

Ф.В. Исхаков

МНОГОПЕРИОДНАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ НА ОСНОВЕ РАНДОМИЗИРОВАННОЙ ОЦЕНОЧНОЙ ФУНКЦИИ

В экономических исследованиях достаточно часто возникает задача достоверного прогнозирования поведения группы ограничено рациональных агентов (индивидов) на основе наблюдений этого поведения в прошлом. Такая задача может быть решена средствами определенного класса математических моделей, в которых предполагается некоторая формализованная структура описываемого процесса, параметры которой подбираются в соответствии с имеющимися наблюдениями. Оцененная подобным образом модель не только дает представление о поведении рассматриваемой группы агентов, но и позволяет предсказывать ее реакцию на какие-либо изменения внешней среды.

Одним из распространенных подходов для формального описания процесса поведения является дискретизация этого процесса как в отношении временной шкалы — когда под поведением понимается последовательность решений через равные промежутки времени, так и в отношении множества доступных альтернатив — когда для лица, принимающего решение (ЛПР), в каждом периоде вводится полное счетное множество попарно непересекающихся альтернатив, каждая из которых охарактеризована заданным набором характеристик. Далее на этом множестве исследователем в параметрической форме задается некоторая оценочная функция, сопоставляющая каждой альтернативе определенное числовое значение. Предполагается, что рассматриваемое ЛПР выбирает альтернативу, получившую максимальную оценку, и в соответствии с наблюдаемым выбором подбираются значения параметров оценочной функции.

Данный подход получил широкое применение при моделировании экономического поведения человека, в частности на рынке труда. Однако он

Федор Валентинович ИСХАКОВ — аспирант кафедры экономической кибернетики экономического факультета СПбГУ, стипендиат центра экономических исследований имени Рагнара Фриша, Осло. Окончил Университет Осло (2003), экономический факультет СПбГУ (2001). Автор четырех научных работ. Сфера научных интересов: математические модели поведения экономических агентов в условиях неопределенности.

требует значительной доработки в ситуациях, когда принимаемое решение имеет большое влияние на будущее, например, существенно ограничивая доступное впоследствии множество альтернатив. Настоящая статья посвящена разработке и тестированию одной из моделей данного типа, которая, с одной стороны, позволяет адекватно описать влияние принимаемого решения на несколько периодов в будущем и, с другой стороны, не несет дополнительных требований к качеству и полноте данных для своей оценки.

Предлагаемая модель является многопериодным обобщением многомерной регрессионной модели с дискретной зависимой переменной (логит-модели) Мак-Фейдена,¹ основанной на рандомизированной оценочной функции (функции полезности).

Мак-Фейден предложил ввести в традиционную функцию полезности аддитивно отделяемую случайную компоненту, вносящую в рациональный процесс принятия решений некоторый шум, вызванный, например, эмоциональным состоянием потребителя. Добавляемые к оценкам случайные величины могут сдвигать точку максимума оценочной функции, моделируя тем самым возможную иррациональность принимаемого решения. Такая модификация модели потребительских предпочтений позволила объяснить изменчивость потребительского выбора, наблюдаемую экспериментально², которая уже давно находится в центре внимания некоторых психологических исследований.³

Предполагается, что случайная компонента оценочной функции имеет так называемое распределение экстремальных значений — распределение Гумбеля.⁴ Это предположение можно обосновать, по крайней мере, двумя способами. Во-первых, если предположить, что эмоции, испытываемые человеком, допускают численное выражение и на принимаемое решение влияние оказывает наиболее сильная («максимальная») эмоция из достаточно большого их числа, то распределение величины этой «максимальной» эмоции стремится к распределению экстремальных значений для достаточно большого класса распределений отдельных эмоций.⁵ Во-вторых, как показано в работе,⁶ если одновременно предположить наличие случайного слагаемого в функции полезности и независимость вероятности выбора альтернативы от количества несущественных (т.е. заведомо непривлекательных) альтернатив в доступном множестве (свойство, введенное в работе⁷), то при выполнении некоторых технических условий единственным подходящим распределением случайной компоненты функции полезности является распределение экстремальных значений.

Учет влияния принимаемого решения на будущее возможен многими способами. В общем случае повторяющаяся задача выбора альтернатив может быть представлена как задача динамического программирования. Однако такой подход требует значительного количества данных для оценки соответствующей модели и существенно затрудняет ее практическое применение. Более простым способом учета будущей случайной полезности является включение ее числовых характеристик (в простейшем случае лишь ее математического ожидания) в выражение текущей полезности.

