Н. В. Калашникова

ОБЩИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ НА РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

В условиях отсутствия возможности совершения арбитражных операций цена финансового актива может быть представлена в виде следующего уравнения:

$$P = E[MX], \tag{1}$$

где P — цена актива, X — выплата по активу, M — некоторая случайная величина, моделирующая эффект дисконтирования, E — оператор математического ожидания.

Основа подобного подхода разработана С. Россом[1], который продемонстрировал, что при отсутствии на рынке возможностей арбитража существует линейный ценовой оператор, позволяющий определить цену любого актива при условии, что его денежные потоки могут быть представлены в виде набора денежных потоков рыночных ценных бумаг. Дж. М. Харрисон и Д. Крепс[2] и Л. П. Хансен и С. Ричард[3] обобщили данный подход, обосновав его для широкого класса моделей ценообразования финансовых активов, выплаты по которым удовлетворяют ограничениям конечности вторых моментов.

Структура рассматриваемого авторами финансового рынка является достаточно общей, позволяя включать различные виды финансовых активов, выплаты по которым моделируются с помощью случайных величин с конечными вторыми моментами.

В научной литературе модель, основным результатом которой является уравнение (1), часто называется общей моделью ценообразования на финансовые активы. Случайная величина M также получила устойчивое наименование: стохастический множитель дисконтирования (англ. *Stochastic discount factor*) или ценовое ядро (англ. *Pricing kernel*).

Практическое значение возможности представления цен финансовых активов с помощью уравнения (1) складывается из следующих пунктов:

1) ввиду нежесткости исходных предпосылок общей модели ценообразования, в виде уравнения (1) могут быть представлены результаты достаточно широкого класса известных моделей ценообразования на финансовые активы, включая модели CAPM, CCAPM, модель APT, ряд моделей ценообразования облигаций и опционов;

Наталия Владимировна КАЛАШНИКОВА — начальник отдела управления рисками ОАО Международный Банк С.-Петербурга. Окончила экономический факультет СПбГУ в 2001 г. и аспирантуру в 2003 г. Автор 7 публикаций. Научные интересы — теория ценообразования и управление рисками.

2) при сравнении нескольких моделей ценообразования, используемых для оценки одного и того же вида финансовых активов, различие в спецификации уравнений ценообразования будет определяться различием в спецификации величины M; таким образом, допустимость модели ценообразования определяется допустимостью ее ценового ядра;

3) в качестве метода оценки уравнений вида (1) стал использоваться обобщенный метод моментов (ОММ), с помощью которого, как показал Л. П. Хансен[4], можно построить состоятельную, асимптотически нормальную и асимптотически эффективную оценку параметров, т. е. такую оценку, которая имеет наименьшую ковариационную матрицу среди всех возможных оценок, минимизирующих величину выборочного среднего ошибок;

4) уравнение (1) позволяет включать в рассмотрение так называемую условную информацию (переменные, отражающие влияние информационного множества инвестора), не создавая трудностей при оценивании.

Связь между линейной факторной моделью и общей моделью ценообразования может быть сформулирована в виде следующего утверждения (С. Росс, а также Ф. Дыбвиг и Дж. Ингерсолл[5]) .

Утверждение

Если имеется модель вида $M = a + b^T f$, $1 + E(MR)$, (2)

где f — набор факторов, существуют α и λ такие, что $E(R) = \alpha + \lambda^T \beta_i$, (3)

где β_i — коэффициенты множественной регрессии доходности актива R на факторы риска f, $\beta_i \equiv E(ff^T)^{-1}E(fR)$, α — константа.

Обратно: для α и λ, удовлетворяющих соотношению (3), можно найти коэффициенты a и b такие, что выполняется соотношение (2).

В этом случае связь между парами (α, λ) и (a, b) определяется с помощью

$$\alpha \equiv \frac{1}{E(M)} = \frac{1}{a},\ \lambda \equiv -\frac{1}{a}E\left(ff^T\right)b = -\alpha E(Mf).$$

Для модели CAPM основное уравнение — линия рынка ценных бумаг — может быть переписано как

$$E\left[\overline{R}_t M_t\right] = 0,\ M_t = \left(1 - \delta \overline{R}_t^M\right),$$

где $E\overline{R}_t = ER_t - R^f$, $E\overline{R}_t^M = \left(ER_t^M - R^f\right)$, $\delta = \dfrac{E\overline{R}_t^M}{\mathrm{var}\left(\overline{R}_t^M\right) - \left(E\overline{R}_t^M\right)^2}$.

