Н. В. Хованов

ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ОБМЕНА: АДДИТИВНЫЕ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ МОНЕТАРНЫЕ ИНДЕКСЫ МЕНОВОЙ ЦЕННОСТИ*

Введение

Для описания метода построения индексов меновой ценности экономических благ вводится расширенная модель простого обмена и формулируется концепция монетарных индексов (раздел 1), что позволяет построить систему сводных аддитивных и мультипликативных монетарных показателей меновой ценности простых и агрегированных благ (раздел 2). Для оценки статистических параметров (среднего, вариации, ковариации и корреляции) временных рядов значений показателей меновой ценности строится комплекс индексов изменения соответствующих показателей (раздел 3). В заключении обсуждаются вопросы практического применения разработанных математических моделей и методов для решения актуальных задач феноменологической теории агрегированных валют (метаденег).

1. Расширенная модель простого обмена

Рассмотрим так называемую *простую модель обмена*[1], описывающую рынок, на котором обмениваются *простые*, т. е. не подразделяющиеся далее на самостоятельно обмениваемые на этом же рынке фрагменты и/или виды, *экономические блага* (товары, услуги, валюты и т. д.) из конечного множества $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Эти блага полагаются безгранично делимыми, что позволяет определить количество (объем) простого блага g_i именованным числом $q_i e_i$, где e_i есть единица измерения из соответствующего множества единиц измерения $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, а q_i — некоторое неотрицательное действительное число. Если пропорция обмена блага g_i на благо g_j не зависит от объемов этих благ, то можно

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-06-80271).

Николай Васильевич ХОВАНОВ — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета СПбГУ. Область научных интересов – стохастические модели риска и неопределенности, теория и методы принятия решений в условиях дефицита информации.

ввести *матрицу обмена* $C = (c\ (i, j))$, $i, j = 1, \ldots, n$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит *коэффициент обмена* $c\ (i, j) > 0$, указывающий, сколько единиц e_j блага g_j обменивается на единицу e_i блага g_i. Итак, простая модель обмена определяется множеством $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ простых благ, множеством $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ единиц измерения и положительной матрицей $C = (c\ (i, j))$, $i, j = 1, \ldots, n$, задающей пропорции попарного обмена этих благ. Иными словами, для построения конкретной простой модели обмена, обозначаемой тройкой $\langle G, E, C\rangle$ указанных математических объектов, необходимо идентифицировать множество обмениваемых простых благ, выбрать единицы измерения объемов этих благ и определить пропорции их попарного обмена. Простая модель обмена $\langle G, E, C\rangle$ является моделью *простого обмена*, состоящего в непосредственном попарном обмене простых благ $g_1, \ldots, g_n$, не требующим для своего осуществления никаких посредующих благ, например денег. Иными словами, модель $\langle G, U, C\rangle$ описывает безденежный (бартерный) обмен экономическими благами.

Простая модель обмена $\langle G, E, C\rangle$ может быть расширена путем введения *агрегированных* (*составных, композитных, сложных, векторных* и т. д.) *экономических благ*[2], каждое из которых представляет собой некоторый набор простых благ $g_1, \ldots, g_n$, взятых в количествах $q_1, \ldots, q_n$ соответственно. Таким образом, составное благо задается вектором $\overline{q} = (q_1, ..., q_n)$ с неотрицательными компонентами, а множество AG всех возможных композитных благ образует неотрицательный ортант R_+^n евклидова пространства R^n. Из множества AG можно выделить подмножество $V = \{\overline{v} = (v_1, ..., v_n) : v_i \geq 0,\ v_1 + ... + v_n = 1\}$ *базовых агрегированных благ.*

Из определений множеств AG и V видно, что любое агрегированное благо $\overline{q} = (q_1, ..., q_n)$ лежит на луче, исходящем из начала координат пространства R^n и проходящем через некоторое базовое благо $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$. Поэтому «естественной» единицей $e_{\overline{v}}$ измерения количества (объема) агрегированного блага $\overline{q} = (q_1, ..., q_n) \in AG$ может служить соответствующее базовое благо $\overline{v} = (v_1, ..., v_n) \in V$. При таком выборе единицы измерения $e_{\overline{v}}$ *объем* (*количество*) *составного блага* $\overline{q} = (q_1, ..., q_n)$ измеряется величиной $q = q_1 + \ldots + q_n$. Впрочем, в качестве единицы измерения объема составных благ, лежащих на луче, порождаемом базовым благом $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$, можно взять и любое составное благо $\lambda_0 \cdot \overline{v} = (\lambda_0\ v_1, ..., \lambda_0\ v_n)$, $\lambda > 0$.

Предположим, что на рынке рассматриваемых экономических благ отсутствуют системные (синергетические) эффекты, увеличивающие или уменьшающие меновую ценность агрегированного блага, задаваемого вектором $\overline{q} = (q_1, ..., q_n)$, по сравнению с суммарной ценностью отдельных благ, составляющих это сложное экономическое благо. Тогда *коэффициент обмена* $c(\overline{v}, k)$ *базового агрегированного блага* $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$ *и простого блага* g_k из множества G можно определить формулой $c(\overline{v}, k) = v_1\ c(1, k) + ... + v_n\ c(n, k)$. Задаваемый этой формулой коэффициент обмена $c(\overline{v}, k)$ показывает, сколько единиц e_k простого блага $g_k \in G$ меняется на единицу $e_{\overline{v}}$ измерения агрегированных благ, лежащих на луче, проходящем через базовое благо $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$.

