ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

М.К. Плакунов, Г.В. Шалабин

ОПТИМАЛЬНОЕ НАКОПЛЕНИЕ КАПИТАЛА НА ЛИНИИ РОСТА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В теории экономического роста существует «золотое правило накопления» — капиталовооруженность, обеспечивающая максимальный уровень потребления на одного рабочего.[1] В то же время в теории производственных функций существует линия роста — капиталовооруженность, при которой прибыль максимальна.[2] Проблема заключается в том, что эти две модели не согласованы между собой, хотя по сути дела должны описывать одно и то же явление. В предлагаемой работе формулируются условия, при которых эта проблема имеет решение. Кроме того, предлагается модификация модели роста, в которой учитываются непроизводственное потребление и непостоянство темпа роста объема привлеченных трудовых ресурсов.

«Золотое правило накопления» выводится на основе простейшей модели экономического роста, которую мы несколько усиливаем, учитывая непроизводственное потребление собственников и прирост фонда оплаты труда, вызванный приростом объема привлеченных трудовых ресурсов:

$$
\begin{aligned}
&Q = F(K, L),\\
&Q = I + G,\\
&G = \varpi L + \eta r K,\\
&\dot{K} = -\mu K + I,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Михаил Константинович ПЛАКУНОВ — канд. экон. наук, доцент кафедры экономики предприятия Академии управления и экономики; область научных интересов — методология количественных методов в экономике, теория производственных функций. Автор 25 научных работ, включая 4 монографии (в соавторстве) и 4 учебных пособия.
Геральд Васильевич ШАЛАБИН — канд. экон. наук, профессор кафедры экономической кибернетики СПбГУ; область научных интересов — экономика природопользования и экономико-математическое моделирование. Автор 107 научных работ, включая 4 монографии и 2 учебных пособия (в соавторстве).

© М.К. Плакунов, 2005
© Г.В. Шалабин, 2005

где Q — объем производства, учитываемый как чистая продукция, K — объем капитала, L — численность рабочих, I — объем инвестиций, G — величина потребления, ϖ — средняя зарплата одного рабочего, r — рентабельность капитала, η — доля дохода на капитал, направляемая на потребление, μ — средняя норма амортизации.

Производная по времени обозначается точкой над соответствующей переменной, так что, например,

$$\overset{*}{L} = \frac{dL}{dt}.$$

Обычно делаются следующие предположения:

♦ Производственная функция $F(K, L)$ линейно-однородна.

♦ Темпы роста численности рабочих постоянны, в экономике обеспечена полная занятость.

Линейная однородность производственной функции позволяет представить ее в виде

$$Q = F(K, L) = L\varphi(S),$$

где $S = K/L$ — капиталовооруженность труда.

От последнего условия вполне можно отказаться, так как оно не участвует в выводе «золотого правила» и, по сути, является излишним. Поэтому в дальнейшем считается, что темпы роста численности рабочих произвольны и равны T_L.

Учитывая, что

$$I = Q - G = Q - \varpi L - \eta r K,$$

систему (1) можно записать в виде уравнения экономической динамики:

$$\overset{*}{K} = -\mu K + L\varphi(S) - \omega L - \eta r \overset{*}{K}. \tag{2}$$

Разделив последнее равенство на L и сделав необходимые преобразования, окончательно получаем

$$\frac{\overset{*}{K}}{L} = -\mu\frac{K}{L} + \varphi\left(\frac{K}{L}\right) - \omega - \eta r\frac{K}{L} = -\mu \overset{*}{S} + \varphi(S) - \omega - \eta r S.$$

Учитывая, что

$$\overset{*}{S} = \frac{\overset{*}{K}L - K\overset{*}{L}}{L^2} = \frac{\overset{*}{K}}{L} - ST_L,$$

получаем

$$\overset{*}{S} = \varphi(S) - (\mu + T_L + \eta r)S - \omega.$$

Теперь модифицированное «золотое правило накопления» формулируется следующим образом:

$$\frac{d\varphi(S)}{dS} = \mu + \eta r + T_L. \tag{3}$$

От обычного «золотого правила накопления» модифицированное отличается тем, что в модели экономического роста учтено непроизводственное потребление собственников капитала ηrK, а также не требуется выполнение нереального предположения о постоянстве темпа роста объема привлеченных трудовых ресурсов.

Решая уравнение (3) относительно S, получаем уровень капиталовооруженности S^*, обеспечивающий максимальную скорость экономического роста при заданном уровне душевого потребления.