Для моделей ценообразования с учетом потребительских предпочтений

$$1 = \beta E_t\left[\frac{U'\left(C_{t+1}\right)}{U'\left(C_t\right)} R_{t+1}\right], \tag{4}$$

где C_t — объем потребления товаров и услуг в период t; $U(C_t)$ — величина полезности в период t; $U: R^+ \to R^+$, непрерывно дифференцируемая, ограниченная, возрастающая, строго вогнутая функция; $U(0) = 0$; $0 \le b = 1/(1+q) \le 1$ — фактор дисконтирования предпочтений и θ — соответствующая норма дисконта.

В этом случае ценовое ядро M в модели CCAPM равно

$$M_{t+1} = \beta \frac{U'\left(C_{t+1}\right)}{U'\left(C_t\right)}, \tag{5}$$

что позволяет интерпретировать величину M как предельную норму замещения потребления инвестора.

В модели Блэка–Шоулза цена опциона удовлетворяет следующему уравнению[6]:

$$E\left[e^{\beta^T R_{t+\Delta t}} R_{t+\Delta t}\right] = 1, \tag{6}$$

где логарифм величины M определяется как сумма логарифма доходности портфеля, состоящего из базисного актива S_t с динамикой $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ и денежного депозита B_t с непрерывно начисляемой доходностью r, $B_{t+\Delta t} = e^{r\Delta t} B_t$:

$$\ln\left(M_{t,t+\Delta t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mu}{r\sigma^2}\left(\mu - \sigma^2\right)\ln\left(\frac{B_{t,t+\Delta t}}{B_t}\right) + \frac{-\mu}{\sigma^2}\ln\left(\frac{S_{t,t+\Delta t}}{S_t}\right) = \beta^T R^*_{t,t+\Delta t}\,. \tag{7}$$

Обобщенный метод моментов

Основные предпосылки ОММ — стационарность и эргодичность исходного случайного процесса, реализациями которого являются последовательности выплат и цен активов.

Уравнение ценообразования (1) предполагает, что

$$E(P_t) = E\,[M_{t+1}\,(\theta)\,X_{t+1}], \tag{8}$$

где $X_{t+1} = \left(X^1_{t+1}, X^2_{t+1}, \ldots, X^n_{t+1}\right)^T$ — вектор выплат по активу; $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ — вектор неизвестных параметров модели; $M_{t+1} = \left(M^1_{t+1}, M^2_{t+1}, \ldots, M^n_{t+1}\right)$ — вектор стохастического множителя дисконтирования; $P_{t+1} = \left(P^1_{t+1}, P^2_{t+1}, \ldots, P^n_{t+1}\right)^T$ — вектор цен активов.

Пусть величина $g_T(\theta)$ — это выборочное среднее ошибок оценивания в выборке объема T, когда в качестве параметра $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ взято его истинное значение:

$$g_T(\theta) \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_{t+1}(\theta) = E_T\left[u_{t+1}(\theta)\right] = E_T\left[M_{t+1}(\theta) X_{t+1} - P_t\right].$$

На первом шаге ОММ решается задача поиска такого значения $\theta_1 \in R^k$, при котором достигается минимум выборочного среднего ошибок:

$$J_T(\theta_1) = \min\left[g_T(\theta)^T W_T\, g_T(\theta)\right], \forall\theta \in R^k\,,$$

где W_T — симметричная положительно определенная матрица, размерностью $n x n$ (обычно это единичная матрица).

Оценка первого шага ОММ θ_1 — состоятельная и асимптотически нормальная.

На втором шаге ОММ с помощью оценки θ_1 строится оценка S матрицы ковариаций ошибок

$$S \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} E u_t(\theta)\; u_{t-j}(\theta)^T\,.$$

С помощью матрицы S строится оценка θ_2, такая что

$$J_T(\theta_2) = \min\left[g_T(\theta)^T S^{-1} g_T(\theta)\right], \forall\theta \in R^k\,.$$

Необходимое условие существования экстремума функции записывается в виде

$$\frac{\partial g_T(\theta)^T}{\partial\theta} W_T\, g_T \theta = 0\,,$$

где $\dfrac{\partial g_T(\theta)}{\partial\theta} = E_T\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(M_{t+1}(\theta) X_{t+1} - P_t\right)\right)\Big|_{\theta=\theta}\,.$

Оценка второго шага ОММ θ_2 — состоятельная, асимптотически нормальная и асимптотически эффективная оценка вектора параметров θ. Эффективность оценки означает, что она имеет наименьшую ковариационную матрицу среди всех возможных оценок, минимизирующих величину $J_T(\theta_2)$.

Для проверки значимости модели в целом, т. е. насколько хорошо она описывает имеющиеся данные выборки, используется тест сверхидентифицируемых ограничений, предложенных Л. Хансеном:

$$TJ_T(\theta_2) = T\min\left[g_T(\theta)^T S^{-1} g_T(\theta)\right] \sim x^2(a_1),$$

где число степеней свободы a_1 равно разности между количеством моментов (n) и числом параметров (k).