Коэффициент обмена $c\ (k, \overline{v})$, указывающий, сколько единиц $e_{\overline{v}}$ измерения объемов агрегированных благ, лежащих на луче, проходящем через базовое благо $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$, обменивается на единицу e_k простого блага $g_k \in G$, определяется простой формулой $c\ (k, \overline{v}) = 1 / c(\overline{v}, k)$. Коэффициент же обмена $c\ (\overline{v}, \overline{v}')$, $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$, $\overline{v}' = (v_1', ..., v_n')$, указывающий, сколько единиц $e_{\overline{v}'}$ обменивается на одну единицу $e_{\overline{v}}$, вычисляется по формуле $c\ (\overline{v}, \overline{v}') = c\ (\overline{v}, k) \cdot c\ (k, \overline{v}') = c\ (\overline{v}, k) / c\ (\overline{v}', k)$, которая определяет отображение $C^* : V^2 \to R_+^1$ множества $V^2 = \{(\overline{v}, \overline{v}') : \overline{v}, \overline{v}' \in V\}$ пар $(\overline{v}, \overline{v}')$ базовых благ в множество всех неотрицательных действительных чисел R_+^1. Иными словами, задана функция $C^*(\overline{v}, \overline{v}')$

двух векторных переменных, сопоставляющая каждой паре составных базовых благ $\bar{v} = (v_1, ..., v_n)$, $\bar{v}' = (v_1', ..., v_n')$, их коэффициент обмена $c(\bar{v}, \bar{v}')$. По аналогии с матрицей обмена $C = (c(i, j))$ относительно функции $C^*(\bar{v}, \bar{v}')$ можно сказать, что она транзитивна $(c(\bar{v}, \bar{v}') \cdot c(\bar{v}', \bar{v}'') = c(\bar{v}, \bar{v}''))$, обратно симметрична $(c(\bar{v}, \bar{v}') = 1/c(\bar{v}', \bar{v}))$ и удовлетворяет условию $c(\bar{v}, \bar{v}) = 1$.

Таким образом, получаем *расширенную простую модель обмена* $\langle G, E, C; V, E(V), C^* \rangle$, содержащую, помимо элементов простой модели обмена $\langle G, E, C \rangle$, множество всех базовых экономических благ V, множество $E(V)$ всех единиц измерения $e_{\bar{v}}$ количеств (объемов) агрегированных благ $\bar{q} = \lambda \cdot \bar{v}$ и транзитивное отображение C^*, сопоставляющее каждой паре $(\bar{v}, \bar{v}')$ базовых благ их коэффициент обмена $c(\bar{v}, \bar{v}')$.

Рассмотрим условия, при которых осуществляется обмен q_i единиц e_i простого блага g_i на q_j единиц e_j простого блага g_j. В самых общих чертах эти условия были сформулированы еще Аристотелем, который указал на необходимость «приравнивать» в обмене с помощью денег («монеты») разнокачественные экономические блага, имеющие к тому же и разную количественную определенность. Такое «приравнивание» качественно различных предметов обмена предполагает, по Аристотелю, наличие в этих предметах чего-то «равного». Иными словами, должна существовать некоторая общая характеристика, имеющая численное денежное выражение и обеспечивающая эквивалентность именованных величин $q_i e_i$, $q_j e_j$, обмениваемых товаров g_i, g_j. Эту общую числовую характеристику А. Смит интерпретировал как меру *меновой ценности* (*value in exchange*) обмениваемых благ. Далее будем полагать, что меновая ценность экономических благ может быть измерена по шкале действительных чисел. Предполагается существование некоторого *индекса* (*показателя, индикатора*) $VEX(q; e)$ меновой ценности (*VEX — Value in EXchange*) q единиц e простого экономического блага g из множества $G = \{g_1, …, g_n\}$.

Будем считать, что функция $VEX(q; e)$ непрерывна, возрастает (т. е. при увеличении объема блага увеличивается его меновая ценность) и аддитивна. Тогда индикатор $VEX(q; e)$ меновой ценности можно представить в виде линейной однородной функции $VEX(q; e) = \alpha \cdot q$ с положительным параметром α, который естественно интерпретировать как показатель VEX_e меновой ценности единицы e рассматриваемого экономического блага: $\alpha = VEX(1; e) = VEX_e$. Отсюда получаем формулу $VEX(q; e) = q \cdot VEX_e$ для вычисления индекса меновой ценности простого экономического блага $g \in G$, взятого в количестве q, определяемом с помощью единицы измерения e.

При феноменологическом подходе к анализу меновой ценности исследователь ориентируется на изучение *непосредственно наблюдаемых пропорций* $c(i, j)$ обмена простых благ. Поэтому *непосредственно ненаблюдаемый индекс* $VEX(q; e)$ *меновой ценности* должен быть согласован с наблюдаемой матрицей обмена требованием выполнения для всех пар g_i, g_j простых экономических благ соотношения $c(i, j) = VEX_i/VEX_j$, где $k = i, j$. Индекс $VEX(q; e)$ меновой ценности, удовлетворяющий этому соотношению, естественно назвать *монетарным* (*денежным*) *индексом меновой ценности*, так как с его помощью непосредственно наблюдаемые («бартерные») пропорции $c(i, j)$ обмена экономических благ можно представить в виде обмена, опосредованного деньгами («монетами»), позволяющими определить цены для всех единиц $e_1, …, e_n$ измерения простых благ $g_1, …, g_n$ таким образом, что отношение цен равно отношению соответствующих монетарных индексов.

Нетрудно показать, что для существования монетарного индекса $VEX(q; e)$ меновой ценности простых благ, согласованного с моделью обмена $\langle G, E, C \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы матрица обмена $C = (c(i, j))$, была транзитивна, т. е. чтобы соотношение $c(i,k)=c(i,j)\cdot c(j,k)$ выполнялось для любых $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$. При этом функция VEX $(q; e)$ просто задается своими значениями $VEX(1; e_i) = VEX_i = c(i, k)$, в качестве которых выбраны элементы некоторого столбца (в данном случае k-го столбца) транзитивной матрицы обмена $C = (c(i, j))$. Тогда значение монетарного индекса меновой ценности количества q_i, измеряемого в единицах e_i, простого блага g_i определяется формулой $VEX(q_i; e_i) = q_i \cdot VEX_i = q_i \cdot c(i,k)$.

Значение $VEX(1; e_i) = c(i, k)$ монетарного индекса $VEX(q_i; e_i) = q_i \cdot c(i, k)$ назовем *простейшим индексом меновой ценности единицы* e_i *простого экономического блага* g_i и будем далее обозначать $I(i/k) = c(i, k)$. Это обозначение подчеркивает зависимость численного значения простейшего монетарного показателя $I(i/k)$ от выбора экономического блага g_k, в единицах e_k которого измеряется меновая ценность единицы e_i блага g_i.

