М.В. Коростелева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ

Целью данной статьи является анализ методов определения наибольшего и наименьшего значений, которые может принимать стоимость Европейского колл-опциона (далее — опцион) на акции. Необходимость анализа стоимости опциона можно объяснить следующим образом. Если фактическая стоимость опциона отличается от равновесной,[1] то, имея два вида финансовых активов (акции и опционы на эти акции), можно установить безрисковую хеджированную позицию при помощи покупки акций и заключения опционных контрактов. Колебания цены акций в таком случае будут компенсироваться обратными колебаниями стоимости опционов. В статье рассматривается определение границ стоимости опциона при отсутствии безрисковых ценных бумаг, проводится анализ двух методов определения границ стоимости опциона в случае существования безрисковых активов, а также приводится способ определения границ стоимости опциона в случае дискретного изменения цен акций.

Стоимость опциона (C) может быть представлена в виде функции стоимости базисного актива (S), цены исполнения опциона (X), времени до истечения срока опциона (T) и безрисковой ставки процента (r_f).

При анализе стоимости опционов обычно предполагается следующее:[2]

1. По базисному активу дивиденды не выплачиваются в течение всего срока действия опциона.[3]

2. Нет трансакционных затрат, связанных с покупкой или продажей акции или опциона.

Мария Вячеславовна КОРОСТЕЛЕВА — канд. экон. наук, доцент кафедры экономической кибернетики. В 1995 г. окончила экономический факультет СПбГУ, в 2003 г. защитила диссертацию. Неоднократно участвовала в программах повышения квалификации, в том числе за рубежом (Польша, Шотландия). Участвовала в качестве лектора в совместной программе TACIS и НФПК «Международные бухгалтерские стандарты и управленческий учет» (1998–1999 гг.). Сфера научных интересов — методы анализа рынка ценных бумаг; оценка риска финансовых активов. Автор 10 публикаций.

3. Краткосрочная безрисковая ставка процента известна и является постоянной в течение всего срока действия опциона.

4. Любой покупатель ценной бумаги может получать ссуды по краткосрочной безрисковой ставке для оплаты любой части ее цены.

5. «Короткая продажа» разрешается без ограничений.[4]

6. Торговля ценными бумагами ведется непрерывно, и цена акции движется непрерывно и случайным образом.

В дальнейшем мы опустим предпосылку о непрерывности торговли ценными бумагами и цены акции и рассмотрим, как проводится анализ в случае дискретного изменения цен.

Сначала определим границы стоимости опциона в случае, если не рассматриваются безрисковые ценные бумаги. Очевидно, что стоимость колл-опциона является неотрицательной величиной. Кроме того, она никогда не может упасть ниже величины $(S-X)$, т.е. стоимость опциона на дату исполнения равна максимуму из двух выражений — нулевого значения, если цена базисной акции меньше цены исполнения, и разности между ценой акции и ценой исполнения опциона в противном случае:

$$C \geq \max\{0, S-X\}. \tag{1}$$

Можно заметить, что стоимость опциона никогда не будет превышать цену акции, на которую он выписан. Даже если цена исполнения X равна нулю и опцион не будет исполнен, он может быть оценен максимум в S, т.е. границы стоимости опциона можно записать следующим образом:

$$\max\{0, S-X\} \leq C \leq S. \tag{2}$$

Теперь перейдем к рассмотрению случая с безрисковыми ценными бумагами. Верхняя граница стоимости опционов всегда будет оставаться равной S, а для определения нижней границы можно использовать различные способы. Проанализируем два способа определения границ стоимости опциона в случае существования безрисковых ценных бумаг — с использованием подхода, основанного на методе линейного программирования, и подхода, связанного с понятием стохастического доминирования.

Определение границ стоимости опциона с использованием линейного программирования

Стоимость ценной бумаги может быть представлена как

$$S = \sum_{j=1}^{n} s_j p_j, \tag{3}$$

где s_j — количество «чистых» ценных бумаг, которое включается в базовую ценную бумагу, p_j — текущая цена «чистой» ценной бумаги в j-м состоянии экономики, по которой выплачивается 1 долл. в период T, если наступает состояние j.[5] Предполагается, что s_j увеличивается по мере увеличения j.

Аналогично стоимость опциона может быть представлена как

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j, \tag{4}$$

где c_j — количество «чистых» ценных бумаг, которое включается в опцион.

