ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Р. О. Смирнов

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕГРЕССИВНЫХ НАЛОГОВЫХ ШКАЛ

В статье исследуется сравнительно новый подход к выбору налоговых шкал, предложенный проф. С.В. Чистяковым. Он основан на системе математических моделей,[1] которая представляет собой модификацию и развитие более ранней вариационной модели.[2] Рассматриваемый подход предполагает сначала определение модельной шкалы средних ставок налога, а затем построение по ней налоговой шкалы предельных ставок. Первоначально он был описан для выбора прогрессивных налоговых шкал. Далее, применительно к единому социальному налогу (ЕСН), была исследована теоретико-игровая модель выбора регрессивной шкалы средних ставок налога.[3] Эта модель позволяет получить функцию $y^* = y^*(x) \in (0,1)$, $x \in [0, +\infty)$, задающую оптимальную регрессивную шкалу средних ставок ЕСН, которая имеет вид[4]

$$y^*(x) = \begin{cases} y_-, & 0 \le x < x_-, \\ y_-\left(\dfrac{x}{x_-}\right)^{\sigma}, & x_- \le x < x_0, \\ y_+\left(\dfrac{x}{x_+}\right)^{\delta}, & x_0 \le x \le x_+, \\ y_+, & x > x_+, \end{cases} \tag{1}$$

где точка переключения x_0 вычисляется по формуле

$$x_0 = \left(\frac{y_+}{y_-}\frac{x_-^{\sigma}}{x_+^{\delta}}\right)^{\frac{1}{\sigma-\delta}},$$

x – фонд оплаты труда (ФОТ) в среднем на одного работника, y_- и y_+ – соответственно максимальная и минимальная средние ставки налога, σ и δ – максимальное и минимальное (на отрезке $[x_-, x_+]$) значения эластичности налоговой шкалы $y^* = y^*(x)$; x_- –

СМИРНОВ
Ростислав Олегович
– канд. экон. наук, доцент кафедры экономической теории и социальной политики СПбГУ. Работает на экономическом факультете с 1985 г. после окончания факультета прикладной математики – процессов управления. В 1992 г. окончил аспирантуру экономического факультета по специальности «экономико-математические методы». Сфера научных интересов – экономика государственного сектора, теория оптимального налогообложения. Автор более 40 научных работ.

порог регрессии,* x_+ – величина ФОТ, начиная с которой налог взимается по минимальной (средней) ставке.

Функция $y^* = y^*(x)$, определяемая по формуле (1), удовлетворяет условиям

$$\delta \frac{y}{x} \le \frac{dy}{dx} \le \sigma \frac{y}{x}, \ \forall x \in [x_-, x_+], \quad (2)$$

$$(-1 < \delta \le \sigma < 0),$$

$$y(x_-) = y_-, \ y(x_+) = y_+, \quad (3)$$

$$(0 < x_- < x_+, \quad 0 < y_+ < y_- < 1).$$

Практическое использование оптимальной модельной шкалы (1) затруднено тем, что она не может быть представлена в форме таблицы (шкалы предельных ставок налога), в которой обычно задают налоговую шкалу. Поэтому возникает задача о наилучшем приближении модельной налоговой шкалы такими шкалами средних ставок налога, которые допускают привычное табличное представление. Опишем решение данной задачи по аналогии с тем, как это было сделано ранее для прогрессивной налоговой шкалы.[5]

Регрессивная шкала предельных ставок налога

Границы диапазонов, a_i	**Ставка налога,** η_i	**Сумма налога,** $M(x)$
$x \le a_0$	η_0	$M(x) = \eta_0 x$
$a_0 < x \le a_1$	η_1	$M(x) = \eta_0 a_0 + \eta_1 (x - a_0)$
…	…	…
$a_{n-2} < x \le a_{n-1}$	η_{n-1}	$M(x) = \eta_0 a_0 + \sum_{j=1}^{n-2} \eta_j (a_j - a_{j-1}) + \eta_{n-1}(x - a_{n-2})$
$a_{n-1} < x < +\infty$	η_n	$M(x) = \eta_n x$

Как известно, таблица, задающая регрессивную шкалу предельных ставок налога, состоит из определенного числа *n* диапазонов налоговой базы x (в частности, фонда оплаты труда), границ этих диапазонов $(a_i, i = 0, \ldots, n-1)$, а также предельных ставок налога $(\eta_i, i = 0, \ldots, n)$. Таким образом, регрессивную шкалу предельных ставок налога задают $2n+1$ числовых параметра. Кроме того, в таблицу для удобства расчетов помещается информация о правилах вычисления суммы налога $M(x)$ (таблица).