2. Аддитивные и мультипликативные монетарные индексы меновой ценности

Очевидно, что вся транзитивная матрица обмена $C = (c(i, j))$ полностью определяется одним своим столбцом (одной строкой), поскольку имеет место пропорциональность всех столбцов (строк) такой матрицы $c(i, k)/c(j, k) = c(i, l)/c(j, l)$, $(c(i, k)/c(i, l) = c(j, k)/c(j, l))$. Вектор значений $(I(i/1), \dots, I(i/n))$ простейшего монетарного индекса $I(i/k)$, т. е. i-ю строку $\bar{c}(i) = (c(i,1),\dots,c(i,n))$ матрицы обмена $C = (c(i, j))$, можно рассматривать как многокритериальную оценку меновой ценности простого экономического блага g_i. Векторные оценки $\bar{c}(i)$, $\bar{c}(j)$ позволяют сравнивать меновую ценность простых благ g_i, g_j. Действительно, если хотя бы одна скалярная оценка $c(i, k)$ меновой ценности блага g_i превосходит аналогичную оценку $c(j, k)$ блага g_j $(c(i, k) > c(j, k))$, то и любая другая скалярная оценка $c(i, l)$ блага g_i превосходит аналогичную оценку $c(j, l)$ блага g_j $(c(i, l) > c(j, l))$, так как $c(i, l) = c(i, k)c(k, l)$, $c(j, l) = c(j, k)c(k, l)$.

Однако, хотя мы можем, используя многокритериальные (векторные) оценки вида $\bar{c}(i)$, линейно упорядочить все простые экономические блага $g_1, \dots, g_n$ по степени их меновой ценности, числовая оценка меновой ценности отдельного блага остается неопределенной и может принимать, вообще говоря, любое из значений $\varphi(c(i, k))$, $k = 1, \dots, n$, где φ — некоторая возрастающая функция. Иными словами, меновая ценность экономических благ $g_1, \dots, g_n$ измеряется с помощью многокритериальных оценок вида $\bar{c}(i)$ по ординальной (порядковой) шкале, которая должна быть *квантифицирована* (арифметизирована, «оцифрована») для получения однозначно определенного числового значения меновой ценности.

Одним из возможных подходов к арифметизации ординальной шкалы, основанной на многокритериальных оценках вида $\bar{c}(i)$, является построение числовой функции $I(\bar{c}(i))$ вектора $\bar{c}(i)$, обладающей свойствами обобщенного среднего величин $c(i, 1), \dots, c(i, n)$[3]. Функция $I(\bar{c}(i)) = I(c(i,1),\dots,c(i,n))$ синтезирует отдельные простейшие показатели меновой ценности $c(i, k) = I(i/k)$, $k = 1, \dots, n$, в *единый, сводный* (*агрегированный, интегральный* и т. д.) *показатель меновой ценности простого экономического блага* $g_i \in G$. В качестве синтезирующих функций, дающих сводные показатели меновой ценности, наиболее часто выбираются арифметическое среднее $I_+(i) = AM(\bar{c}(i)) = [c(i,1) + \dots + c(i,n)]/n$ и геометрическое среднее $I_\times(i) = GM(\bar{c}(i)) = [c(i,1) \cdot \dots \cdot c(i,n)]^{1/n}$ величин $c(i, 1), \dots, c(i, n)$.

Рассмотрим два важных свойства *сводного аддитивного индекса* $I_+(i)$ *меновой ценности простого экономического блага* $g_i \in G$. Во-первых, показатель $I_+(i)$ является монетарным индикатором, так как выполняется соотношение $I_+(i)/I_+(j) = c(i, j)$. Во-вторых, индекс $I_+(i)$ является оптимальной (с точки зрения принципа наименьших квадратов) аппроксимацией совокупности простейших показателей меновой ценности $I(i/1), \dots, I(i/n)$, так как минимум суммы квадратов отклонений $(I(i/1) - I)^2 + \ldots + (I(i/n) - I)^2$ простейших показателей от некоторого значения I достигается при $I = I_+(i)$.

Описанный выше способ построения монетарных индексов $I(i/k)$, $I_+(i)$ меновой ценности простых экономических благ можно взять за образец при построении аналогичных индексов меновой ценности любого базового агрегированного блага $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $v_i \geq 0$, $v_1 + \ldots + v_n = 1$. Определим *простейший монетарный индекс* $I(\overline{v}/k)$ *меновой ценности составного блага* $\overline{v}$ соотношением $I(\overline{v}/k) = c(\overline{v}, k) = v_1 c(1, k) + \ldots + v_n c(n, k)$. Тогда *сводный аддитивный монетарный индекс* $I_+(\overline{v})$ *меновой ценности* этого блага естественно определить как среднее арифметическое простейших монетарных показателей $I(\overline{v}/k), k = 1, \ldots, n : I_\times(\overline{v}) = [I(\overline{v}/1) \cdot \ldots \cdot I(\overline{v}/n)]^{1/n}$. Простые преобразования позволяют представить аддитивный сводный показатель $I_+(\overline{v})$ меновой ценности агрегированного блага $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ в виде взвешенного среднего арифметического аддитивных индексов $I_+(1)$, …, $I_+(n)$ меновой ценности простых благ $g_1, \ldots, g_n : I_+(\overline{v}) = v_1 I_+(1) + \ldots + v_n I_+(n)$.

Рассмотрим два важных свойства аддитивного индекса $I_+(\overline{v})$ меновой ценности агрегированного экономического блага $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Во-первых, индекс $I_+(\overline{v})$ является монетарным индексом, так как выполняется соотношение $I_+(\overline{v}) / I_+(\overline{v}') = c(\overline{v}, \overline{v}')$. Во-вторых, индекс $I_+(\overline{v})$ является оптимальной (с точки зрения принципа наименьших квадратов) аппроксимацией совокупности простейших показателей меновой ценности $I(\overline{v}/1), \ldots, I(\overline{v}/n)$, так как минимум суммы квадратов отклонений $(I(\overline{v}/1) - I)^2 + \ldots + (I(\overline{v}/n) - I)^2$ простейших показателей от некоторого значения I достигается при $I = I_+(\overline{v})$.

