ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

П.В. Конюховский, А.С. Налетова

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ ФИРМЫ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Текущий этап развития экономики России для подавляющего большинства отраслей характеризуется усилением конкурентной борьбы на уровне предприятий. Однако возможности ценовой конкуренции в значительной степени исчерпаны. В связи с этим перед менеджментом современного предприятия встают задачи активного использования форм неценовой конкуренции. Одним из наиболее существенных направлений ее развития является перестройка деятельности хозяйствующих субъектов на основе современных управленческих и финансовых технологий.

Необходимыми условиями успешного совершенствования системы управления являются, с одной стороны, качество и адекватность математических моделей, описывающих процессы функционирования управляемой фирмы (предприятия); с другой — обозримость и компактность данных моделей. В значительной мере выполнение или невыполнение этих требований обусловливается тем, насколько успешно решена задача выбора математического аппарата.

При организации процессов перспективного планирования в условиях современной экономики особую актуальность приобретают задачи моделирования

Павел Владимирович КОНЮХОВСКИЙ — профессор кафедры экономической кибернетики (с 2004 г.). Окончил экономический факультет ЛГУ в 1987 г. по специальности «экономическая кибернетика». Доктор экономических наук (2003). К сфере научных интересов относятся математические методы исследования периодических и колебательных закономерностей в динамике экономических объектов, разностные модели финансовой фирмы, информационные технологии и системы управления базами данных в учебном процессе. Имеет около 30 публикаций, в том числе пять учебных пособий.

Анна Сергеевна НАЛЕТОВА — ассистент кафедры экономической кибернетики (с 2003 г.). Окончила экономический факультет ЛГУ в 2003 г. по специальности «экономическая кибернетика». К сфере научных интересов относятся математические модели динамики фирм и предприятий, применение математических методов в системе учета издержек предприятия. Имеет 3 публикации.

динамики объемов производства. Следует отметить, что они имеют универсальный характер и в той или иной форме присутствуют в деятельности любого производственного предприятия независимо от его отраслевой принадлежности, размеров и иных специфических черт.

Среди конкретных постановок задач исследования динамики развития фирмы могут быть выделены задачи поиска адекватных инструментов, описывающих закономерности изменения ее показателей и характеристик. Также имеет смысл упомянуть задачу выявления структуры параметров управления динамикой фирмы. Например, это может быть изучение механизмов воздействия на траекторию выпусков или доходов различных вариантов управления собственными и заемными ресурсами. Отдельный пласт проблем связан с изучением темпов роста (изменения) наблюдаемых показателей и поиска управляющих политик, обеспечивающих выход на заданный темп роста фирмы.

В настоящей работе мы остановимся на исследовании возможностей и преимуществ использования аппарата линейных разностных уравнений при описании динамики развития фирмы (предприятия). В качестве базовой выберем следующую несложную однопродуктовую двухфазную модель функционирования абстрактной фирмы. Принципиально она предполагает, что:

- «жизнедеятельность» моделируемого объекта описывается серией наблюдений, происходящих в дискретные моменты времени $t = 0, 1, ...$;
- состояние в текущий момент времени определяется объемом выпуска (валовым доходом) y_1, являющимся следствием затрат (вложений), осуществленных в непосредственно предшествующий период $[t - 1, t]$; при этом полагается, что выпуск находится в прямо пропорциональной зависимости от затрат (с некоторым технологическим коэффициентом $\beta \geq 1$);
- средства, которыми располагает фирма на момент времени t, складываются из ее чистого дохода (валовой доход y_t за вычетом возврата средств, привлеченных в предшествующем периоде $t - 1$, с причитающимися процентными выплатами: $\rho \cdot x_{t-1}$, где $\rho > 1$) и средств, привлекаемых со стороны (x_t);[1]
- доля средств, вкладываемых в производство, определяется в соответствии с нормой накопления θ, считающейся фиксированной для всех временных периодов $(\theta \in]0, 1[)$.

