

## МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 330.4 + 336.748.3

*А. В. Воронцовский, Л. Ф. Вьюненко*ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИНДЕКСОВ РЕАЛЬНЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ  
ОБМЕННЫХ КУРСОВ ВАЛЮТ С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНОГО ФАКТОРА

В статье рассматриваются возможности прогнозирования индексов реальных эффективных обменных курсов валют ведущих стран мира, для которых за период с 31.01.1994 до 30.04.2017 невозможно построить единую устойчивую среднюю расчетную траекторию этого индекса, позволяющего получить надежный прогноз на всем указанном временном интервале; целесообразно учитывать при этом только данные последнего периода. Для построения краткосрочных прогнозов индексов реальных эффективных обменных курсов на основе начального значения предложено использовать в режиме имитации дискретную аппроксимацию стохастических дифференциальных уравнений Мертона, Васичека, Досена, Огдена, Кокса — Ингерсолла — Росса и модели полиномиальных остатков. Экспериментальные расчеты в режиме имитации показали, что применение дискретной аппроксимации уравнений Васичека, Мертона, Досена и Огдена для прогнозирования индексов реальных эффективных обменных курсов валют для изучаемых стран в период с апреля 2016 г. до марта 2017 г. не позволяет построить надежный прогноз указанного индекса. Расчеты в режиме имитации на основе дискретной аппроксимации стохастического уравнения Кокса — Ингерсолла — Росса и модели полиномиальных остатков позволили установить, что для индексов эффективных обменных курсов валют Великобритании, США, стран еврозоны, Японии и Швейцарии удалось обеспечить попадание в 50%-ный доверительный интервал, построенный по результатам имитационных расчетов, почти на всем рассматриваемом промежутке времени. Это повышает качество прогноза на основе средней расчетной траектории. Полученные результаты существенно зависят от выбранного временного промежутка и используемых методов расчета числовых параметров уравнений дискретной аппроксимации исходных моделей. Библиогр. 34 назв. Ил. 10. Табл. 3.

*Ключевые слова:* реальные эффективные обменные курсы валют, стохастические уравнения динамики обменных курсов, модели полиномиальных остатков, линейная дискретная аппроксимация, имитационное моделирование, доверительные интервалы, прогнозирование с учетом текущего значения.

**Алексей Владимирович ВОРОНЦОВСКИЙ** — доктор экономических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9; a.vorontsovskiy@spbu.ru

**Людмила Федоровна ВЬЮНЕНКО** — доцент, кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9; vyunenko@spbu.ru

**Aleksey V. VORONTSOVSKIY** — Doctor of Economics, Professor, St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation; a.vorontsovskiy@spbu.ru

**Lyudmila F. VYUNENKO** — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation; vyunenko@spbu.ru

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

## FORECASTING REAL EFFECTIVE EXCHANGE RATE INDICES OF CURRENCIES USING A STOCHASTIC FACTOR

This article considers the possibility of forecasting real effective exchange rate indices for leading world countries. A stable unified mean trajectory for a reliable forecast of the index cannot be constructed using data from 31 January 1994 to 30 April 2017; however, it is reasonable to use data of the last period for this purpose. To construct a short-term forecast of real effective exchange rates based on initial value, we propose using a simulation with a discrete approximation of stochastic differential equations of Merton, Vasicek, Dosen, Ogden, and Cox-Ingersoll-Ross, and a polynomial residues model. Simulations using discrete approximations of the Vasicek, Merton, Dosen, and Ogden equations did not allow constructing a reliable forecast of the specified index using data from April 2016 to March 2017 for the USA, UK, Eurozone countries, Japan, and Switzerland. Processing simulation results based on a discrete approximation of the stochastic Cox-Ingersoll-Ross equation and the polynomial residues model, and for the considered countries for most of the same time period, resulted in a 50% confidence interval for the mean trajectory of observed values of effective exchange rates indexes. The quality of the forecast essentially depends on the selected time period and methods used to determine the numerical parameters of discrete approximations for the original stochastic equations. Refs 34. Figs 10. Tabl. 3.