Представление цены финансового актива в виде (1) позволяет строить так называемые условные модели ценообразования, переменные которых (факторы и доходности) зависят от некоторого информационного множества:

$$P_t = E(M_{t+1}X_{t+1}\text{S}I_t) = E_t(M_{t+1}X_{t+1}). \quad (9)$$

Для того чтобы построить оценку подобной модели, используют процедуру масштабирования (англ. *scaling*): множество выплат расширяется путем включения в него выплат, масштабированных с помощью переменных из множества I_t, называемых инструментами; затем проводится обычная процедура ОММ, т. е. используются следующие ортогональные ограничения:

$$E(P_t \otimes Z_t) = E[M_{t+1}(X_{t+1} \otimes Z_t)],\ Z_t \in I_t, \quad (10)$$

где $\otimes$ — произведение Кронекера (каждый элемент вектора выплат умножается на каждый элемент вектора инструментов).

Уравнение (10) является следствием (9), поскольку получено путем умножения обеих частей на Z_t и применением оператора безусловного математического ожидания. Обратное верно лишь в случае, если (10) выполняется для всех инструментов Z_t из информационного множества I_t.

Подобная процедура масштабирования имеет интуитивно понятную интерпретацию: масштабированные выплаты $X_{t+1} \otimes Z_t$ трактуются как выплаты на портфели в управлении инвестиционного менеджера, который вкладывает в них больше или меньше средств в зависимости от информационного сигнала Z_t.

Таким образом, с помощью масштабирования множества выплат можно тестировать условные моменты модели ценообразования, применяя методы, основанные на тестировании безусловных моментов.

Другим распространенным вариантом масштабирования является масштабирование факторов в структуре ценового ядра. Данная процедура позволяет оценить параметры динамической модели, которые меняются с течением времени, вводя предположение о том, что они зависят от некоторых переменных, находящихся в информационном множестве инвестора

$$M_{t+1} = b_t^T f_t = b_t^T(Z_t) f_t = b^T Z_t f_t, Z_t \in I_t\ .$$

В этом случае параметры модели становятся постоянными при помощи включения в модель новых переменных, получаемых путем масштабирования исходных факторов с помощью инструментов Z_t из множества I_t

$$M_{t+1} = b^T(f_t \otimes Z_t),\ Z_t \,\text{O}\, I_t,$$

где ⊗ — произведение Кронекера.

Таким образом, процедура масштабирования факторов позволяет провести полный тест динамической, условной факторной модели ценообразования на основе инструментов.

В качестве инструментов моделей могут использоваться как новые переменные, так и те, которые уже включены в модель в качестве факторов, взятые с некоторым лагом. Среди наиболее распространенных инструментов: доходность государственных краткосрочных облигаций (одно- или трехмесячных), доходность рыночного индекса, временная премия (разность между доходностью долгосрочных и краткосрочных государственных облигаций), премия за кредитный риск (разность между доходностью ценных бумаг с высоким уровнем и низким уровнем кредитного риска), отношение выплаченного дивиденда к цене.

Следует отметить, что данные процедуры включения влияния условной информации не являются оптимальными, поскольку выбор инструментов осуществляется исследователем произвольно. В то же время они получили широкое распространение ввиду простоты практической реализации. Оптимальная процедура использования условной информации была предложена в совместной работе Р. Галланта, Л. Хансена и Г. Точена[7], однако ее практическая реализация является достаточно трудоемкой.

---

[1] *Ross S.* 1) A Simple Approach to the Valuating of Risky Streams // Journal of Business. 1978. N 51. P. 453–475; 2) The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing // Journal of Economic Theory. 1976. N 13. P. 341–360.

[2] *Harrison J., Kreps D.* Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets // Journal of Economic Theory. 1979. N 2. P. 381–408.

[3] *Hansen L., Richard S.* The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models // Econometrica. 1987. N 55. P. 587–613.

[4] *Hansen L.* Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators // Econometrica. 1982. N 50. P. 1029–1054.

[5] *Ross S.* A Simple Approach to the Valuating of Risky Streams. P. 453–475; *Dybvig P., Ingersoll Jr.* Mean-Variance Theory in Complete Markets // Journal of Business. 1982. N 55. P. 233–251.

[6] *Buraschi A., Jackwerth J.* The Price of a Smile: Hedging and Spanninig in Option Markets // The Review if Financial Studies. 2001. Vol. 14. N 2. P. 495–527.

[7] *Gallant R., Hansen L., Tauchen G.* Using Conditional Moments of Asset Payoffs to infer the Volatility if Intertemporal Marginal Rates of Substitution // Journal of Econometrics. 1990. N 45. P. 141–179.

Статья поступила в редакцию 28 июня 2006 г.