Итак, наряду с простейшими монетарными индексами $I(i/k)$ и $I(\overline{v}/k)$ построены сводные аддитивные монетарные показатели $I_+(i)$ и $I_+(\overline{v})$ меновой ценности простого блага g_i и агрегированного блага $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ соответственно.

Рассмотрим мультипликативные аналоги указанных сводных аддитивных индексов меновой ценности. В пользу выбора среднего геометрического $GM(\overline{c}(i)) = [I(i/1) \cdot \ldots \cdot I(i/n)]^{1/n}$ в качестве сводного показателя $I_\times(i)$ меновой ценности простого экономического блага g_i можно привести ряд формальных (например, выполнение для среднего геометрического многих «естественных» условий-аксиом, обычно налагаемых на индексы) и прагматических (например, удобство работы со статистическими данными о случайных коэффициентах обмена, имеющих логарифмически нормальное распределение) аргументов [4].

Введенный *сводный мультипликативный индекс* $I_\times(i)$ *меновой ценности простого экономического блага* $g_i \in G$ является, очевидно, монетарным индексом: $I_+(i)/I_+(j) = c(i, j)$. Кроме того, индекс $I_\times(i)$ является оптимальной (с точки зрения принципа логарифмических наименьших квадратов) аппроксимацией совокупности простейших показателей меновой ценности $I(i/1)$, …, $I(i/n)$, так как минимум суммы квадратов отклонений $(\ln I(i/1) - \ln I)^2 + \ldots + (\ln I(i/n) - \ln I)^2$ логарифмов простейших показателей от логарифма некоторого показателя I достигается при $I = I_\times(i)$. Сводный мультипликативный индекс $I_\times(i)$ меновой ценности можно представить и в виде *нормированного индекса* $I_\times(i) = I(i/k) / GM(\overline{c}^T(k))$, где $GM(\overline{c}^T(k))$ есть среднее геометрическое элементов транспонированного k-го столбца $\overline{c}^T(k) = (c(1, k), \ldots, c(n, k))$ матрицы обмена $C = (c(I, j))$, т. е. $GM(\overline{c}^T(k)) = [I(1/k) \cdot \ldots \cdot I(n/k)]^{1/n}$.

Описанный выше способ построения мультипликативных сводных монетарных индексов $I_\times(i)$ меновой ценности простых экономических благ можно взять за образец при построении аналогичных индексов меновой ценности базового агрегированного блага $\bar{v}$, определив *сводный мультипликативный монетарный индекс* $I_\times(\bar{v})$ меновой ценности этого блага как среднее геометрическое простейших монетарных индексов $I(\bar{v}/k), k = 1, ..., n: I_\times(\bar{v}) = [I(\bar{v}/1) \cdot ... \cdot I(\bar{v}/n)]^{1/n}$. Мультипликативный сводный монетарный показатель $I_\times(\bar{v})$ меновой ценности составного блага $\bar{v} = (v_1, ..., v_n)$ можно представить в виде взвешенного среднего арифметического мультипликативных индексов $I_\times(1), \ldots, I_\times(n)$ меновой ценности простых благ $g_1, ..., g_n: I_\times(\bar{v}) = v_1 I_\times(1) + ... + v_n I_\times(n)$.

Таким образом, в рамках расширенной простой модели обмена $\langle G, E, C; V, E(V), C^*\rangle$ построена система простейших и сводных монетарных индексов $I(i/k), I(\bar{v}/k), I_+(i). I_\times(i), I_+(\bar{v}), I_\times(\bar{v}), i, k = 1, ..., n, \bar{v} \in V$, простых и агрегированных экономических благ.

3. Индексы изменения меновой ценности простых и агрегированных экономических благ

Для того чтобы теория индексов была согласована с практикой обработки реальных статистических данных, необходимо построить математический аппарат анализа *изменений* значений изучаемых экономических индексов во времени, при переходе от одного рынка к другому и т. д. Применительно к анализу меновой ценности требование указанной согласованности означает необходимость учета наблюдаемых временных рядов значений $c(i, j; t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$, коэффициентов обмена простых экономических благ $g_1, \ldots, g_n$. Поскольку все введенные в предыдущем разделе простейшие и сводные монетарные индексы простых и агрегированных экономических благ определены как функции коэффициентов обмена $c(i, j)$, переход к переменным коэффициентам обмена $c(i, j; t)$ делает переменными и все эти индексы, которые становятся функциями времени: простейший индекс $I(i/k; t) = c(i, k; t)$ меновой ценности простого блага; сводный аддитивный индекс $I_+(i; t) = [c(i, 1; t) + \ldots + c(i, n; t)] / n$ меновой ценности простого блага; сводный мультипликативный индекс $I_\times(i; t) = [c(i,1; t) \cdot \ldots \cdot c(i, n; t)]^{1/n}$ меновой ценности простого блага; простейший индекс $I(\bar{v}/k; t) = v_1 c(1, k; t) + ... + v_n c(n, k; t)$ меновой ценности агрегированного блага; сводный аддитивный индекс $I_+(\bar{v}; t) = [I(\bar{v}/1; t) + ... + I(\bar{v}/n; t)] / n$ меновой ценности агрегированного блага; сводный мультипликативный индекс $I_\times(\bar{v}; t) = [I(\bar{v}/1; t) \cdot ... \cdot I(\bar{v}/n; t)]^{1/n}$ меновой ценности агрегированного блага.

О том, во сколько раз изменился простейший индекс меновой ценности $I(i/k; t) = c(i, k; t)$ при переходе от момента времени t_0 к моменту времени t, естественно судить по величине отношения $I(i/k; t) / I(i/k; t_0)$, определяющего тем самым *индекс* $I(i/k; t/t_0) = c(i, k; t) / c(i, k; t_0)$ *изменения простейшего показателя* $I(i/k)$ *меновой ценности простого блага* $g_i \in G$, t_0, $t \in \{1, \ldots, T\}$. Аналогично определяются *индекс* $I_+(i; t/t_0) = I_+(i,t)/I_+(i;t_0) = [c(i,1;t)+\ldots+c(i,n;t)]/[c(i,1;t_0)+\ldots+c(i,n;t_0)]$ *изменения сводного аддитивного показателя* $I+(i;t)$ *меновой ценности простого экономического блага* g_i, а также *индекс* $I_\times(i; t/t_0) = I_\times(i, t) / I_\times(i; t_0) = [c(i, 1; t)\cdot\ldots\cdot c(i, n; t)]^{1/n} / [c(i, 1; t_0)\cdot\ldots\cdot c(i, n; t_0)]^{1/n}$ *изменения сводного мультипликативного показателя* $I_\times(i; t)$ *меновой ценности* того же простого блага.