Линия роста строится в результате решения следующей задачи: найти такие неотрицательные K и L, которые максимизируют прибыль

$$\Pi = F(K, L) - iK - \varpi L,$$

при ограничении на текущие затраты:

$$iK + \varpi L = C,$$

где C — лимит текущих затрат, i — удельные капитальные издержки, ϖ — средняя зарплата одного рабочего.

Предполагается, что производственная функция $F(K, L)$ линейно-однородна.

Для решения задачи строится функция Лагранжа:

$$\Lambda = Q - iK - \varpi L + \lambda(C - iK - \varpi L),$$

где Λ — лагранжиан, λ — множитель Лагранжа.

Максимизируя лагранжиан по K и L, получаем

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial K} = \frac{\partial Q}{\partial K} - i - \lambda i = 0,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial L} - \omega - \lambda \omega = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = (1+\lambda) i, \tag{4}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = (1+\lambda) \omega. \tag{5}$$

Разделив (4) на (5), получаем уравнение относительно S:

$$R\left(\frac{1}{S}\right) = \frac{i}{\varpi}, \tag{6}$$

где

$$R = \frac{\partial Q / \partial K}{\partial Q / \partial L}.$$

Если равенство (6) разрешимо относительно S, то решением задачи будет

$$K^* = \frac{1}{i + \varpi R^{-1}(i/\varpi)} C,$$

$$L^* = \frac{R^{-1}(i/\omega)}{i + \varpi R^{-1}(i/\varpi)} C.$$

Случай, когда равенство (6) не выполняется (а такой случай может иметь место при определенном сочетании технико-экономических параметров — параметров производственной функции), здесь не рассматривается как маловероятный.

В литературе эту задачу часто «решают» без ограничения на текущие затраты.[3] Можно показать,[4] что в такой постановке задача не имеет решения, так как целевая функция не ограничена на множестве допустимых решений.

Таким образом, в обеих моделях устанавливаются оптимальные значения капиталовооруженности. Возникает естественный вопрос, совпадают ли эти значения? Очевидно, что модели различны. Модель «золотого правила накопления» — динамическая, но в ней отсутствуют цены. В модели «линии роста» присутствуют цены на ресурсы, но нет динамики.

Совмещение моделей достигается, прежде всего, с учетом того обстоятельства, что в общем случае однородных производственных функций оптимальная прибыль отлична от нуля, и часть ее направляется на непроизводственное потребление, а другая часть — на прирост капитала (на чистые инвестиции):

$$\Pi = \eta K + \overset{*}{K}.$$

Следовательно,

$$\overset{*}{K} = Q - iK - \omega L - \eta r K. \tag{7}$$

Сравнивая (7) и (2), получаем, что модели совместимы только если

$$iK = \mu K, \tag{8}$$

т.е. $i \equiv \mu$.

Поскольку μ в динамической модели — это средняя норма амортизации, а i — удельные капитальные издержки, т. е. тоже средняя норма амортизации, условие совместимости моделей вполне естественно.

Ясно, что существует связь между ценами ресурсов и технико-экономическими параметрами экономики. Совмещение моделей позволяет установить некоторые аспекты этой связи в явном виде. Из равенства (6) имеем

$$\omega = \frac{1}{R}.$$

Учитывая (3) и имея в виду, что

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{d\varphi(S)}{dS},$$

получаем

$$\varpi = \frac{\mu}{\mu + \eta r + T_L} \frac{\partial F}{\partial L}. \tag{9}$$

Таким образом, совмещение моделей позволяет установить связь между ценами ресурсов и технико-экономическими параметрами экономики.

Подставляя (8) в (9), получаем

$$\varpi = \frac{i}{\mu + \eta r + T_L} \frac{\partial F}{\partial L}. \qquad (10)$$

Из (10), поскольку $\mu > 0$, следует, что должно выполняться неравенство

$$\mu + \eta r + T_L > 0,$$

и, если это условие выполнено, то

$$\varpi < \frac{\partial F}{\partial L}$$

(вопреки распространенной догме теории предельной эффективности).

Резюмируя, можно утверждать, что «золотое правило накопления» совместимо с линией роста в случае линейно-однородной производственной функции, если удельные капитальные издержки равны коэффициенту выбытия капитала в динамической модели.

---

[1] *Phelps E.S.* Golden Rules of Economic Growth. New York, 1966.

[2] *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М., 1975.

[3] *Борисов К.Ю.* О некоторых модификациях модели Дайамонда и проблемах распределения национального дохода // Экономические исследования: теория и приложения. СПб., 2000; см.: *Интрилигатор М.* Указ. соч.

[4] *Плакунов М.К., Раяцкас Р.Л.* Производственные функции в экономическом анализе. Вильнюс, 1984.

Статья поступила в редакцию 8 июня 2005 г.