*Keywords:* real effective exchange rates, stochastic equations, dynamics of exchange rates, models of polynomial residues, discrete linear approximation, simulation, confidence intervals, forecasting, given current values.

### Введение

Существенной особенностью современной экономики становится возрастающее влияние различного вида случайных факторов на результаты ее развития, что необходимо учитывать в процессе совершенствования методов прогнозирования. Особое значение это имеет для финансовых рынков, на которых влияние факторов неопределенности и риска сказывается уже давно. Среди теорий финансовых рынков в настоящее время важную роль играют концепции рынка капитала, основанные на применении непрерывных стохастических моделей, которые позволяют прогнозировать доходность отдельных финансовых активов и рынка в целом [Воронцовский, 2010а, с. 533–578].

В теории рынка капитала исследуются свойства финансовых активов и вырабатываются практические рекомендации о том, как распоряжаться финансовыми ресурсами с учетом факторов времени и риска. Курсовая стоимость финансовых активов изменяется со временем под воздействием многочисленных факторов, таких как спрос и предложение, процентные ставки по государственным и корпоративным обязательствам и т. п. Указанные факторы по своей природе носят неопределенный характер. Поэтому естественным выглядит предположение и о случайном характере самих цен финансовых активов: облигаций, акций и срочных контрактов — и их моделирования в форме непрерывных случайных процессов. Подобное моделирование не только цен, но и доходностей и процентных ставок финансовых активов необходимо, во-первых, для определения равновесных цен и доходностей различных финансовых активов; во-вторых, для решения задач прогнозирования будущих цен и доходностей этих активов или процентных ставок.

В настоящей статье предполагается рассмотреть возможности применения непрерывных стохастических моделей, которые связаны с использованием стохастических процессов для моделирования изменения тех или иных экономических по-

казателей или параметров, для описания динамики реальных эффективных обменных курсов национальных валют отдельных стран. При этом особо важную роль играют винеровские случайные процессы. Основные предпосылки рассматриваемой концепции связаны с формой дифференциального уравнения, с помощью которого моделируется соответствующий случайный процесс с независимымиращениями.

Реальный эффективный обменный валютный курс (*real effective exchange rate, REER*) — показатель, характеризующий динамику валютных курсов<sup>1</sup>. Он не является фактором, который прямо влияет на перспективы развития экономики. Его можно рассматривать как своеобразный индикатор сложившейся в стране макроэкономической ситуации в области обменных курсов по сравнению со странами — внешнеторговыми партнерами. Его колебания в определенном смысле позволяют обратить внимание на то, как изменяется конкурентоспособность исследуемой страны в результате проводимой денежно-кредитной политики. К примеру, высокий реальный эффективный обменный курс иностранной валюты означает относительную слабость отечественной валюты, что стимулирует экспорт товаров и услуг из страны, снижает импорт и уменьшает благосостояние потребителей, прежде всего за счет относительно высоких цен импорта.

Стандартная методика расчета данного обменного курса конкретной валюты основана на соотношении индексов потребительских цен внутри страны и за рубежом, взвешенных пропорционально доле каждой страны во внешнеторговом обороте. Эти индексы обычно рассчитываются как взвешенная сумма индексов реального валютного курса данного периода по отношению к базовому.