Очевидно, что индекс изменения $I_+(i; t/t_0)$ сводного аддитивного показателя $I_+(i)$ меновой ценности можно представить в виде взвешенного среднего арифметического $I_+(i; t/t_0) = u_1(t_0)I(i/1; t/t_0) + \ldots + u_n(t_0)I(i/n; t/t_0)$, $u_k(t_0) = c(i, k; t_0) / [c(i, 1; t_0) + \ldots + c(i, n; t_0)]$, простейших индексов изменения $I(i/1; t/t_0), \ldots, I(i/n; t/t_0)$. Аналогично, индекс $I_\times(i; t/t_0)$ изменения сводного мультипликативного показателя меновой ценности $I_\times(i)$ можно представить в виде среднего геометрического $I_\times(i;\ t/t_0) = [I(i/1;\ t/t_0)\cdot\ldots\cdot I(i/n;\ t/t_0)]^{1/n}$ тех же простейших индексов изменения.

Предложенный выше способ построения индексов изменения показателей меновой ценности простых благ можно применить и при построении индексов изменения показателей меновой ценности составных экономических благ. При таком подходе индексом $I(\bar{v}/k;t/t_0)$ изменения простейшего показателя $I(\bar{v}/k)$ меновой ценности агрегированного блага $\bar{v}=(v_1,...,v_n)$ служит отношение $I(\bar{v}/k;t/t_0)=I(\bar{v}/k;t)/I(\bar{v}/k;t_0)$ значений простейшего показателя меновой ценности этого композитного блага, наблюдаемых в моменты времени t_0 и t. Введенный индекс $I(\bar{v}/k;t/t_0)$ допускает простое выражение через коэффициенты обмена $c(i,\ k;\ t)$ и $c(i,\ k;\ t_0)$: $I(\bar{v}/k;t/t_0)=[v_1\,c(1,k;t)+...+v_n c(n,k;t)]\,/\,[v_1\,c(1,k;t_0)+...+v_n c(n,k;t_0)]$. Это выражение индекса $I(\bar{v}/k;t/t_0)$ можно преобразовать во взвешенное среднее арифметическое $I(\bar{v}/k;t/t_0)=w_1(t_0)\,I(1/k;t/t_0)+...+w_n(t_0)\,I(n/k;t/t_0)$ простейших индексов изменения, где весовые коэффициенты $w_1(t_0),\ \ldots,\ w_n(t_0)$ ($w_i(t_0)\geq 0,\ w_1(t_0)+\ldots+w_n(t_0)=1$) определяются по формуле $w_i(t_0) = [v_i\ c(i,\ k;\ t_0)]\ /\ [v_1\ c(1,\ k;\ t_0) +\ldots+ v_n c(n,\ k;\ t_0)]$. Компоненты $v_1,\ \ldots,\ v_n$ композитного экономического блага $\bar{v}$ определяются по вектору $\bar{w}(t_0)=(w_1(t_0),...,w_n(t_0))$ положительных весовых коэффициентов формулой v_i = $= [w_i(t_0)\ /\ c(i,\ k;\ t_0)]\ /\ [w_1(t_0)\ /\ c(1,\ k;\ t_0) +\ldots+ w_n(t_0)\ /\ c(n,\ k;\ t_0)]$.

Индекс изменения $I_+(\bar{v};t/t_0)$ *сводного аддитивного монетарного показателя* $I_+(\bar{v})$ *меновой ценности агрегированного экономического блага* $\bar{v}=(v_1,...,v_n)$ может быть определен как отношение $I_+(\bar{v};t/t_0)=I_+(\bar{v};t)/I_+(\bar{v};t_0)$ и представлен в виде взвешенного среднего арифметического $I_+(\bar{v};t/t_0)=w_1(t_0)\,I_+(1;t/t_0)+...+w_n(t_0)\,I_+(n;t/t_0)$ индексов изменения $I_+(1;\ t/t_0),\ \ldots,\ I_+(n;\ t/t_0)$ сводных аддитивных монетарных показателей $I_+(1),\ \ldots,\ I_+(n)$ меновой ценности простых экономических благ $g_1,\ \ldots,\ g_n$.

Индекс изменения $I_\times(\bar{v};t/t_0)$ *сводного мультипликативного монетарного показателя* $I_\times(\bar{v})$ *меновой ценности агрегированного экономического блага* $\bar{v}=(v_1,...,v_n)$ может быть определен как отношение $I_\times(\bar{v};t/t_0)=I_\times(\bar{v};t)/I_\times(\bar{v};t_0)$ и представлен в виде среднего геометрического $I_\times(\bar{v};t/t_0)=[I(\bar{v}/1;t/t_0)\cdot...\cdot I(\bar{v}/n;t/t_0)]^{1/n}$ простейших индексов изменения $I(\bar{v}/1;t/t_0),...,I(\bar{v}/n;t/t_0)$ меновой ценности агрегированного блага $\bar{v}$. Указанное представление индекса изменения $I_\times(\bar{v};t/t_0)$ в виде среднего геометрического может быть преобразовано в представление этого индекса в виде взвешенного среднего арифметического $I_\times(\bar{v};t/t_0)=w_1(t_0)\,I_\times(1;t/t_0)+...+w_n(t_0)\,I_\times(n;t/t_0)$ индексов изменения $I_\times(1;\ t/t_0),\ \ldots,\ I_\times(n;\ t/t_0)$ сводных мультипликативных показателей $I_\times(1),\ \ldots,\ I_\times(n)$ меновой ценности простых экономических благ $g_1,\ \ldots,\ g_n$.