Таким образом, динамика выпусков может быть описана с помощью линейного разностного уравнения

$$y_{t+2} = \beta \cdot (\theta \cdot (y_{t+1} - \rho \cdot x_t) + x_{t+1}). \tag{1}$$

В соотношении (1) в роли параметров состояния описываемого объекта выступают объемы его выпусков (доходов) $\{y_t\}$, а в роли управляющих параметров объемы привлеченных ресурсов $\{x_t\}$.

Необходимо отметить, что исследования как собственно математического аппарата разностных уравнений,[2] так и различных аспектов его приложения к экономическим задачам[3] на настоящий момент имеют достаточно богатую историю. Это, однако, ни в коей мере не дает оснований для заключения об исчерпании данной предметной области. Наоборот, скорее речь может идти о недостаточной проработке процедур и методик использования этого мощного математического инструмента при анализе экономических процессов, природе которых он объективно адекватен.

В контексте построенной модели могут быть сформулированы те или иные задачи поиска управлений, обеспечивающих желаемую траекторию динамики состояний (развития) фирмы. Очевидно, что управляющие стратегии могут быть весьма разнообразны по своей структуре, в связи с чем вполне разумным на начальных этапах работы с изучаемым объектом представляется подход, предполагающий рассмотрение относительно несложных классов управлений. В частности, вполне естественным, с одной стороны, и доступным для количественного анализа — с другой, видится класс стратегий привлечения заемных ресурсов, задаваемый рекуррентным соотношением

$$x_t = \gamma \cdot y_t. \tag{2}$$

Другими словами, на каждом этапе t объемы привлеченных ресурсов устанавливаются пропорционально текущему выпуску (доходу) фирмы с некоторым коэффициентом пропорциональности $\gamma > 0$. Содержательная сторона решения, принимаемого фирмой, сводится к выбору конкретного значения γ. При сделанном допущении в результате подстановки (2) в базовое уравнение модели (1) мы получаем соотношение

$$y_{t+2} = \beta \cdot (\theta \cdot (y_{t+1} - \rho \cdot \gamma \cdot y_t) + \gamma \cdot y_{t+1}), \tag{3}$$

связывающее последовательные состояния фирмы в моменты t, $t+1$ и $t+2$. Оно, в свою очередь, может быть преобразовано к виду

$$y_{t+2} - \beta \cdot (\theta + \gamma) \cdot y_{t+1} + (\beta \cdot \rho \cdot \theta \cdot \gamma) \cdot y_t = 0. \tag{4}$$

Выражение (4) представляет собой линейное однородное разностное уравнение второго порядка вида[4]

$$y_{t+2} + a \cdot y_{t+1} + \beta \cdot y_t = 0, \tag{5}$$

где $a = -\beta \cdot (\theta + \gamma)$, $b = \beta \cdot \rho \cdot \theta \cdot \gamma$, решение которого достаточно просто может быть получено в аналитической форме.

Если записать характеристическое уравнение как

$$\lambda^2 - \beta \cdot (\theta + \gamma) \cdot \lambda + \beta \cdot \rho \cdot \theta \cdot \gamma = 0, \tag{6}$$

то общее решение для уравнения (4) примет вид

$$y_t = K_1 \cdot \lambda_1^t + K_2 \cdot \lambda_2^t, \tag{7}$$

где λ_1, λ_2 — различные корни характеристического уравнения (6), K_1, K_2— произвольные константы, принимающие конкретные значения при фиксации начальных состояний моделируемого объекта y_0 и y_1, т. е. объемов выпуска за первые два периода.[5]

Заметим также, что в случае совпадения корней характеристического уравнения (6) ($\lambda_1 = \lambda_2$) общее решение (4) может быть записано как

$$y_t = \lambda_1^t \cdot (K_1 + K_2 \cdot t). \tag{8}$$

Начальные условия уравнения (4) могут быть представлены как

$$y_0 = K_1 + K_2,$$
$$y_1 = K_1 \cdot \lambda_1 + K_2 \cdot \lambda_2,$$

откуда получаем

$$K_1 = \frac{y_1 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{ и } K_2 = \frac{\lambda_1 y_0 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{9}$$

Подставляя выражения коэффициентов (9) в (7), получаем еще одну форму представления решения разностного уравнения

$$y_t = \frac{y_1}{\sqrt{D}} \cdot \Lambda(t) - \frac{b \cdot y_0}{\sqrt{D}} \cdot \Lambda(t-1), \tag{10}$$

где

$$\Lambda(t) = \lambda_1^{\,t} - \lambda_2^{\,t} \tag{11}$$

и D — дискриминант квадратного характеристического уравнения.

