3, 3) > p^{(3/1, 2)}(2/3, 3) > p^{(3/1, 2)}(1/3, 3); p^{(3/1, 2)}(3/3, 3) > 0{,}7\}$,

получая соответствующие рандомизированные оценки $\tilde{p}^{(3/1,2)}(i_3 / i_1, i_2; I^{(3/1,2)}(i_1, i_2))$ для этих девяти условных вероятностей.

Теперь по формуле умножения подсчитываются оценки совместных вероятностей $\bar{p}^{(1,2,3)}(i_1, i_2, i_3; I) = \bar{p}^{(1)}(i_1; I^{(1)}) \cdot \bar{p}^{(2/1)}(i_2 / i_1; I^{(2/1)}(i_1)) \cdot \bar{p}^{(3/2,1)}(i_3 / i_1, i_2 : I^{(3/1,2)}(i_1, i_2))$, $i_1, i_2, i_3 = 1, 2, 3$, где $I = I^{(1)} \cup I^{(2/1)}(1) \cup I^{(2/1)}(2) \cup I^{(2/1)}(3) \cup I^{(3/1, 2)}(1, 1) \cup \ldots \cup I^{(3/1, 2)}(3, 3)$ есть объединенная ННН-информация, учитывающая все имеющиеся у инвестора сведения о начальных и условных вероятностях. Знание оценок $\bar{p}^{(1,2,3)}(i_1, i_2, i_3; I)$ позволяет получить оценки $\bar{p}^{(1,2)}(i_1, i_2; I)$, $\bar{p}^{(1,3)}(i_1, i_3; I)$, $\bar{p}^{(2,3)}(i_2, i_3; I)$ вероятностей $p^{(1, 2)}(i_1, i_2)$, $p^{(1, 3)}(i_1, i_3)$, $p^{(2, 3)}(i_2, i_3)$ по формулам

$$\bar{p}^{(1,2)}(i_1, i_2; I) = \bar{p}^{(1,2,3)}(i_1, i_2, 1; I) + \bar{p}^{(1,2,3)}(i_1, i_2, 2; I) + \bar{p}^{(1,2,3)}(i_1, i_2, 3; I),$$

$$\overline{p}^{(1,3)}(i_1, i_3; I) = \overline{p}^{(1,2,3)}(i_1, 1, i_3; I) + \overline{p}^{(1,2,3)}(i_1, 2, i_3; I) + \overline{p}^{(1,2,3)}(i_1, 3, i_3; I),$$

$$\overline{p}^{(2,3)}(i_2, i_3; I) = \overline{p}^{(1,2,3)}(1, i_2, i_3; I) + \overline{p}^{(1,2,3)}(2, i_2, i_3; I) + \overline{p}^{(1,2,3)}(3, i_2, i_3; I).$$

Полученные для рандомизированных вероятностей $\widetilde{p}^{(1)}(i_1; I^{(1)})$, $\widetilde{p}^{(1,2)}(i_1, i_2; I)$, $\widetilde{p}^{(1,3)}(i_1, i_3; I)$, $\widetilde{p}^{(2,3)}(i_2, i_3; I)$ их усредненные оценки $\overline{p}^{(1)}(i_1; I^{(1)})$, $\overline{p}^{(1,2)}(i_1, i_2; I)$, $\overline{p}^{(1,3)}(i_1, i_3; I)$, $\overline{p}^{(2,3)}(i_2, i_3; I)$ позволяют вычислить математические ожидания $\overline{\mu}^{(j)}(I)$, дисперсии $[\overline{\sigma}^{(j)}(I)]^2$ и ковариации $\overline{\sigma}^{(j,l)}(I)$, $j, l = 1, \ldots, n$, необходимые для выбора оптимального портфеля ценных бумаг. Структура $(x_1^*(I), \ldots, x_n^*(I))$ оптимального портфеля, построенного с учетом дополнительной нечисловой экспертной информации I, приведена в табл. 4, где для сравнения указана структура оптимального портфеля $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$, построенного с учетом только статистических данных, полученных за обучающий период. Для обоих портфелей минимально допустимый уровень ожидаемой доходности полагался равным $\mu_0 = 10\%$.