Рассмотрим k альтернатив, составляющих множество всех возможных альтернатив $S = \{i: i = 1, \dots, k\}$ и n временных периодов (горизонт моделирования),

прондексированных индексом $t=1, \dots, n$. Введем следующую рекуррентную структуру оценочной функции $U_i(t)$:

$$U_i(t) = u_i(t) + \varepsilon_i(t) + \delta \cdot E \left\{ \max_{j \in S(t+1)} U_j(t+1) \right\}, U_i(n) = u_i(n) + \varepsilon_i(n), i = 1, \dots, k, t = 1, \dots, n-1, \quad (1)$$

где $u_i(t)$ — детерминированная компонента, зависящая от характеристик альтернативы i в период t (ее функциональная форма задается исследователем), $\varepsilon_i(t)$ — случайная компонента, имеющая распределение экстремальных значений (функция распределения $F(x) = \exp(-\exp(-\sigma x))$) с параметром σ , — определяемый при оценке модели коэффициент дисконта ожидаемой будущей полезности, $S(t+1) \subset S$ — множество доступных в период $t+1$ альтернатив, определяемое принятым в период t решением. Предполагается, что случайные величины $\varepsilon_i(t)$ являются независимыми в совокупности для всех сочетаний i и t , а также для всех рассматриваемых ЛПР. Введенное рекуррентное соотношение (1) хорошо согласуется с логикой теории динамического программирования: достаточно рассмотреть максимумы по всем альтернативам i левой и правой частей равенства, чтобы получить дискретный принцип оптимальности Беллмана для стохастической задачи управления.⁸

Тот факт, что максимум независимых случайных величин, имеющих распределение экстремальных значений, также принимает это распределение, позволяет аналитически рассчитать последнее слагаемое в (1) и свести эту рекуррентную формулу к виду $U_i(1) = \frac{1}{\sigma} v_i(1) + \varepsilon_i(1)$,

$$\text{где } v_i(1) = \sigma u_i(1) + \delta \ln \sum_{i_1 \in S(2)} \exp\{\dots \{ \sigma u_{i_{n-2}}(n-1) + \delta \ln \sum_{i_{n-1} \in S(n)} \exp\{ \sigma u_{i_{n-1}}(n) \} + \delta \gamma \} \dots \} + \delta \gamma. \quad (2)$$

Тогда вероятность $P(i, h)$ выбора альтернативы i из изначально доступного множества $S^h(1) \subset S$ для ЛПР с индексом $h, h \in \{1, \dots, H\}$ принимает следующий простой вид (допишем опущенный ранее для простоты индекс h):

$$P(i, h) = Pr \left(\{ U_i(1) > \max_{j \in S^h(1) \setminus \{i\}} U_j(1) \} \right) = \frac{\exp(v_i^h(1))}{\sum_{j \in S^h(1)} \exp(v_j^h(1))}, i \in S^h(1). \quad (3)$$

В завершение введем индикатор наблюдаемого выбора $Y(i, h)$ (равный единице, если ЛПР h выбрал альтернативу i , и нулю в противном случае) и запишем в явном виде логарифм функции правдоподобия $\ln LF$:

$$\ln LF = \sum_{h=1}^H \sum_{i \in S^h(1)} Y(i, h) \cdot \ln P(i, h) = \sum_{h=1}^H \sum_{i \in S^h(1)} Y(i, h) \cdot v_i^h(1) - \sum_{h=1}^H \ln \sum_{i \in S^h(1)} \exp(v_i^h(1)). \quad (4)$$

Для оценки модели остается выбрать некоторую функциональную форму детерминированной компоненты $u_i^h(t)$ оценочной функции, подставить (2) в (4) и максимизировать функцию $\ln LF$. Таким образом, рассмотренная n -периодная модель принимает вид многомерной условной логит-модели с выражением (2) в качестве детерминированной компоненты функции полезности и допускает оценку методом максимального правдоподобия. При $n=1$ рассматриваемая модель полностью идентична условной многомерной логит-модели.

В качестве иллюстративного примера, демонстрирующего предпочтительность изложенной модели по сравнению с традиционными инструментами изучения поведения с использованием статических моделей дискретного выбора, смоделируем при $n \in \{1, 2, 3\}$ процесс принятия решения о выходе на пенсию в норвежских домашних хозяйствах между 1992 и 2001 гг.⁹ (при выполнении ряда требований¹⁰ свободный выбор момента выхода на пенсию в возрасте от 62 до 67 лет в Норвегии действительно имеет место). Необходимость применения разработанной модели в данном случае объясняется тем, что для человека преклонного возраста крайне затруднительно вернуться на работу после выхода на пенсию — действительно принимаемое решение оказывает сильное влияние на будущее, исключая занятость из множества доступных в будущем состояний.