По данным, опубликованным в статье А. Л. Кудрина, в 2005–2006 гг. по отношению к валютам наиболее крупных внешнеторговых партнеров России курс рубля повысился еще сильнее, чем общий показатель его реального эффективного курса. Согласно действовавшей в тот период методике Банка России, при расчете реального эффективного курса рубля к иностранным валютам учитываются валюты стран — основных внешнеторговых партнеров России с удельным весом в совокупном внешнеторговом обороте не менее 0,5 %. Число таких стран в 2005 г. составляло 34 (на их долю приходилось 86 % общего внешнеторгового оборота России), а в 2006 г. — 35 (87 %). При этом основная масса стран, чьи валюты принимаются во внимание при расчете реального эффективного курса рубля, во внешней торговле с Россией имеет долю менее 4 %. К семи странам, удельный вес которых в индексе реального эффективного курса рубля превышает 4 %, относились в указанный период Германия, Белоруссия, Украина, Китай, Италия, Нидерланды и США. Их общая доля во внешнеторговом обороте России в 2005 г. составила 50,2, а в 2006 г. — 51,3 % [Кудрин, 2006].

В настоящее время эффективный обменный курс рубля рассчитывается на базе курсов валют 35 ключевых торговых партнеров России в соответствии с долями этих стран во внешнеторговом обороте. Крупнейшими торговыми партнерами нашей страны остаются Китай, Нидерланды, Германия, Италия и Белоруссия. По данным агентства «Интерфакс», реальный эффективный курс рубля к корзине валют указанных государств в декабре 2016 г. вырос на 6,1 % по отношению к нояб-

<sup>1</sup> Определения реального и номинального эффективного обменного курса валют см. в работах: [Кудрин, 2006; Трунин, Князев, Кудюкина, 2010, с. 7–8].

рю. В течение 2016 г. реальный эффективный обменный курс рубля увеличился на 20,7 %, в то время как в 2015 г. — на 0,9 % после снижения в 2014 г. на 27,4 %<sup>2</sup>.

Реальный эффективный обменный курс рубля к корзине валют государств — основных торговых партнеров России в марте 2017 г. не изменился по отношению к февралю 2017 г. В то же время подобный индекс обменного курса рубля к доллару вырос в марте на 0,3 %, а по отношению к евро снизился на 0,1 %. За первые 3 месяца 2017 г. индекс курса рубля к доллару вырос на 6,7 %, а по отношению к евро — на 5,9 %<sup>3</sup>. По предварительной оценке, за январь–май 2017 г. этот индекс вырос на 5 %, а в мае он снизился на 2,9 %. По сравнению с апрелем 2017 г. реальный обменный курс рубля к доллару в мае 2017 г. опустился на 1,2 %, по отношению к евро — на 4,2 %<sup>4</sup>. Это означает, что тенденции изменения обменных курсов отдельных валют и рассматриваемого индекса могут не совпадать.

Для измерения динамики реального эффективного обменного курса используются различные формы данных, как правило, ежемесячные. Так, в России часто применяются приросты обменного курса по отношению к предыдущему периоду или году (табл. 1), определяемые в соответствии со специальной методикой ЦБ РФ<sup>5</sup>.

Таблица 1. Варианты измерения индекса реального эффективного обменного курса

| Индекс реального эффективного курса рубля к иностранным валютам | 2017 г. |         |      |       |        |
|---|---------|---------|------|-------|--------|
|   | январь  | февраль | март | 1 кв. | апрель |
| Индекс, % прироста к декабрю 2016 г.                            | 4,0     | 5,4     | 5,6  | 5,0   | 8,3    |
| Индекс, % прироста к предыдущему периоду                        | 4,0     | 1,4     | 0,2  | 9,2   | 2,5    |

Источник: URL: [http://cbr.ru/statistics/credit\\_statistics/ex\\_rate\\_ind/03-ex\\_rate\\_17.xlsx](http://cbr.ru/statistics/credit_statistics/ex_rate_ind/03-ex_rate_17.xlsx) (дата обращения: 01.06.2017).