Система построенных индексов $I(i/k;\ t/t_0)$, $I_+(i;\ t/t_0)$, $I_\times(i;\ t/t_0)$, $I(\bar{v}/k;t/t_0)$, $I_+(\bar{v};t/t_0), I_\times(\bar{v};t/t_0)$ изменения простейших и сводных монетарных показателей $I(i/k), I_+(i), I_\times(i), I(\bar{v}/k), I_+(\bar{v}), I_\times(\bar{v})$ меновой ценности простых и составных экономических благ является согласованной с основными методами обработки статистической информации о динамике переменных коэффициентов обмена $c(i,\ j;\ t)$, $c(\bar{v},k;t), c(\bar{v},\bar{v}';t)$ простых и композитных экономических благ, что дает возможность решать ряд практических задач в области экономики и финансов. Действительно, пусть временные ряды $c(i,\ j;\ t)$, $t = 1,\ \ldots,\ T$, значений коэффициентов обмена могут быть интерпретированы как реализации (выборочные значения) соответствующих случайных величин $\tilde{c}(i,j),\ i,j=1,...,n$. Зафиксируем также значение $\tilde{c}(i,j;t_0)=c(i,j;\ t_0)$ случайного коэффициента обмена в точке $t_0\in\{1,\ldots,T\}$ начала отсчета времени. Тогда и временные ряды $I(i;t/t_0), I_+(\bar{v};t/t_0), I_\times(\bar{v};t/t_0),\ t=1,...,T$, значений индексов изменения сводных монетарных показателей меновой ценности простых и агрегированных экономических благ можно рассматривать как реализации случайных величин $\tilde{I}(i;\ t_0), \tilde{I}_+(\bar{v};\ t_0), \tilde{I}_\times(\bar{v};\ t_0)$ соответственно.

Поставим теперь задачу определения оценок математического ожидания $E(\tilde{I}_+(\bar{v};t_0))$ и дисперсии $D(\tilde{I}_+(\bar{v}))$ случайного индекса $\tilde{I}_+(\bar{v};t_0)$ изменения сводного аддитивного монетарного $I_+(\bar{v})$ показателя меновой ценности составного блага $\bar{v}=(v_1,...,v_n)$ по оценкам этих статистических параметров для случайных индексов $\tilde{I}_+(i;t_0), i=1,\ ...,\ n,$ изменения меновой ценности простых экономических благ. Воспользуемся указанным ранее представлением случайного индекса $\tilde{I}_+(\bar{v};t_0)$ в виде взвешенного среднего арифметического случайных индексов $\tilde{I}_+(1;t_0),...,\tilde{I}_+(n;t_0)$ изменения сводных аддитивных монетарных показателей $I_+(1)$, …, $I_+(n)$ меновой ценности простых благ, задаваемого формулой $\tilde{I}_+(\bar{v};t_0)=w_1(t_0)\ \tilde{I}_+(1;t_0)+...+w_n(t_0)\tilde{I}_+(n;t_0)$, $w_i(t_0)=v_i c(i,k;t_0)/[v_1 c(1,k;t_0)+...+v_n c(n,k;t_0)]$.

Такое представление случайного индекса $\tilde{I}_+(\bar{v};t_0)$ в виде линейной комбинации случайных индексов $\tilde{I}_+(1;t_0),...,\tilde{I}_+(n;t_0)$ позволяет выразить математическое ожидание $E(\tilde{I}_+(\bar{v};t_0))$ и дисперсию $D(\tilde{I}_+(\bar{v};t_0))$ случайной величины $\tilde{I}_+(\bar{v};t_0)$ через математические ожидания $E(\tilde{I}(i;t_0))$, дисперсии $D(\tilde{I}_+(i;t_0))$ и ковариации $\operatorname{cov}(\tilde{I}_+(i;t_0), \tilde{I}_+(j;t_0))$, $i\neq j$, $i,\ j=1,...,n$, случайных индексов изменения $\tilde{I}_+(1;t_0),...,\tilde{I}_+(n;t_0)$ сводных аддитивных показателей меновой ценности простых благ: математическое ожидание — $E(\tilde{I}_+(\bar{v};t_0))=w_1(t_0)\,E(\tilde{I}_+(1;t_0))+...+w_n(t_0)\,E(\tilde{I}_+(n;t_0))$; дисперсия — $D(\tilde{I}_+(\bar{v};t_0))=D_+ + C_+$,
где $D_+ = w_1^2(t_0)\,D(\tilde{I}_+(1;t_0))+...+w_n^2(t_0)\,D(\tilde{I}_+(n;t_0))$ есть сумма дисперсий, а $C_+ = w_1(t_0)\,w_2(t_0)\operatorname{cov}(\tilde{I}_+(1;t_0),\tilde{I}_+(2;t_0))+...+w_{n-1}(t_0)w_n(t_0)\operatorname{cov}(\tilde{I}_+(n-1;t_0),\tilde{I}_+(n;t_0))$ — сумма ковариаций случайных индексов $\tilde{I}_+(1;t_0),...,\tilde{I}_+(n;t_0)$.

Статистические же оценки параметров $E(\tilde{I}_+(i;t_0)), D(\tilde{I}_+(i;t_0)), \operatorname{cov}(\tilde{I}_+(i;t_0), \tilde{I}_+(j;t_0))$ случайных величин $\tilde{I}_+(i;t_0), i=1,...,\ n,$ можно получить из исходных данных — наблюдаемых временных рядов значений $c(i,\ j;\ t)$ коэффициентов обмена, построив временные ряды для значений индексов изменения сводных аддитивных монетарных показателей меновой ценности простых благ по формуле $I_+(i;\ t/t_0) = [c(i,\ 1;\ t)\ /\ /\ c(i,\ 1;\ t_0)\cdot\ldots\cdot c(i,\ n;\ t)\ /\ c(i,\ n;\ t_0)]^{1/n}$. Состоятельной несмещенной оценкой математического ожидания $E(\tilde{I}_+(i;t_0))$ случайного индекса $\tilde{I}_+(i;t_0)$ служит выборочное среднее *MEAN* $(I_+(i;\ t_0)) = 1/T\cdot[I_+(i;\ 1/t_0)+\ldots+I_+(i;\ T/t_0)]$, а состоятельной асимптотически несмещенной оценкой дисперсии $D(\tilde{I}_+(i;t_0))$ — выборочная дисперсия $VAR(I_+(i;\ t_0))$, определяемая для временного ряда $I_+(i;\ t/t_0)$, $t = 1,\ \ldots,\ T$ формулой $VAR(I_+(i;\ t_0)) = 1/T\cdot[(I_+(i;\ 1/t_0) - m_i)^2+\ldots+(I_+(i;\ T/t_0) - m_i)^2]$, где $m_i = MEAN\ (I_+(i;\ t_0))$. Состоятельной асимптотически несмещенной оценкой для ковариации $\operatorname{cov}(\tilde{I}_+(i),\tilde{I}_+(j)), i\neq j$, случайных индексов $\tilde{I}_+(i)$, $\tilde{I}_+(j)$ является выборочная ковариация, определяемая формулой $COV\ (I_+(i;\ t_0),\ I_+(j;\ t_0)) = = 1/T\{I_+(i;\ 1/t_0)\cdot I_+(j;\ 1/t_0)+\ldots+I_+(i;\ T/t_0)I_+(j;\ T/t_0)\} - m_i\cdot m_j$, в которой $m_k = MEAN(I_+(k;\ t_0))$, $k = i, j$.