Достоинства формы записи решения (10) состоят в том, что она, во-первых, непосредственно связывает состояние фирмы в произвольный момент времени t с ее начальными состояниями y_0, y_1; во-вторых, в компактном виде отражает тот «вклад», который вносят в текущее состояние y_t компоненты динамики, представленные с помощью функции $\Lambda(t)$.

В общем случае динамика траекторий $\{y_t\}$ качественно меняется в зависимости от того, какой знак имеют корни характеристического уравнения (6) λ_1 и λ_2, а также от того, являются ли они вещественными или комплексными. Последнее, очевидно, определяется знаком дискриминанта

$$D = \beta^2 \cdot (\theta + \gamma)^2 - 4 \cdot \beta \cdot \theta \cdot \rho \cdot \gamma. \tag{12}$$

В силу содержательных свойств параметров модели (4) имеем

$$\beta \cdot (\theta + \gamma) \geq 0 \text{ и } 4 \cdot \beta \cdot \theta \cdot \rho \cdot \gamma \geq 0,$$

из чего следует, что при $D \geq 0$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\beta(\theta+\lambda)+\sqrt{D}\right) \geq \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\beta(\theta+\lambda)-\sqrt{D}\right) \geq 0. \tag{13}$$

Неравенство (13) позволяет прийти к заключению о том, что в случае вещественности корней λ_1 и λ_2 траектория динамики доходов y_t при $t \to \infty$ является асимптотически экспоненциально растущей (если $\lambda_1 > 1$) или убывающей (если $\lambda_1 < 1$). Графики, изображенные на рис. 1, иллюстрируют оба случая. Линия Y1, получающаяся при параметрах $\beta = 1{,}08$, $\rho = 1{,}05$, $\theta = 0{,}5$, $\gamma = 1{,}03$, отвечает ситуации роста ($\lambda_1 = 1{,}14$), а линия Y2 ($\beta = 1{,}05$, $\rho = 1{,}05$, $\theta = 0{,}8$, $\gamma = 0{,}8$, $\lambda_1 = 0{,}84$) — спада. Ординаты для Y1 и Y2 измеряются в некоторых условных единицах, удовлетворяющих условию $y_0 = 1$. При этом для сопоставимости динамики графики соотнесены с различными масштабами.

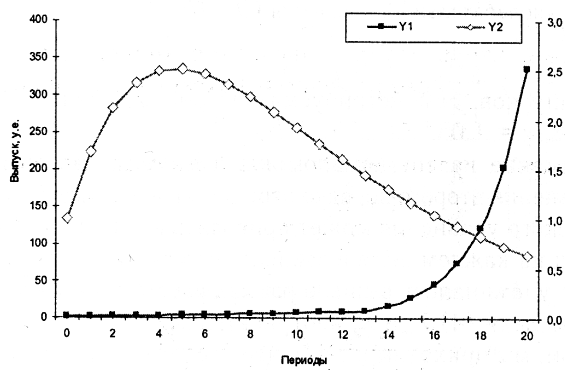

Рис. 1. Пример экспоненциального решения ($D > 0$).

Если λ_1 и λ_2 являются комплексными и представляются в экспоненциальной форме как

$$\lambda_{1,2} = r \cdot e^{\pm i\omega}, \text{ где } (r = |\lambda 1| = |\lambda 2|,\ \omega = \arg \lambda_1 = \arg \lambda_2),$$

то общее решение уравнения (6) принимает вид

$$y_t = K_1 \cdot r^t \cdot e^{it\omega} + K_2 \cdot r^t \cdot e^{-it\omega}.$$

Оно может быть записано в тригонометрической форме как

$$y_t = r^t \cdot [K_1 \cdot (\cos t\omega + i \cdot \sin t\omega) + K_2 \cdot (\cos t\omega - i \cdot \sin t\omega)].$$

Откуда с учетом вещественности начальных условий, а также параметров уравнения и при подборе соответствующих значений для констант получаем выражение для решения

$$y_t = r^t \cdot \left(\overline{K}_1 \cdot \cos tw + \overline{K}_2 \cdot \sin tw\right). \qquad (14)$$

В (14), так же как и в (7), $\overline{K}_1$и $\overline{K}_2$ — константы, принимающие конкретные значения при фиксации начальных состояний моделируемого объекта y_0 и y_1.