База данных по индексам реальных эффективных обменных курсов валют разных стран, которая будет далее использоваться в расчетах, построена Банком международных расчетов (БМР) (*Bank for International Settlements (BIS)*). Этот банк фактически представляет собой специальную финансовую организацию, которая предназначена для содействия сотрудничеству между центральными банками различных стран и облегчения международных финансовых расчетов. Его учредителями являются центральные банки ведущих торговых государств. Публикуемые этим банком индексы эффективного обменного курса BIS охватывают 61 экономику, в том числе отдельные страны зоны евро и отдельно — всю зону евро в мире. Самые последние веса основаны на торговле в период 2011–2013 гг., в качестве базового года индексов выбран 2010 г. Индексы REER представлены в данной базе в форме среднемесячных значений. Увеличение индекса свидетельствует о повышении ценности соответствующей валюты.

<sup>2</sup> Цитируется по данным ИА «Интерфакс». URL: <http://www.interfax.ru/business/549073> (дата обращения: 10.06.2017).

<sup>3</sup> Цитируется по данным сайта ИА «Финмаркет». URL: <http://www.finmarket.ru/currency/news/4506921> (дата обращения: 15.06.2017).

<sup>4</sup> Цитируется по данным газеты «Взгляд». URL: <https://vz.ru/news/2017/6/8/873818.html> (дата обращения: 14.06.2017).

<sup>5</sup> Сайт ЦБ РФ. URL: [http://www.cbr.ru/statistics/credit\\_statistics/metod\\_ex\\_rate.pdf](http://www.cbr.ru/statistics/credit_statistics/metod_ex_rate.pdf) (дата обращения: 18.06.2017).

Общие проблемы анализа и оценки эффективных реальных обменных курсов рассматриваются в работах [Chinn, 2006; Maeso-Fernandez, Osbat, Schnatz, 2002; Anderson, Karamouzis, Skaperdas, 1987]. Авторы изучают влияние обменных курсов на перспективы экономического роста [Dosse, 2007; Eichengreen, 2007], анализируют влияние этих курсов на накопление [Spilimbergo, Vamvakidis, 2003], экономическую активность России [Евдокимова, Зубарев, Трунин, 2013] и развитие стран с переходной экономикой [Maeso-Fernandez, Osbat, Schnatz, 2005]. При анализе и прогнозировании самих эффективных обменных курсов или их индексов обычно показывают графики за достаточно длительный период [Кудрин, 2006; Панфилов, 2009; Трунин, Князев, Кудюкина, 2010].

Первая гипотеза настоящего исследования состоит в том, что для анализа и прогнозирования индексов реальных эффективных обменных курсов валют различных стран в относительно краткосрочном периоде можно применить дискретную аппроксимацию непрерывных стохастических уравнений, используемых при прогнозировании процентных ставок даже в условиях современных последствий экономического кризиса 2008 г. Прогнозы указанных курсов предлагается строить, применяя метод Монте-Карло<sup>6</sup> на основе средней расчетной траектории, формируемой в режиме имитации с использованием дискретной аппроксимации стохастических уравнений, применяемых для анализа динамики ставок процента на рынке долговых обязательств. Вторая гипотеза заключается в том, что прогнозы индексов реальных эффективных обменных курсов валют можно построить, используя метод полиномиальных остатков, опирающийся на разложение исследуемого фактора (в нашем случае индекса реального эффективного курса валюты) в форме полинома выбранной степени и предполагающий применение соответствующих разностей для построения прогнозов указанного индекса в режиме имитации на основе средней расчетной траектории. Третья гипотеза состоит в том, что прогнозирование индексов реальных эффективных обменных курсов валют возможно только в краткосрочном периоде, в пределах года, и на длительный период смысла не имеет.

## 1. Динамика индексов реальных эффективных обменных курсов валют

Проанализируем тенденцию развития индексов реальных эффективных обменных курсов в период с января 1994 по ноябрь 2016 г., используя базу данных, составленную банком BIS, которая содержит значения индексов этих курсов с 31 января 1994 до 30 апреля 2017 г. Существует также база номинальных эффективных обменных курсов за тот же самый период времени, построенная без учета инфляции. В данной статье она не рассматривается.