Таблица 3

Структура, ожидаемая доходность и риск портфелей для контрольного периода

«Статистический» портфель	x_1^*	x_2^*	x_3^*	$\overline{R}^*$, %	$\overline{S}^*$, %
	0,046	0,497	0,457	5,07	8,81
«Экспертный» портфель	$x_1^*(I)$	$x_2^*(I)$	$x_3^*(I)$	$\overline{R}^*(I)$, %	$\overline{S}^*(I)$, %
	0,17	0,68	0,15	5,7	7,5

В этой же таблице указаны значения ожидаемой доходности $\overline{R}^* \left(\overline{R}^*(I)\right)$ и риска, измеряемого стандартным отклонением $\overline{S}^* \left(\overline{S}^*(I)\right)$ оптимального «статистического» портфеля $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ и «экспертного» портфеля $(x_1^*(I), \ldots, x_n^*(I))$. В 2005 г. структура «статистического портфеля» предполагала доходность в 10% в месяц с риском (среднеквадратическим отклонением) 5,9%. Однако в 2006 г. произошли существенные изменения на рынке, что снизило доходность «статистического портфеля» до 5,07%, увеличив риск, измеряемый стандартным отклонением $\overline{S}^*$, до 8,81%. Если же учесть экспертную информацию о тенденциях на финансовом рынке в 2006 г., то, используя идею Марковица, можно построить портфель с доходностью 5,7% и со стандартным отклонением $\overline{S}^*(I) = 7{,}5\%$. Таким образом, сравнение уровней ожидаемой доходности $\overline{R}^*$, $\overline{R}^*(I)$ и риска $\overline{S}^*$, $\overline{S}^*(I)$, подсчитанных по данным за контрольный период (с 1 января 2006 по 31 декабря 2006 г.) показывает, что использование метода рандомизированной квантификации нечисловой, неточной и неполной экспертной информации может существенно улучшить показатели выбираемого портфеля ценных бумаг.

Заключение

Итак, метод рандомизированной квантификации нечисловой информации о вероятностях альтернатив, построенный на основе обобщения и формализации основных идей фундаментальной работы Дж. М. Кейнса (1921), оказывается эффективным инструментом построения оптимального портфеля ценных бумаг в рамках модели Г. Марковица

(1952), учитывающей, наряду с числовыми статистическими данными, и нечисловую экспертную информацию.

---

[1] *Маршалл Дж., Бансал В.* Финансовая инженерия. М., 1998; *Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж.* Инвестиции. М., 1999.

[2] *Rubinstein M.* Markowitz's «Portfolio Selection»: A Fifty-Year Retrospective // Journal of Finance. 2002. Vol. 57. P. 1041–1045. P. 1041.

[3] *Макашева Н. А.* Еще раз о революции Дж. М. Кейнса (Опыт построения макроэкономической теории для экономики с неопределенностью) // Общественные науки и современность. 2006. № 2. С. 143–154; *Bateman B.* Keynes's Uncertain Revolution. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1996.

[4] *Keynes J.* A Treatise on Probability. London: Macmillan, 1952 (First ed. 1921).

[5] *Koopman B.* The axioms and algebra of intuitive probability // Annals of Mathematics. 1940. Vol. 41. P. 269–292.

[6] *Хованов Н. В.* Математические основы теории шкал измерения качества. Л., 1982.

[7] *Енюков И. С.* Методы оцифровки неколичественных признаков // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. М., 1980. С. 309–316; *Хованов Н. В.* Шкалирование ранжированных признаков управляемых коллективов // Математика и социология. Новосибирск, 1972. С. 168–175.

[8] *Хованов Н.В.* Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб., 1996.

[9] *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.; Л., 1936.

[10] *Barmish B., Lagoa C.* The uniform distribution: a rigorous justification for its use in robustness analysis // Mathematical Control, Signals, Systems. 1997. Vol.10. P. 203–222; *Evans R.* The principle of minimal information // IEEE Transactions on Reliability. 1969. Vol. 18. P. 87–89.

[11] *Колесников Г. И., Федотов Ю. В., Хованов Н. В.* Оценка вероятностей альтернатив развития фондового рынка в условиях дефицита числовой информации // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2005. Вып.2. С. 151–160.

[12] *Hovanov N. V., Yudaeva M. S., Kotov N. V.* Event-Tree with randomized transition probabilities as a new tool for alternatives probabilities estimation under uncertainty // Proceedings of the Sixth International Scientific School «Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems». SPb.: RAS, 2006. P. 118–125.

[13] *Markowitz H.* Portfolio Selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7. P. 77–91.

[14] *Savage L.J.* The Foundations of Statistics. New York: Wiley, 1954.

[15] *Markowitz H.* Foundations of portfolio theory // The Journal of Finance. 1991. Vol. 46. P. 469–477. P. 470.

[16] *Markowitz H.* Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. New York: Wiley, 1959; *Markowitz H., Perold A.* Portfolio analysis with factors and scenarios // The Journal of Finance. 1981. Vol. 36. P. 871–877.

Статья поступила в редакцию 19 апреля 2007 г.