Пример траектории развития фирмы, которую мы можем наблюдать при наличии комплексных корней у характеристического уравнения (6), представлен на рис. 2 (по оси абсцисс откладываются периоды, по оси ординат — значения y_t в некоторых условных единицах, относительно которых начальное состояние $y_0 = 1$).

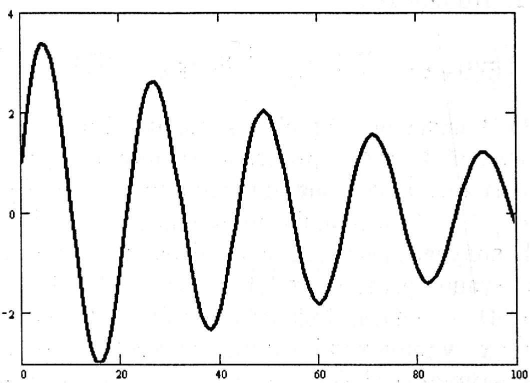

Рис. 2. Пример «колебательного» решения ($D < 0$).

Динамика выпусков, демонстрируемая на рис. 2, возникает при $\beta = 1.01$, $\rho = 1.12$, $\theta = 0.8$, $\gamma = 1.08$.

Обратим внимание на тот немаловажный момент, что для произвольного разностного уравнения второго порядка отрицательность одного или обоих корней характеристического уравнения может приводить к осциллирующему решению, меняющему знак на каждом шаге в зависимости от четности или нечетности t. Однако, как уже упоминалось выше, в рамках рассматриваемой экономической интерпретации модели (4) λ_1 и λ_2 неотрицательны.

Таким образом, мы приходим к тому, что исследование знака дискриминанта характеристического уравнения в рамках модели (4) позволяет сделать качественные выводы о перспективах развития фирмы. По существу возможны следующие принципиальные исходы:

- при $D \geq 0$ будет наблюдаться экспоненциальный рост (спад) в зависимости от значения λ_1;
- при $D < 0$ возникает так называемое колебательное решение, которое, вообще говоря, чревато уходом величин y_t в отрицательную область, т.е. разорением фирмы.

Исходя из (12), мы можем сформулировать условие устойчивого («неколебательного») развития фирмы $D \geq 0$ как

$$\frac{(\theta+\gamma)^2}{\theta\gamma} \geq 4\frac{\rho}{\beta} \tag{15}$$

или

$$\frac{\theta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\theta} \geq 2\cdot\left(2\frac{\rho}{\beta}-1\right).$$

Достоинством формулы (15) является то, что она устанавливает связь между двумя содержательными с экономической точки зрения характеристиками модели. Действительно, величина θ/γ отражает соотношение между нормой накопления и нормой прироста заимствований, т. е. представляет *политику*, проводимую самой фирмой. В то же время значение ρ/β показывает, как соотносятся между собой коэффициент выплат по привлеченным ресурсам и коэффициент прироста выпуска, другими словами, отображает те внешние условия, в которых действует фирма. Обозначив данные показатели как

$$\eta = \frac{\theta}{\gamma} \text{ и } \zeta = \frac{\rho}{\beta},$$

мы приходим к содержательной, с одной стороны, и компактной — с другой, форме записи условия устойчивости динамики развития фирмы

$$\eta+\frac{1}{\eta} \geq 2\cdot(2\zeta-1). \tag{16}$$

В случае развития динамики y_t по экспоненциальному закону мы можем достаточно просто получить оценку темпов роста доходов фирмы

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{K_1\cdot\lambda_1^{t+1}+K_2\cdot\lambda_2^{t+1}}{K_1\cdot\lambda_1^{t}+K_2\cdot\lambda_2^{t}} = \frac{K_1\cdot\lambda_1^{t+1}\cdot\left[1+\frac{K_2}{K_1}\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{t+1}\right]}{K_1\cdot\lambda_1^{t}\cdot\left[1+\frac{K_2}{K_1}\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{t}\right]}.$$