На рис. 1 представлены графики эффективного реального обменного курса валюты и стран, обладающих наиболее привлекательными устойчивыми свободно конвертируемыми валютами. Среди них выделим английский фунт стерлингов и доллар США. Очевидно, что реальные эффективные обменные курсы валют указанных стран в течение всего выбранного периода устойчиво превышают 100 %,

<sup>6</sup> Современные особенности метода Монте-Карло, в том числе с учетом аппроксимации стохастических уравнений, см.: [Higham, 2001; Hutzenthaler, Jentzen., Kloeden, 2013; Kloeden, Neuenkirch, Pavani, 2011; Wu, Mao, Kloeden, 2011].

хотя динамика их все равно остается довольно изменчивой. Можно отметить, что в определенные периоды наблюдается как рост, так и падение анализируемого обменного курса. Для Великобритании это период с марта 2007 до конца 2008 г., но даже в данном случае индекс реального эффективного обменного курса фунта стерлингов был больше 95 %. При этом этот индекс устойчиво превышал 100 % с октября 2014 г. до октября 2016 г., т.е. до конца выбранного периода времени. Наименьшего значения этот курс достигал в июле 2011 г. — 93,03 %, а наибольшего — в феврале 2002 г. — 128,71 %.

Для доллара США небольшое сокращение индекса реального эффективного обменного курса, ниже уровня 100 %, можно отметить в конце 2008 — начале 2009 г., когда индекс немного превышал 94–95 %. Для этой валюты происходило превышение 100 %-ного уровня данного индекса в течение более чем 10-летнего периода, с марта 1997 по декабрь 2007 г. Начиная с середины 2015 г. было его сокращение, которое также продолжалось в течение всего 2016 г. до уровня 94,03 % в октябре 2016 г. Наибольшего значения данный индекс достигал в октябре 1999 г., когда его значение составило 132,33 %. Хотя общий интервал колебаний реального эффективного обменного курса обеих валют достаточно широк, примечательной особенностью является превышение 100 %-ного уровня индекса на значительной части всего рассматриваемого периода времени.

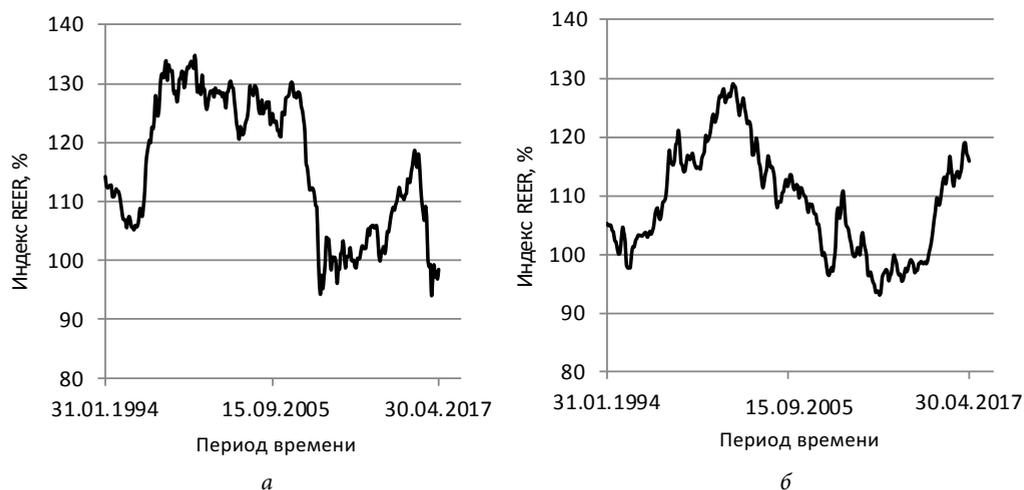


Рис. 1. Динамика индексов эффективных реальных обменных курсов валют для фунта стерлингов (а) и для доллара США (б)