Конкретизируем изложенную модель следующим образом. Пусть в качестве ЛПР выступает домашнее хозяйство в целом, рассмотрим данные $H=53\ 298$ семей о занятости за два смежных года: до и после момента, когда, по крайней мере, один из членов семьи впервые получил возможность выхода на пенсию. Множество альтернатив S равняется прямому произведению множеств состояний супругов, состоящих, в свою очередь, из трех элементов: работа, пенсия и отсутствие занятости (таким образом, $k=9$). И пенсию, и отсутствие занятости будем считать поглощающими состояниями — это означает, что если один из супругов занимает какое-либо из них в период t , то множество $S(t+1)$ включает только те состояния, в которых этот супруг остается на пенсии или в отсутствии работы. Положим следующую форму детерминированной части $u_i^h(t)$ оценочной функции $U_i(t)$:

$$u_i^h(t) = a \frac{(I(i, t, h))^\lambda - 1}{\lambda} + b_1 \cdot \ln L_1(i, t, h) + b_2 \cdot \ln L_2(i, t, h) + b_3 \cdot \min\{\ln L_1(i, t, h); \ln L_2(i, t, h)\}, \quad (5)$$

где a , λ , b_1 , b_2 , b_3 — неизвестные параметры, $I(i, t, h)$ — годовой располагаемый семейный доход, $L_1(i, t, h)$ и $L_2(i, t, h)$ — коэффициенты свободного времени супругов для ЛПР h в состоянии i в период t . Последний член учитывает общее свободное время супругов.

Предложенная формула для детерминированной компоненты оценочной функции является результатом подбора простой, но вместе с тем эффективной формы из нескольких рассмотренных сочетаний линейных, логарифмических и трансформаций Бокса-Кокса исходных характеристик рассматриваемых альтернатив. Подобный поиск имеет продолжительную традицию и соответствует логике рассматриваемого класса экономико-математических моделей — подобрать такой математический аппарат формализации поведения, который позволил бы адекватно описывать и предсказывать этот процесс.

Ввиду линейности по параметрам оценочной функции оказывается невозможно отдельно оценить параметр σ , однако это не препятствует получению однозначных оценок для вероятностей выбора альтернатив $P(i, h)$.

Значения независимых переменных (характеристик альтернатив) в разные периоды рассчитаны следующим образом. Располагаемый доход равняется сумме поступлений из основных источников дохода, зафиксированных для каждого домашнего хозяйства в первоначальный период наблюдения, за вычетом налогов, и спрогнозирован на последующие периоды на постоянном уровне (для

заработной платы и социальных выплат) или в соответствии с законодательно установленными алгоритмами расчета (для пенсии). Коэффициенты свободного времени соответствуют доле свободного времени в году с учетом восьмичасового суточного сна. Первоначальные множества доступных альтернатив $S^h(1)$ подобраны в соответствии с изначально занимаемыми состояниями.

Полученные методом максимального правдоподобия оценки параметров (таблица) выявляют в явном виде детерминированные компоненты $u_i(t)$ и $v_i(1)$ общей оценочной функции $U_i(t)$ и приведенной к первоначальному периоду функции полезности $U_i(1)$. Рассматривая точки максимума последней функции на множестве первоначально доступных альтернатив S_0 , находим для каждого ЛПР наиболее привлекательную для него альтернативу, которая и будет выбрана в среднем (т.е. при отсутствии влияния случайной компоненты).

Результаты оценки моделей

№ п/п	Параметр		Оценка	СКО	t-статистика	PS индекс, %
1	$\sigma\alpha$	Семейный доход	0,33	0,03	10,06	70,57
	λ	Параметр Бокса-Кокса	0,43	0,02	22,27	
	σb_1	Свободное время супругов (по отдельности и общее)	-4,84	0,14	-34,96	
	σb_2		-13,07	0,23	-57,87	
	σb_3		1,60	0,16	10,00	
2	$\sigma\alpha$	Семейный доход	0,09	0,01	9,17	70,93
	λ	Параметр Бокса-Кокса	0,51	0,02	24,39	
	σb_1	Свободное время супругов (по отдельности и общее)	5,78	0,18	32,65	
	σb_2		3,03	0,21	14,37	
	σb_3		0,48	0,11	4,21	
	δ		Коэффициент дисконта	2,38	0,05	
3	$\sigma\alpha$	Семейный доход	0,17	0,02	7,57	70,96
	λ	Параметр Бокса-Кокса	0,32	0,03	12,76	
	σb_1	Свободное время супругов (по отдельности и общее)	4,09	0,13	31,77	
	σb_2		2,14	0,17	12,80	
	σb_3		0,76	0,09	8,52	
	δ		Коэффициент дисконта	1,38	0,02	