Поскольку, как было оговорено ранее, $\lambda_1 > \lambda_2$ (при $\lambda_1 \neq \lambda_2$), то $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ и

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{17}$$

Отсюда следует

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} \to \lambda_1 \text{ при } t \to +\infty .$$

Другими словами, *наибольший из вещественных корней характеристического уравнения* (6) *может быть использован в качестве асимптотической оценки темпа относительного прироста доходов фирмы.*

Свойство (17) позволяет свести задачу отыскания стратегии управления фирмой, обеспечивающую максимальные темпы роста ее доходов, к задаче

$$\lambda_1(\theta,\gamma)=\frac{\beta}{2}\cdot\left[(\theta+\gamma)+\sqrt{(\theta+\gamma)^2-4\cdot\zeta\cdot\theta\cdot\gamma}\right]\to\max. \qquad (18)$$

Рассмотрим более подробно свойства решения задачи (18). Для начала остановимся на качественно важном случае $\zeta = 1$, достигающемся при равенстве коэффициентов прироста выпуска (β) и возврата привлеченных средств (ρ). Получаем

$$\lambda_1(\theta,\gamma\,|\,\zeta=1)=\frac{\beta}{2}\cdot\left[(\theta+\gamma)+\sqrt{(\theta-\gamma)^2}\right]=\frac{\beta}{2}\cdot\left[(\theta+\gamma)+|\theta-\gamma|\right]=\begin{bmatrix}\beta\theta, & \theta>\gamma;\\ \beta\theta=\beta\gamma, & \theta=\gamma;\\ \beta\gamma, & \theta<\gamma;\end{bmatrix}$$

или, что то же самое,

$$\lambda_1(\theta,\gamma\,|\,\zeta = 1) = \beta\cdot\max\,\{\theta\gamma\}. \qquad (19)$$

Характер поведения функции $\lambda_1(\theta,\gamma)$ для случая $\zeta = 1$ представлен на рис. 3. На нем параллельно приводятся графики поверхности (слева) и линии уровня (справа). По оси абсцисс откладываются значения θ, а по оси ординат — γ.

Выражение (19) отражает достаточно интересный факт: *при равенстве коэффициентов* ρ *и* β *темп роста определяется исключительно наибольшей*

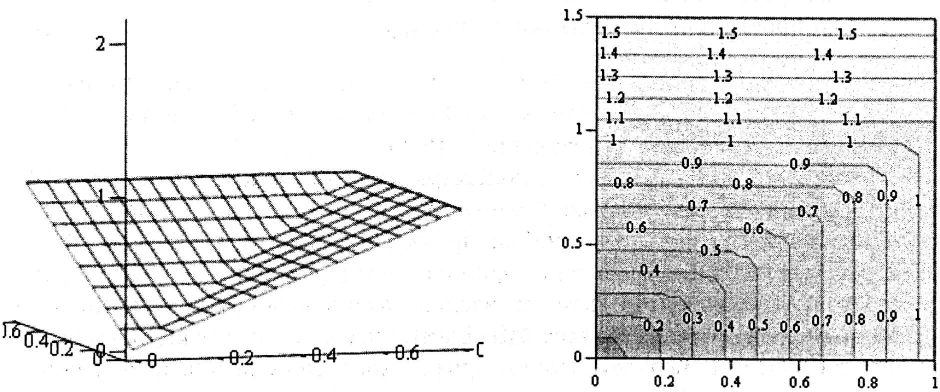

Рис. 3. График функции $\lambda_1(\theta, \gamma)$ при $\zeta = 1$ (поверхность и линии уровня).

из управляющих переменных θ *и* γ*, в то время как переменная, имеющая меньшее значение, не оказывает никакого влияния на величину* λ_1.

По существу это означает, что в подобной ситуации (или близкой к ней) мы можем, зафиксировав наибольший из коэффициентов (θ или γ) и доведя другой до нулевого значения, сохранить в асимптотическом режиме достигнутый темп роста доходов фирмы.