* Порог регрессии – величина ФОТ в среднем на одного работника, при превышении которой ставка налога начинает уменьшаться.

Границы диапазонов шкалы a_0, a_1, ..., a_{n-1} удовлетворяют условию

$$0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}. \tag{4}$$

Граница a_0 определяет порог регрессии.

В свою очередь для регрессивной налоговой шкалы предельные ставки η_0, η_1,..., η_n должны удовлетворять ограничениям

$$0 < \eta_{n-1} < \ldots < \eta_1 < \eta_0 < 1,\ 0 < \eta_n < 1, \tag{5}$$

при этом ставка η_n может быть больше η_{n-1}. Это объясняется тем, что на практике применяются два типа шкал. В шкалах первого типа, которые, например, использовались в российской системе подоходного налогообложения, по ставке η_n облагается лишь та часть налоговой базы, которая превышает a_{n-1}. В шкалах второго типа по ставке η_n облагается вся налоговая база x, если она больше чем a_{n-1}. Таким образом, для шкал второго типа предельная ставка η_n в последнем диапазоне совпадает со средней ставкой в этом диапазоне. Более того, для регрессивной шкалы эта ставка является минимальной средней ставкой налога для всей шкалы в целом. Шкалы второго типа используются, в частности, в США.[6] Рассматриваемые модели ориентированы на построение шкал второго типа.

По таблице предельных ставок налога всегда можно построить функцию $y = y(x)$, задающую шкалу средних ставок налога. Нетрудно видеть, что эта функция определяется по формуле

$$y(x) = \frac{N(x)}{x}. \tag{6}$$

В явном виде, пользуясь этой формулой и таблицей, находим

$$y(x) = \begin{cases} \eta_0, & x \le a_0, \\ \eta_1 - \dfrac{a_0(\eta_1 - \eta_0)}{x}, & a_0 \le x \le a_1, \\ \eta_2 - \dfrac{a_1(\eta_2 - \eta_1) + a_0(\eta_1 - \eta_0)}{x}, & a_1 \le x \le a_2, \\ & \ldots \\ \eta_{n-1} - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{x}, & a_{n-2} \le x \le a_{n-1}, \\ \eta_n, & a_{n-1} \le x \le \infty. \end{cases} \tag{7}$$

Из формулы (7) видно, что данная функция однозначно определяется $2n+1$ числовыми параметрами $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, η_0, $\eta_1, ..., \eta_n$, которые задают шкалу предельных ставок налога, т.е. $y(x) = y(x; a_0, a_1, ..., a_{n-1}, \eta_0, \eta_1, ..., \eta_n)$. Для того чтобы использовать функции вида (7) в качестве допустимых приближений оптимальной модельной шкалы средних ставок налога (1), необходимо ограничить эти функции и соответственно определяющие их $2n+1$ параметра теми же условиями (2) и (3), которые накладывались на выбор оптимальной модельной шкалы. Рассмотрим эти ограничения подробнее.