Пусть B_0 — текущая стоимость портфеля, содержащего все «чистые» ценные бумаги, т.е.

$$B_0 = \sum_{j=1}^{n} p_j. \tag{5}$$

Так как этот портфель является безрисковым, то $B_0 = e^{-r_f}T.$

Если предположить, что количество приобретаемых «чистых» бескупонных облигаций, по которым по истечении их срока выплачивается 1 долл., равно X, то

$$c_j = \max\{0, s_j - X\}.$$

Поскольку нам необходимо определить минимальное значение стоимости опциона, мы можем выражение (4) представить в виде целевой функции некоторой задачи линейного программирования, в которой переменными являются цены «чистых» ценных бумаг. Ограничения задачи задаются уравнениями (3) и (5), а также условием неотрицательности p_j.

Таким образом, нижняя граница стоимости опциона может быть определена путем решения следующей задачи линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j p_j \to \min, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = B_0, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j p_j = S, \tag{8}$$

$$p_j \geq 0. \tag{9}$$

Задача (6)–(9) имеет следующее решение:

$$p_j = 0, j \neq j^*, j \neq j^* + 1,$$

$$p_{j^*} = \frac{s_{j^*+1} B_0 - S}{s_{j^*+1} - s_{j^*}},$$

$$p_{j^*+1} = \frac{S - s_{j^*} B_0}{s_{j^*+1} - s_{j^*}},$$

где j^* выбирается таким образом, что s_{j^*} представляет собой наибольшее значение, удовлетворяющее следующим неравенствам:

$$s_{j^*} \leq \frac{S}{B_0}, s_{j^*+1} > \frac{S}{B_0}.$$

Для проверки этого решения можно воспользоваться критерием оптимальности плана задачи линейного программирования. Согласно этому критерию, для оптимальности плана необходимо и достаточно существование решения двойственной задачи. Можно показать, что числа

$$u_1 = \left(c_{j^*} s_{j^*+1} - c_{j^*+1} s_{j^*}\right) / \left(s_{j^*+1} - s_{j^*}\right)$$

и

$$u_2 = \left(c_{j^*+1} - c_{j^*}\right) / \left(s_{j^*+1} - s_{j^*}\right)$$

являются решением следующей задачи, двойственной к задаче (6)–(9):

$$f'(u) = u_1 B_0 + u_2 S \to \max,$$
$$u_1 + s_k u_2 \le c_k, k = 1, ..., n.$$

Рассмотрим решение задачи на условном примере.

В некоторый портфель включаются 2 акции некоторого вида при наступлении состояния 1; 3 такие акции — при наступлении состояния 2; 4 акции — при наступлении состояния 3; по пять акций — при наступлении состояний 4 и 5; 6 акций — при наступлении состояния 6. Стоимость портфеля равна 100 долл., стоимость чистой облигации равна 20 долл., количество чистых облигаций равно 1. Определим цены «чистых» ценных бумаг. Так как $c_1 = \max\{0, 2-1\} = 1$, $c_2 = \max\{0, 3-1\} = 2$, $c_3 = \max\{0, 4-1\} = 3$, $c_4 = c_5 = \max\{0, 5-1\} = 4$, $c_6 = \max\{0, 6-1\} = 5$, то имеем следующую задачу:

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 4p_5 + 5p_6 \to \min,$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 20,$$
$$2p_1 + 3p_2 + 4p_3 + 5p_4 + 5p_5 + 6p_6 = 100,$$
$$p_1 \ge 0, p_2 \ge 0, p_3 \ge 0, p_4 \ge 0, p_5 \ge 0, p_6 \ge 0.$$

Решив ее, например, симплекс-методом, мы получим следующие результаты:

$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0, p_4 = 10, p_5 = 10, p_6 = 0.$$

Нижняя граница стоимости опциона получается как

$$C \ge \frac{\left(c_{j^*} s_{j^*+1} - c_{j^*+1} s_{j^*}\right) B_0 + \left(c_{j^*+1} - c_{j^*}\right) S}{s_{j^*+1} - s_{j^*}}, \tag{10}$$

т.е. для данного примера $C \ge 80$.

С увеличением количества состояний экономики ($n \to \infty$) уменьшается значение целевой функции, т.е. значения целевой функции образуют невозрастающую ограниченную снизу последовательность, предельное значение которой получается путем выбора j^* такого, что $s_{j^*} = \dfrac{S}{B_0}$.