Например, если в некотором домашнем хозяйстве в начальный период один из супругов работает и имеет возможность выйти на пенсию, а второй уже является пенсионером, то множество $S(1)$ состоит из двух альтернатив:¹¹ (работа, пенсия) и (пенсия, пенсия). Здесь первый компонент вектора состояния домашнего хозяйства обозначает состояние одного супруга, второй компонент — состояние второго супруга. Допустим, годовой совокупный располагаемый семейный доход I составляет при этом соответственно 800 и 790 тыс. норвежских крон. Коэффициенты свободного времени L рассчитываются как доли свободного времени в году с учетом восьмичасового суточного сна: 0,221 и 0,427 соответственно для работающего и неработающего. Тогда оценочная функция $U.(1)$ принимает соответственно значения: 6,53 и 5,79 при $n=1$; 30,66 и 30,73 при $n=2$; 29,87 и 29,76 при $n=3$. Таким образом, учитывая соотношения полученных величин, рассматриваемое домашнее хозяйство выбирает первое состояние в рамках статической и трехпериодной моделей ($n=1,3$) и второе состояние в рамках двухпериодной модели ($n=2$). В данном примере привлекательность большего количества свободного времени в состоянии, когда оба супруга оказываются на пенсии, нейтрализуется при увеличении горизонта планирования с двух до трех периодов за счет потери свободы выбора после выхода на пенсию.

Повторяя подобный расчет для каждого из рассматриваемых домашних хозяйств, получаем представление о распределении всей выборки по введенным состояниям. Подобный расчет позволяет моделировать совокупную реакцию всех домашних хозяйств на какие-либо изменения внешней среды.

Полученные оценки параметров могут быть естественным образом проинтерпретированы как степени важности отдельных характеристик рассматриваемых альтернатив на их общую привлекательность. Параметр Бокса-Кокса в данном случае может быть проинтерпретирован через показатель склонности к риску по доходу для данного ЛПР. Из предпоследнего столбца таблицы следует, что оценки всех коэффициентов оказались статистически значимы, однако отрицательные значения для свободного времени в первой модели интерпретировать указанным способом невозможно. Этого недостатка лишены двух- и трехпериодные модели.

Для оценки качества моделей используем индекс PS (prediction success, один из аналогов R^2 в регрессионном анализе), равный доле домашних хозяйств в выборке, для которых предсказанный описанным выше способом выбор совпал с фактически наблюдаемым. Последний столбец таблицы показывает, что все три модели имеют достаточно высокую объясняющую способность, которая, однако, монотонно возрастает при увеличении горизонта моделирования n .

При решении практических задач разработки методов влияния на поведение анализируемой группы ЛПР на основе рассмотренной модели достаточно выразить последствия применения таких методов в терминах независимых переменных и рассчитать значения найденных оценочных функций в новых условиях. Тогда новые точки максимума оценочных функций обозначат реакцию на анализируемый метод влияния отдельных ЛПР, а изменение вероятностного распределения на множестве доступных альтернатив — реакцию на него всей рассматриваемой совокупности ЛПР.

Приведенный пример наглядно демонстрирует привлекательность разработанной n -периодной модели выбора альтернатив на основе рандомизированной оценочной функции для анализа поведения ограничено рациональных агентов и разработки инструментов влияния на это поведение.

¹ См., напр.: *Hernas E., Strom S.* Family labour supply when husband is eligible for early retirement. Memorandum of department of economics. University of Oslo. Vol. 13. 2000; *Maddala G.S.* Limited dependent and qualitative variables in econometrics. Cambridge, 1988; *McFadden D.* Conditional logit analysis of quantitative choice behavior. London, 1974.

² См., напр.: *Luce R., Suppes P.* Preference, utility and subjective probability // *Handbook of Mathematical Psychology*. Vol. 4. New York, 1965.

³ См., напр.: *Thurstone L.* A law of comparative judgment // *Psychological Review*. Vol. 34. 1927. С. 273–286.

⁴ Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М., 1965.

⁵ Невзоров В.Б. Рекорды. Математическая теория. М., 2000.

⁶ *Yellot J.J.* The relationship between Luce's choice axiom, Thurstone's theory of comparative judgment, and the double exponential distribution // *Journal of Mathematical Psychology*. Vol.15. 1977. С. 109–144.

⁷ *Luce R.* Individual choice behavior: a theoretical analysis. New York, 1959.

⁸ *Пантелеев А.В., Бортаковский А.С., Летова Т.А.* Оптимальное управление в примерах и задачах. М., 1996.

⁹ Работа проводилась при поддержке Фонда научных исследований Норвегии (проект 1132).

¹⁰ Полный список таких требований см.: *Hernas E., Strom S.* Family labour supply when husband is eligible for early retirement. Memo-randum of department of economics. University of Oslo. Vol. 13. 2000.

¹¹ Заведомо непривлекательный переход работающего супруга к состоянию безработицы при наличии возможности выйти на пенсию не рассматривается.

Статья поступила в редакцию 8 июня 2005 г.