В соответствии с выбором краевых условий (3) должны выполняться следующие равенства:

$$a_0 = x_-, \ a_{n-1} = x_+, \eta_0 = y_-, \ \eta_n = y_+, \qquad (8)$$
$$(0 < x_- < x_+, \quad 0 < y_+ < y_- < 1).$$

Объединяя ограничения (4), (5) и (8), получим

$$x_- = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} = x_+,$$
$$0 < \eta_{n-1} < ... < \eta_1 < \eta_0 < 1,$$
$$\eta_0 = y_-, \ \eta_n = y_+.$$

Вместо последних ограничений далее будем рассматривать следующие более слабые ограничения:

$$x_- = a_0 \le a_1 \le ... \le a_{n-1} = x_+, \qquad (9)$$

$$0 \le \eta_{n-1} \le ... \le \eta_1 \le \eta_0 \le 1, \qquad (10)$$

$$\eta_0 = y_-, \ \eta_n = y_+. \qquad (11)$$

Переход к нестрогим неравенствам обусловлен тем, что к классу допустимых приближений мы будем относить налоговые шкалы с не более чем n диапазонами, тогда как строгие неравенства задают шкалы предельных ставок, состоящие в точности из n диапазонов. Действительно, замена одного из соответствующих строгих неравенств, кроме неравенств $0 < \eta_{n-1}$ и $\eta_0 < 1$, на равенство фактически приводит к уменьшению числа диапазонов на единицу. Замена строгих неравенств $0 < \eta_{n-1}$ и $\eta_0 < 1$ на нестрогие неравенства осуществлена с целью обеспечения замкнутости множества допустимых приближений.

Вместо неявного ограничения (2) на выбор параметров a_0, a_1, ..., a_{n-1}, η_0, η_1, ..., η_n, выпишем равносильную ему систему явных ограничений на выбор этих параметров. С этой целью представим ограничение (2) в виде

$$\delta \le \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} \le \sigma, \ x \in [a_{k-1}, a_k], \ k = 1,2,...,n-1.$$

Вычислив производную функции $y(x) = y(x; a_0, a_1, ..., a_{n-1}, \eta_0, \eta_1, ..., \eta_n)$, которая определяется по формуле (7), на промежутке $[a_{k-1}, a_k]$, после ряда несложных преобразований окончательно получим, что последние ограничения равносильны следующим двум системам ограничений:

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \le [\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) - \eta_k a_k]\sigma, \tag{12}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \ge [\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) - \eta_k a_k]\delta, \tag{13}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

Вне зависимости от выбора параметров $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, η_0, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ функция $y = y(x)$, определяемая равенствами (7), будет непрерывной на промежутке $[a_0, a_{n-1})$. Мы рассматриваем шкалы ставок налога, которые непрерывны также и в точке a_{n-1}, а следовательно, и на всем промежутке $[a_0, +\infty)$ (шкалы второго типа). Поэтому будем предполагать, что должно выполняться следующее равенство, гарантирующее непрерывность шкалы в точке a_{n-1}:

$$\eta_{n-1} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{a_{n-1}} = \eta_n.$$

Последнее ограничение, очевидно, можно записать в виде

$$a_{n-1}(\eta_n - \eta_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) = 0. \tag{14}$$

Итак, к классу допустимых приближений K_n будем относить множество всех функций вида (7), для которых определяющие их параметры $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, η_0, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ удовлетворяют системе ограничений (9) – (14).

Как следует из определения класса допустимых приближений K_n и формулы (1), каждая из функций $y(\cdot) \in K_n$ разве лишь только на интервале (x_-, x_+) отличается от оптимальной модельной шкалы $y^*(\cdot)$. Поэтому близость функций $y^*(\cdot)$ и $y(\cdot) \in K_n$ можно оценивать с помощью той или иной метрики на множестве всех непрерывных на отрезке $[x_-, x_+]$ функций. Здесь следует иметь в виду, что функция $y^*(\cdot)$ и каждая из функций $y(\cdot) \in K_n$ являются непрерывными во всей своей области определения, а следовательно, и на сегменте $[x_-, x_+]$.