Имеем

$$p_{j^*} = B_0,$$
$$C \ge c_{j^*} p_{j^*}.$$

и, переходя к пределу в выражении (10), получим

$$C \ge \max\{0, S - X\} B_0 \Rightarrow$$
$$C \ge \max\{0, S - XB_0\},$$

т.е.

$$C \ge \max\left\{0, S - e^{-r_f T} X\right\} \tag{11}$$

и границы стоимости опциона в случае существования безрисковых ценных бумаг можно записать следующим образом:

$$\max\left\{0, S - e^{-r_f T} X\right\} \le C \le S. \quad (12)$$

Определение границ стоимости опциона с использованием стохастического доминирования

Все дальнейшие рассуждения основаны на понятии стохастического доминирования. Говорят, что один актив (или портфель активов) является стохастической доминантой над другим, если инвестор получает от него больший доход в каждом из состояний экономики. Это определение известно как стохастическое доминирование первого порядка.[6] Если какой-либо актив стохастически доминирует над другим, то его предпочтут все инвесторы, независимо от их склонности к риску, поэтому при анализе стоимости опциона с использованием подхода стохастического доминирования склонность инвестора к риску в расчет не принимается.

По своей сути границы стоимости опциона, определенные в начале статьи для случая отсутствия безрисковых ценных бумаг, являются границами, определенными с использованием подхода стохастического доминирования, в частности подхода FSD (First-order Stochastic Dominance). В отличие от этого подхода, в случае существования безрисковых активов используется подход FSDR (First-order Stochastic Dominance with Riskless assets).

Пусть $B(T)$ — текущая цена «чистой» бескупонной облигации, по которой по истечении ее срока T выплачивается 1 долл. Имеем

$$B(T) = (1\,\text{долл.})e^{-r_f T}.$$

Рассмотрим два портфеля: портфель A, который представляет собой покупку одного опциона по цене C и X облигаций по цене $B(T)$, т. е. на общую сумму $XB(T)$, и портфель B, который представляет собой покупку одной акции по цене S. Если цена акции на дату исполнения опциона меньше, чем цена исполнения опциона, то он не будет исполнен, и доход, полученный по портфелю A, будет равен X. Но поскольку $X > S$, то портфель A принесет больший доход, чем портфель B. Если же цена акции больше либо равна цене исполнения опциона, то по обоим портфелям будет получен одинаковый доход. Следовательно, для того чтобы не возникало стохастического доминирования, портфель A должен иметь бо́льшую цену, чем портфель B:

$$C + XB(T) \ge S.$$

Это условие можно переписать следующим образом:

$$C \ge \max\{0, S - XB(T)\},$$

и тогда получаем

$$C \ge \max\left\{0, S - e^{-r_f T} X\right\}, \quad (13)$$

т. е.

$$\max\left\{0, S - e^{-r_f T} X\right\} \le C \le S. \quad (14)$$

Мы видим, что выражение (14) в точности повторяет выражение (12), т.е. мы получили такой же результат, как и при использовании метода линейного программирования.

Чтобы проиллюстрировать этот результат, проведем следующее исследование. Введем некоторые исходные данные о цене базисной акции, цене исполнения опциона и безрисковой ставке процента и рассчитаем для этих данных минимальную стоимость опциона (максимальная стоимость, как уже было сказано, всегда будет равна цене базисной акции). Время до истечения срока опциона будем считать равным одному году. Затем проведем анализ чувствительности изменения стоимости опциона к одновременному изменению цены базисной акции и безрисковой ставки процента.

Исходные данные: S = 50 долл.; X= 50 долл.; r_f = 10%.

Минимальная стоимость опциона в этом случае равна:

$$C_{min} = 50 - e^{-0,1 \cdot 1} \cdot 50 = 4,758 \text{ долл.}$$

В таблице показано изменение нижней границы в зависимости от одновременного изменения цены базисной акции и безрисковой ставки процента, а на рис. 1 представлен график этой зависимости.

Зависимость изменения нижней границы стоимости опциона от одновременного изменения цены базисного актива и безрисковой ставки процента (долл.)

S \ r_f	2%	4%	6%	8%	10%	12%	14%	16%	18%	20%	22%
20	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
25	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
30	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
35	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
40	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
45	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,654	1,532	2,393	3,236	4,063	4,874
50	0,990	1,961	2,912	3,844	4,758	5,654	6,532	7,393	8,236	9,063	9,874
55	5,990	6,961	7,912	8,844	9,758	10,654	11,532	12,393	13,236	14,063	14,874
60	10,990	11,961	12,912	13,844	14,758	15,654	16,532	17,393	18,236	19,063	19,874
65	15,990	16,961	17,912	18,844	19,758	20,654	21,532	22,393	23,236	24,063	24,874
70	20,990	21,961	22,912	23,844	24,758	25,654	26,532	27,393	28,236	29,063	29,874

Из таблицы можно сделать вывод о том, что с увеличением и цены базисного актива, и безрисковой ставки процента минимальное значение стоимости опциона увеличивается. Также можно видеть, что, несмотря на меньшее значение цены базисного актива по сравнению с ценой исполнения опциона, начиная со значения ставки процента, равного 12%, стоимость опциона становится больше нуля.