При неравенстве коэффициентов ρ и β функция приобретает вид, представленный на рис. 4.

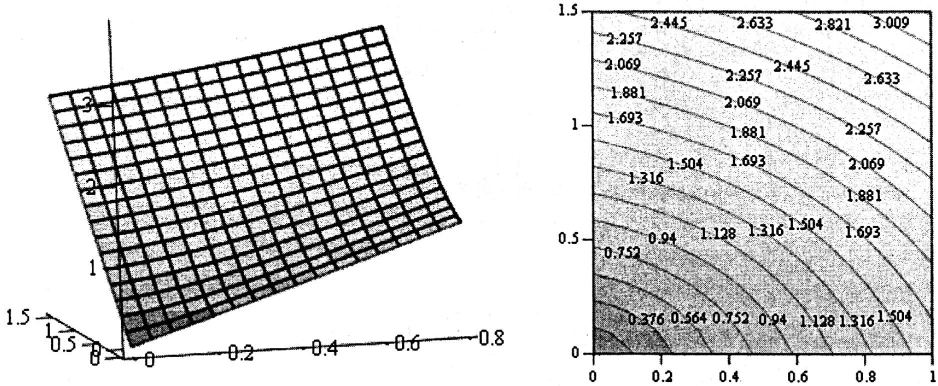

Рис. 4. График функции $\lambda_1(\theta, \gamma)$ при $\zeta < 1$ (поверхность и линии уровня).

Изменения в конфигурации линий уровня, которые мы можем наблюдать, сравнивая между собой рис. 3 и рис. 4, достаточно наглядно отражают содержание последствий, вызванных отличием ζ от 1: *вариации каждой из управляющих переменных независимо от их соотношения вызывают изменение значения асимптотической оценки темпа роста доходов* λ_1.

Разумеется, задача (18) отражает лишь одну из возможных целей управления. Например, вполне вероятна постановка оптимизационной задачи вида

$$\left|\lambda_1(\theta,\gamma)-\tilde{\lambda}_1\right| \to \min\,, \tag{20}$$

достижение некоторого «эталонного» темпа $\tilde{\lambda}_1$. Однако и для решения данной задачи (а также задач, подобных ей) успешно могут использоваться рассмотренные выше свойства функции $\lambda_1(\theta, \gamma)$.

Объективным достоинством линейно-разностной модели динамики (4) является то, что она относительно несложно алгоритмизируется, а следовательно, естественным образом может найти применение в рамках программного обеспечения подсистем управления фирмой (предприятием). При этом речь может идти как о ее практической реализации в форме надстройки для офисного программного обеспечения (класса MS Excel), так и об интеграции соответствующих программных модулей в состав профессиональных автоматизированных управляющих систем.

[1] В дальнейшем для краткости будем называть ρ коэффициентом выплат по привлеченным средствам.

[2] *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967; *Бурд В.Ш.* Дискретное операторное исчисление и линейные разностные уравнения. Ярославль, 1994; *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М., 1967; *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1958; *Миролюбов А.А., Солдатов М.А.* Линейные однородные разностные уравнения. М., 1981.

[3] *Вишняков И.В., Конюховский П.В.* Модель динамики ресурсов в финансовой фирме // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5: Экономика. 1999. Вып. 4. N 26. С. 98–106; *Кондратьев В.А.* Уравнения в конечных разностях // Математика. М., 2000; *Конюховский П.В.* 1) Микро-экономическое моделирование банковской деятельности. СПб., 2001; 2) Моделирование стохастической динамики финансовых ресурсов. СПб., 2002.

[4] О других вариантах применения линейных разностных уравнений второго порядка см., напр.: *Козак А.Д., Новоселов О.Н.* Асимптотическое поведение решений линейного разностного уравнения второго порядка // Математические заметки. 1999. Т. 66. Вып. 2. С. 211–215; *Кондратьев В.А.* Уравнения в конечных разностях // Математика. М., 2000.

[5] Очевидно, что соотношение (1) позволяет определять траекторию динамики фирмы начиная с момента $t = 2$.

Статья поступила в редакцию 19 октября 2005 г.