Анализируя динамику индекса реального эффективного обменного курса евро, следует отметить его относительную нестабильность, которая определяется тем, что периоды превышения 100 %-ного уровня этого курса чередуются с периодами сокращения значения обменного курса ниже 100 % (рис. 2). Минимальное значение анализируемого индекса обменного курса евро — 84,11 % — можно отметить в сентябре 2000 г., когда евро еще не был в наличном обороте. Максимальное значение этого индекса (примерно на уровне 110 %) было установлено в марте 1995 г., декабре 2004 г., марте 2008 г. и июле 2009 г., что еще раз подтверждает нестабильный

характер динамики эффективного обменного курса евро. При этом с апреля 2014 г. наблюдается устойчивая тенденция падения этого индекса ниже 100 %. Небольшой рост в течение 2015–2016 г. не позволил достичь указанного уровня, значение индекса не выходило за пределы 92 %.

Сопоставляя график индекса реального эффективного обменного курса фунта стерлингов (рис. 1а) с графиком индекса реального эффективного обменного курса евро (рис. 2), можно отметить их расхождение именно в течение 2014–2016 гг., когда периоду устойчивого роста эффективного обменного курса фунта стерлингов соответствовал период сокращения эффективного реального обменного курса евро ниже 100 %.

В этом заключается существенное отличие динамики реальных эффективных обменных курсов валюты Великобритании и евро. Возможно, эти расхождения динамики обменных курсов и послужили одной из причин брексита, который может позволить правительству Великобритании сохранить ценность фунта стерлингов и обеспечит возможности использования управления его эффективным обменным курсом в целях повышения эффективности экономики страны в целом.



Рис. 2. Динамика индекса эффективного реального обменного курса евро

Для сравнения рассмотрим индексы реального эффективного обменного курса швейцарского франка и японской иены (рис. 3). Обе страны принадлежат к числу развитых стран мира, а их национальные валюты входят в число основных свободно конвертируемых валют земного шара. Однако за указанный период времени тенденции изменения эффективных обменных курсов этих валют прямо противоположны. Так, для индекса обменного курса швейцарского франка характерна общая тенденция роста от 72,15 % в январе 1994 г. до 127,83 % в июле 2015 г. С июля 2010 г. данный индекс не опускался ниже уровня 100 %. При этом с середины 2015 г. до начала 2016 г. его значение сократилось, но осталось на уровне 108–110 % в конце 2016 г.

Индекс эффективного реального обменного курса японской иены за анализируемый период обнаруживает ярко выраженную тенденцию к сокращению. Так, если его максимальное значение в указанный период составило 149,87 % в апреле

1995 г., то в июне 2015 г. обменный курс упал и индекс достиг минимального значения — 67,8 %. Далее произошел небольшой рост данного курса до уровня чуть больше 80 %. При этом можно наблюдать и определенные периоды времени, когда данный курс возрастал, например, начиная со второй половины 1998 г. до конца 1999 г. или в 2007–2009 гг. В любом случае очевидно, что общий интервал колебаний эффективного обменного курса как швейцарского франка, так и японской иены гораздо шире. Если для индекса реального эффективного обменного курса японской иены наблюдается устойчивое падение ниже 100 % с сентября 2012 г., то для швейцарского франка этот индекс устойчиво больше единицы с августа 2010 г., т. е. в последние 5 лет индексы реальных эффективных обменных курсов указанных валют имеют противоположные тенденции изменения и подчиняются разным закономерностям.