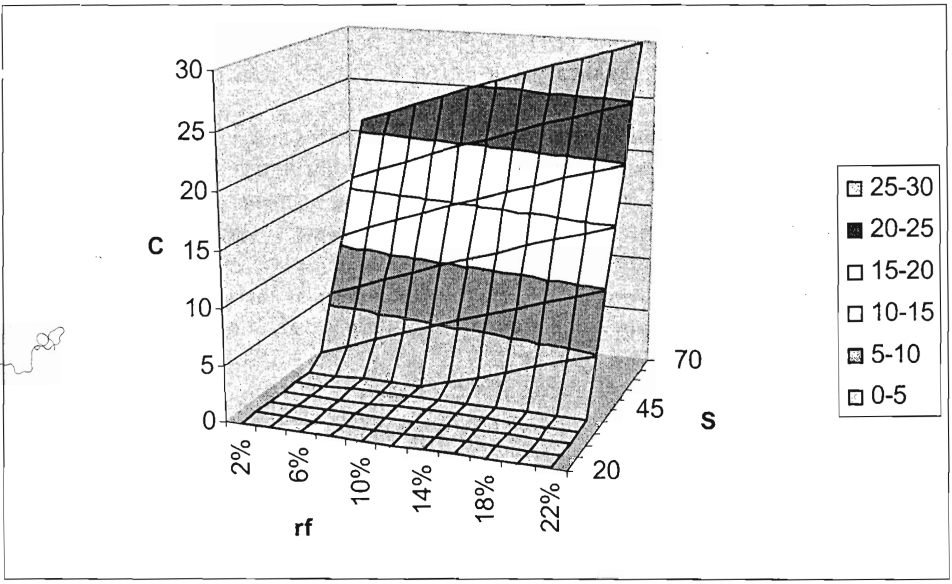

Рис.1. График зависимости изменения нижней границы стоимости опциона от одновременного изменения цены базисной акции и безрисковой ставки процента.

Теперь перейдем к рассмотрению границ стоимости опциона в случае дискретного временного промежутка. Остальные предпосылки оставим неизменными.

В случае непрерывного промежутка времени цены опциона и базисной акции должны подчиняться определенным условиям рыночного равновесия, которые достаточно легко находятся путем использования непрерывной стратегии хеджирования. В случае же дискретного временного промежутка невозможно определить такую стратегию хеджирования, чтобы обеспечить простое соотношение между ценой опциона и базисной акции. Однако, зная вероятностное распределение стоимости акции и цену исполнения опциона, можно однозначно определить вероятностное распределение стоимости опциона, что даст возможность установить определенные соотношения между ценами базисной акции и опциона.

Пусть S_T — будущая цена базисной акции на дату исполнения опциона T, ее вероятностное распределение равно $F(S_T)$. Если сумму, вложенную в базисную акцию, обозначить W_0, то конечный доход инвестора может быть вычислен как $W_S=(W_0/S)S_T$. Точно так же, если инвестор пожелает вложить W_0 в опцион, текущая цена которого равна C, его конечный доход получается как

$$W_C = \max\left\{0, \frac{W_0}{C}(S_T - X)\right\}.$$

Будем обозначать вероятностные распределения доходов W_S и W_C выражениями F_S и F_C соответственно. Предполагается, что ожидаемые значения F_S и F_C больше, чем безрисковая процентная ставка r_f.

На рис. 2 представлены графики двух вероятностных распределений F_S и F_C (в предположении о том, что $C < S$). Можно показать, что графики пересекаются только один раз и что точку пересечения можно найти из выражения $S_T = XS/(S-C)$ или, пользуясь терминами конечного дохода W_T, из выражения $W_T = W_0X/(S-C)$.