Пусть $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ — какая-то метрика на соответствующем множестве непрерывных функций. Тогда *задача о наилучшем приближении* функции $y^*(\cdot)$ элементами класса K_n формально описывается следующим образом: найти такую функцию $y^0(\cdot) \in K_n$, что

$$\mathrm{dist}(y^*(\cdot), y^0(\cdot)) = \min_{y(\cdot)\in K_n} \mathrm{dist}(y^*(\cdot), y(\cdot)). \tag{15}$$

Далее будем считать, что в задаче (15) метрика вводится по правилу

$$\operatorname{dist}\left(y^*(\cdot), y(\cdot)\right) = \left(\int_{x_-}^{x_+} \left[y^*(x) - y(x) \right]^2 dx \right)^{1/2}, \tag{16}$$

т.е. как расстояние в пространстве $L_2[x_-, x_+]$. Как можно показать, такой выбор метрики обусловлен тем, что для нее рассматриваемая задача о наилучшем приближении сводится к задаче математического программирования с гладкой целевой функцией, в то время как при другом заслуживающем внимания способе выбора метрики, а именно метрики пространства $C[x_-, x_+]$,

$$\operatorname{dist}\left(y^*(\cdot), y(\cdot)\right) = \max_{x \in [x_-, x_+]} \left| y^*(x) - y(x) \right|$$

задача (15) сводится к негладкой задаче конечномерной оптимизации.

Опишем задачу математического программирования, к которой сводится задача (15) – (16).

Поскольку $y^*(\cdot)$ – известная функция, определяемая по формуле (1), а функция $y(\cdot) \in K_n$ однозначно определяется параметрами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, η_0, $\eta_1, \ldots, \eta_n$, то расстояние (16) представляет собой некоторую функцию этих параметров. Поэтому, в частности,

$$\left[\operatorname{dist}\left(y^*(\cdot), y(\cdot)\right)\right]^2 = f\left(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n\right). \tag{17}$$

Учитывая данное обстоятельство и то, что множество допустимых приближений K_n можно отождествить с множеством решений системы (9) – (14), задача (15) – (16) сводятся к следующей задаче конечномерной оптимизации:

$$f\left(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n\right) \to \min,$$

при ограничениях

$$x_- = a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_{n-1} = x_+,$$

$$0 \le \eta_{n-1} \le \ldots \le \eta_1 \le \eta_0 \le 1,$$

$$\eta_0 = y_-, \ \eta_n = y_+.$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}\left(\eta_i - \eta_{i-1}\right) \le \left[\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}\left(\eta_i - \eta_{i-1}\right) - \eta_k a_k\right]\sigma,$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}\left(\eta_i - \eta_{i-1}\right) \ge \left[\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}\left(\eta_i - \eta_{i-1}\right) - \eta_k a_k\right]\delta,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$a_{n-1}\left(\eta_n - \eta_{n-1}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i-1}\left(\eta_i - \eta_{i-1}\right) = 0.$$

Таким образом, в целом исследуемый подход позволяет свести проблему выбора $2n+1$ параметров регрессивной шкалы предельных ставок налога, к задаче определения лишь шести входных параметров модели (1) – (3), задающих оптимальную шкалу средних ставок налога (1), а именно: x_-, x_+, y_-, y_+, σ и δ (заметим, что $2n+1 > 6$, если число диапазонов таблицы налогов n не меньше 3).

[1] Ч и с т я к о в С. В., И ш х а н о в а М. В. Математические модели выбора налоговых шкал: Учеб. пособие. СПб., 1998.

[2] С м и р н о в Р. О., Ч и с т я к о в С. В. К вопросу об определении налоговой политики при размещении государственных заказов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5. 1990. Вып. 3. С. 131–132; С м и р н о в Р. О., Ч и с т я к о в С. В. О ставках налогообложения как инструменте государственного регулирования // Экономика и мат. методы. 1993. Т. 29. Вып. 2. С. 268–274.

[3] С м и р н о в Р. О., Ч и с т я к о в С. В. Моделирование выбора регрессивной шкалы единого социального налога // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5. 2003. Вып. 4 (№ 29). С. 79–85.

[4] Там же. С. 84.

[5] Ч и с т я к о в С. В., И ш х а н о в а М. В. Указ. соч. С. 31–44.

[6] С т и г л и ц Дж. Ю. Экономика государственного сектора / Пер. с англ. М., 1997. С. 477.

Статья поступила в редакцию 24 марта 2005 г.