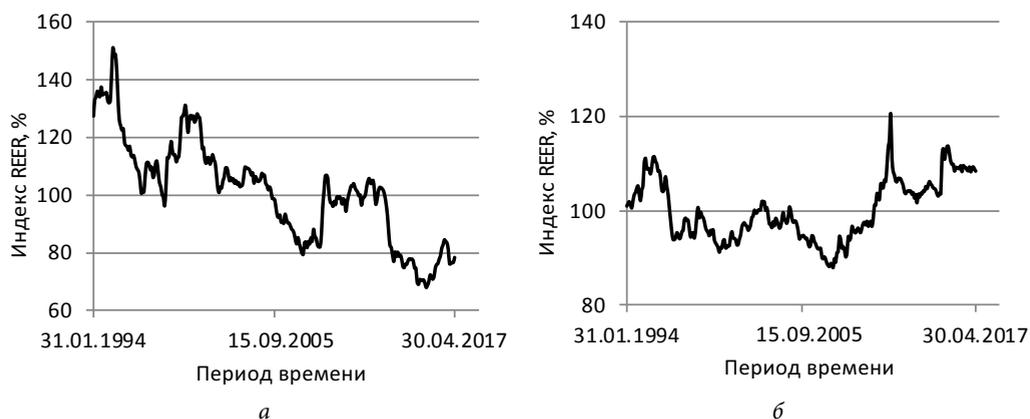


Рис. 3. Динамика индексов эффективных реальных обменных курсов валют для японской иены (а) и для швейцарского франка (б)

Представленные графики индексов реальных эффективных обменных курсов валют Великобритании, США, Японии, Швейцарии и евро (см. рис. 1–3) позволяют сделать определенные выводы относительно динамики данных индексов за указанный период. Во-первых, динамика реальных эффективных обменных курсов носит ярко выраженный индивидуальный характер, может быть по-разному переменчивой для различных стран. Для наиболее привлекательных свободно конвертируемых валют мира (доллар США, британский фунт стерлингов) значение индекса реального эффективного обменного курса стабильно превышает 100 %.

Во-вторых, значения индекса эффективного реального обменного курса крайне подвижны в каждый относительно небольшой рассматриваемый период. Следует учитывать, что они обладают свойством постоянно изменять тенденцию развития и часто возвращаются к уже бывшим или наблюдаемым значениям. В связи с этим гипотеза о том, что прогнозы рассматриваемых индексов обменных курсов валют могут иметь только относительно краткосрочный характер, справедлива. Отсюда также следует, что для моделирования их динамики можно использовать стохастические процессы, обладающие свойством возврата к уже реализованным значениям.

В-третьих, для всех анализируемых стран очень сложно выделить некоторую единую тенденцию изменения этих курсов в течение рассматриваемого периода времени, что делает невозможным построение прогноза эффективных обменных курсов, учитывая только выборочные значения за этот период. Подобные прогнозы целесообразно строить на основе изучения фактических тенденций изменения индекса реального эффективного обменного курса валюты конкретной страны только за последний период, в нашем случае 2016–2017 гг., когда можно четко наблюдать последнюю наметившуюся тенденцию изменения реального эффективного обменного курса.

## 2. Непрерывное моделирование индексов реальных эффективных обменных курсов с учетом случайных процессов

В данном разделе проанализируем основные стохастические уравнения, которые рекомендуется использовать для описания динамики стоимости облигаций и процентных ставок по ним в современной литературе. Подобный подход предполагает моделирование динамики указанных параметров с учетом случайных процессов. Обычно речь идет о применении винеровского случайного процесса или приращения винеровского процесса. Обратим внимание на уравнение динамики процентной ставки, учитывающее приращение винеровского случайного процесса, на свойства которого в значительной степени опирается предлагаемая ниже дискретная аппроксимация этих уравнений. Построение соответствующих стохастических уравнений основывается на предпосылке о случайном характере изменения ставок процента. В рамках данного подхода рассматриваются модели, в которых процентные ставки  $r_t$ ,  $t \geq 0$  являются диффузионными случайными процессами. В общем виде указанные процессы моделируются стохастическими дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$dr_t = a(t, r_t)dt + b(t, r_t)dw_t, \quad (1)$$

где  $dw_t$  — приращение стандартного винеровского процесса, а  $a(t, r_t)$  и  $b(t, r_t)$  — параметры уравнения, определяемые как функции времени и текущего значения самой процентной ставки. Обычно предполагается, что коэффициенты  $a(t, r_t)$  и  $b(t, r_t)$  таковы, что уравнение (1) имеет единственное решение, т. е. каждой реализации приращения винеровского процесса  $dw_t$  соответствует единственная функция  $r_t$ , удовлетворяющая соотношению (1).