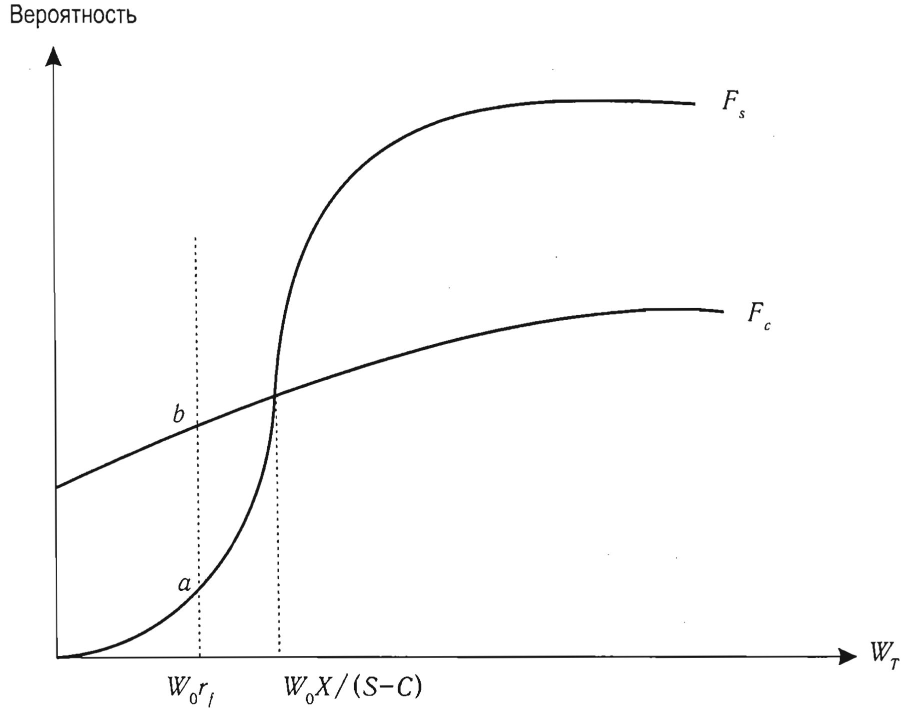

Рис. 2. Вероятностные распределения доходов от опциона (F_C) и базисной акции (F_S).

Таким образом, можно видеть, что в случае отсутствия безрискового актива стохастического доминирования (FSD) может не быть, однако при добавлении безрискового актива может возникать стохастическое доминирование первого порядка (FSDR).

Можно показать, что необходимым и достаточным условием доминирования C над S по FSDR является условие $F_C(r_f) < F_S(r_f)$, где

$$F_C(r_f) = p\left(\frac{S_T - X}{C} \le r_f\right) = p(S_T \le r_f C + X) = F(r_f C + X),$$

$$F_S(r_f) = p\left(\frac{S_T}{S} \le r_f\right) = p(S_T \le r_f S) = F(r_f S),$$

где p — вероятность.

Следовательно, нижнюю границу стоимости опциона можно определить следующим образом: выражение $F_C(r_f) < F_S(r_f)$ означает, что $(r_f C + X) < r_f S$, или $C < (S - X/r_f)$, т. е. C доминирует над S для всех неубывающих функций полезности. Для того чтобы избежать такого доминирования и предотвратить арбитраж (который происходит при продаже S и покупке C), необходимо, чтобы $F_C(r_i) \geq F_S(r_i)$, или $C \geq S - X/r_i$, т.е. получаем следующие границы стоимости опциона:

$$\max\left\{0, S - X / r_f\right\} \leq C \leq S. \tag{15}$$

Таким образом, мы получили меньшую нижнюю границу по сравнению с нижней границей в случае непрерывного изменения цен акций.

Нами были рассмотрены два метода определения границ стоимости опциона — метод, связанный с использованием линейного программирования, и метод, основанный на понятии стохастического доминирования. Было показано, что использование этих методов приводит к одинаковым результатам. Мы также определили вероятностное распределение стоимости опциона, что дало возможность установить соотношения между ценами базисной акции и опциона и определить предельные значения, которые может принимать стоимость опциона в случае дискретного изменения цен акций.

---

[1] Модель определения равновесной стоимости опциона разработали Фишер Блэк и Майрон Шоулз (*Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. N 81. May-June. P. 637–654.)

[2] *Бригхэм Ю., Гапенски Л.* Финансовый менеджмент. СПб., 1997. С. 148.

[3] О стоимости опциона на акцию, по которой выплачиваются дивиденды, см., напр.: *Merton R.* Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. Spring. 1973. P. 151.

[4] О «короткой продаже» см., напр.: *Copeland T.E., Weston J.F.* Financial Theory and Corporate Policy. Addison-Wesley, 1992. P. 115.

[5] О «чистых» ценных бумагах см., напр.: *Крушвиц Л.* Финансирование и инвестиции. Неоклассические основы теории финансов. СПб., 2000. С. 137.

[6] *Коростелева М.В.* Методы анализа рынка капитала. СПб., 2003. С. 31.

Статья поступила в редакцию 8 июня 2005 г.