После получения выборочных оценок *MEAN* $(I_+(i;\ t_0))$, *VAR* $(I_+(i;\ t_0))$, *COV* $(I_+(i;\ t_0), I_+(j;\ t_0))$ можно определить состоятельную асимптотически несмещенную выборочную оценку $VAR(I_+(\bar{v};t_0))$ для дисперсии $D(\tilde{I}_+(\bar{v};t_0))$ случайного индекса $\tilde{I}_+(\bar{v})$ по формуле $VAR\ (I_+(\bar{v};t_0)) = VAR_+^{(D)} + VAR_+^{(C)}$, где $VAR_+^{(D)} = w_1^2(t_0)\,D_1+...+w_n^2(t_0)D_n$ есть сумма выборочных оценок $D_i = VAR\ (I_+(i;\ t_0))$ дисперсий $D(\tilde{I}_+(i;t_0))$, а $VAR_+^{(C)} = w_1(t_0)w_2(t_0)\,C_{12}+...+w_{n-1}(t_0)\,w_n(t_0)\,C_{n-1\ n}$ — сумма выборочных оценок $C_{ij} = = COV\ (I_+(i;\ t_0), I_+(j;\ t_0))$ ковариаций $\operatorname{cov}(\tilde{I}_+(i;t_0),\tilde{I}_+(j;t_0))$ случайных индексов изменения сводных аддитивных монетарных показателей меновой ценности простых благ.

Указанное ранее представление индекса $I_\times(\bar{v};t/t_0)$ изменения сводного мультипликативного монетарного показателя $I_\times(\bar{v})$ в виде взвешенного среднего арифметического $I_\times(\bar{v};t/t_0)=w_1(t_0)\,I_\times(1;t/t_0)+...+w_n(t_0)\,I_\times(n;t/t_0)$ индексов $I_\times(1;\ t/t_0)$, …, $I_\times(n;\ t/t_0)$ изменения сводных мультипликативных монетарных показателей $I_\times(1)$,…, $I_\times(n)$ меновой ценности простых экономических благ g_1, …, g_n позволяет повторить все вычисления, проведенные выше для случайного индекса $\tilde{I}_+(\bar{v};t_0)$ изменения сводного аддитивного монетарного показателя $I_+(\bar{v})$, и получить состоятельную асимптотически несмещенную выборочную оценку $D(\tilde{I}_\times(\bar{v};t_0)$ для дисперсии $D(\tilde{I}_\times(\bar{v};t_0))$ случайного индекса $\tilde{I}_\times(\bar{v};t_0)$ изменения сводного мультипликативного монетарного показателя $I_\times(\bar{v})$ меновой ценности агрегированного блага.

Имея для выборочной оценки $VAR\,(I(\bar{v};\ t_0))\,,I(\bar{v};t_0)=I_+(\bar{v};t_0),I_\times(\bar{v};t_0),$ дисперсии $D(\tilde{I}(\bar{v};t_0))$, $I(\bar{v};t_0)=I_+(\bar{v};t_0),I_\times(\bar{v};t_0),$ случайного индекса изменения сводного монетарного показателя меновой ценности составного блага $\bar{v}=(v_1,...,v_n)$ представление в виде квадратичной формы $S^2(\bar{w}(t_0))=VAR\,(I(\bar{v};t_0)),\bar{w}(t_0)=(w_1(t_0),...,w_n(t_0))$, можно поставить и решить следующую оптимизационную задачу: найти вектор $\bar{w}^*(t_0)=(w_1^*(t_0),...,w_1^*(t_0))$, минимизирующий квадратичную форму $S^2(\bar{w}(t_0))$ при линейных ограничениях $w_1^*(t_0)+...+w_n^*(t_0)=1, w_i^*(t_0)\geq 0$. Для решения сформулированной задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями существуют эффективные численные методы[5].

Из введенного предположения о том, что временные ряды значений $c(i,j;t)$, $t=1,\dots,T$, коэффициентов обмена являются реализациями случайных величин $\tilde{c}(i,\ j)$, $i,\ j=1,...,n$, следует, что и временной ряд $I(\bar{v};t/t_0)\,,I(\bar{v};t/t_0)=I_+(\bar{v};t/t_0),I_\times(\bar{v};t/t_0),t=1,...,T$, значений индекса изменения сводного монетарного показателя меновой ценности составного блага $\bar{v}=(v_1,...,v_n)$ образован реализациями случайной величины $\tilde{I}(\bar{v};t_0),\tilde{I}(\bar{v};t_0)=\tilde{I}_+(\bar{v};t_0)\,,\tilde{I}_\times(\bar{v};t_0)$. В этой ситуации дисперсия $D(\tilde{I}(\bar{v};t_0)$ может быть вполне приемлема в качестве меры волатильности значений случайного индекса $\tilde{I}(\bar{v};t_0)$. Однако в действительности изменчивость временного ряда $I(\bar{v};t/t_0)$ может иметь причиной не только рассеяние случайных значений $\tilde{I}(\bar{v};t_0)$ вокруг математического ожидания $E\,\tilde{I}(\bar{v};t_0)$, но и изменение самого этого математического ожидания. В такой ситуации более адекватной мерой волатильности значений случайного индекса $\tilde{I}(\bar{v};t_0)$ относительно начального значения $I(\bar{v};t_0/t_0)=1$ временного ряда $I(\bar{v};t/t_0)$ может служить ожидаемое квадратичное отклонение $E\tilde{I}(\bar{v};t_0-1)^2$ этих значений от единицы. Связь обычной дисперсии и ожидаемого квадратичного отклонения от единицы задается соотношением $E[\tilde{I}(\bar{v};t_0)-1]^2=D\,\tilde{I}(\bar{v};t_0)+[E\,\tilde{I}(\bar{v};t_0)-1]^2$.

По найденным оптимальным весовым коэффициентам $w_1^*(t_0),...,w_n^*(t_0)$ можно определить компоненты составного блага $\bar{v}=(v_1^*,...,v_n^*)$, обладающего минимальной выборочной дисперсией $VAR\ (I(\bar{v}^*;t_0))$ индекса изменения сводного монетарного показателя меновой ценности, по указанной ранее формуле. Поскольку выборочная дисперсия $VAR\,(I(\bar{v};t_0))$ может служить мерой волатильности (изменчивости) меновой ценности составного базового блага $\bar{v}=(v_1,...,v_n)$ на интервале времени, определяемом дискретными моментами $t=0,1,\dots,T$, постольку базовое составное благо $\bar{v}=(v_1^*,...,v_n^*)$, обладающее в этом смысле минимальной изменчивостью, можно назвать *стабильным агрегированным благом*. В случае, когда рассматриваемые простые экономические блага представляют собой валюты разных государств, употребляются термин *стабильная агрегированная валюта* и аббревиатура *SAC* (*Stable Aggregated Currency*).

Заключение

Определенные в последнем разделе агрегированные блага и валюты минимальной волатильности (минимального риска) оказались весьма гибким и полезным экономико-математическим инструментом[6]. Например, весьма перспективным представляется использование разработанного аппарата создания таких валютных и/или товарных «корзин» для создания региональных и мировых денег[7]. Возможно также формирование валютно-товарных «корзин» минимального риска, выступающих в качестве «якоря» (*anchor*) для конкурирующих с национальной валютой так называемых «частных денег», эмитируемых различными субъектами политико-экономической жизни национального государства (общины, муниципалитеты разных уровней, крупные банки, корпорации и т. д.)[8]. Упомянем, наконец, о возможности использования агрегированных валют минимального риска для адекватной оценки активов транснациональных корпораций[9].

Рассмотренные иллюстрации применения агрегированной валюты минимального риска, основанной на концепции индексов изменения сводных монетарных показателей меновой ценности составных экономических благ, свидетельствуют, по нашему мнению, о перспективности применения разработанных экономико-математических методов как для изучения динамки валютных курсов и товарных цен, так и для управления валютными и ценовыми рисками путем создания стабильных метаденег (*meta-money, meta-currency*), представляющих собой агрегаты национальных валют и/или других экономических ценностей[10].

---

[1] *Хитров Г. М., Хованов Н. В.* Простая модель обмена: основные предположения и ближайшие следствия // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 1992. Вып. 4. С. 101–106.

[2] *Leontief W.* Composite commodities and the problem of index numbers // Econometrica. 1936. Vol. 4. P. 39–59.

[3] *Джини К.* Средние величины. М., 1970.

[4] *Хованов Н. В.* Простая модель обмена: теория стохастических индексов меновой ценности экономических благ // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 2003. Вып. 2. С. 75–91; *Brodsky D.* Arithmetic versus geometric effective exchange rates // Weltwirtschaftliches Archiv. 1982. Bd 118. P. 546–562; *Fisher I.* The Making of Index Numbers. Boston; New York, 1922.

[5] *Полак Э.* Численные методы оптимизации. М., 1974.

[6] *Хованов Н. В.* Измерение меновой ценности экономических благ в единицах стабильной агрегированной валюты // Финансы и бизнес. 2005. № 2. С. 33–43; *Hovanov N. V., Kolari J. W., Sokolov M. V.* Computing currency invariant indices with an application to minimum variance currency // The Journal of Economic Dynamics and Control. 2004. Vol. 28. P. 1481–1504.

[7] *Колари Дж. В., Сутырин С. Ф., Хованов Н. В.* Об одном подходе к формированию коллективных валют региональных объединений стран СНГ // Материалы международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы теории и практики государственного регулирования внешнеэкономической деятельности». СПб., 2005. С. 98–107; *Mundell R.* Currency areas, exchange rate systems and international monetary reform // Journal of Applied Economics. 2000. Vol. 3. P. 217–256.

[8] *Hayek F.* Denationalization of money: an analysis of the theory and practice of concurrent currencies. London, 1976.

[9] *Hovanov N. V., Kolari J. W., Sokolov M. V., Sutyrin S. F.* Transnational corporations multicurrency assets denomination in units of an aggregated minimal risk currency // Proceedings of the Fifth International Scientific School «Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems». SPb.: RAS, 2005. P. 179–186; *Ijiri Y.* Global financial reporting using a composite currency: an aggregation theory perspective // The International Journal of Accounting. 1995. Vol. 30. P. 95–106; *Troberg P.* Global currency unit: a balanced approach to performance evaluation in multinational enterprises // Working paper of Swedish School of Economics. Series C. Helsinki, 1994.

[10] *Хованов Н. В.* 1) Феноменологическая теория стабильных метаденег // Материалы международной научной конференции «Экономическая наука в начале третьего тысячелетия: история и перспективы развития». Секции 4–8. СПб., 2005. С. 34–37; 2) Феноменологическая теория метаденег // Финансы и бизнес. 2005. № 4. С. 18–21; *Hovanov N. V., Kolari J. W., Sokolov M. V, Sutyrin S. F.* Meta-money: theory and application under risk and instability // Proceedings of the Sixth International Scientific School «Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex systems». SPb.: RAS, 2006. P. 240–247.

Статья поступила в редакцию 19 апреля 2007 г.