Далее будем считать, что аналогичным путем можно моделировать индексы реальных эффективных обменных курсов валют, при этом параметр  $r_t$  рассмотрим как значение индекса реального эффективного обменного курса валюты соответствующей страны в момент времени  $t$ .

При построении дифференциальных уравнений для анализа и прогнозирования эффективных реальных обменных курсов валют предлагается использовать подходы, предложенные в литературе для анализа динамики ставок процента на рынке облигаций<sup>7</sup>. В том числе будут рассмотрены уравнения, предложенные

<sup>7</sup> Теоретические основы моделирования динамики временной структуры ставок процента представлены в работе Ю.-Д. Люу [Люу, 2007, с. 435–453].

Р. Мертоном, О. Васичеком, Дж. Огденом, а также Дж. Коксом, Дж. Ингерсоллом и Ст. Россом для анализа динамики процентных ставок. Все эти уравнения представляют собой определенную модификацию уравнения (1); в них учитываются две части: трендовая и случайная.

В 1973 г. Р. Мертон предложил стохастическую модель динамики процентных ставок, которая представляет собой определенную конкретизацию уравнения (1) [Merton, 1973]. Основная предпосылка его модели состоит в том, что случайная доходность облигации определяется двумя факторами — детерминированной трендовой составляющей и случайным шумом. Предполагается также, что оба числовых параметра — коэффициент дрейфа  $a$  и волатильность  $\sigma_k$  не зависят от времени. Для описания шумовой составляющей было предложено применить стандартный винеровский процесс. Таким образом, используя модель Мертона, можно представить динамику эффективного обменного курса в форме стохастического дифференциального уравнения следующего вида:

$$dr_t = a dt + \sigma_k dw_t, \quad (2)$$

где  $dr_t$  — приращение индекса реального эффективного обменного курса национальной валюты за период  $[t, t + dt]$ ;  $a$  и  $\sigma$  — известные числовые параметры,  $dw_t$  — приращение стандартного винеровского процесса со средним, равным нулю, и дисперсией, пропорциональной промежутку времени. Согласно уравнению Мертона (2), изменение обменных курсов будет зависеть от двух составляющих: трендовой ( $a dt$ ) и случайной, или шумовой ( $\sigma_k dw_t$ ). При этом, в случае если  $a > 0$ , возможна ситуация, когда индексы обменных курсов (или процентные ставки в оригинальной модели) растут в течение продолжительного периода времени, как, например, может возрастать стоимость акций. Это свойство модели Мертона не согласуется с наблюдениями за поведением как рассматриваемых обменных курсов валют, так и рыночных процентных ставок, для которых, как правило, не характерна продолжительная тенденция роста или падения.

Указанную проблему позволяет преодолеть модель процентных ставок, которую предложил О. Васичек. Эта модель также опирается на определенную модификацию числовых параметров уравнения (1), которая состоит в том, что процентная ставка в краткосрочном периоде колеблется около постоянного уровня [Vasicek, 1977]. Будем предполагать, что подобное выполняется и для колебаний индексов обменных курсов валют. Учитывая предложенное О. Васичеком уравнение, определим соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение для описания динамики индексов эффективных обменных курсов следующим образом:

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma_k dw_t, \quad (3)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma_k$  — заданные числовые параметры, причем  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\sigma > 0$ . Коэффициент  $\sigma_k$  в уравнениях (1) и (3) называют волатильностью. Параметр  $b$  в уравнении (3) представляет собой в оригинале долгосрочную процентную ставку, вокруг которой колеблется текущее рыночное значение ставки. В нашем случае будем полагать, что текущее значение индекса эффективного реального обменного курса  $r_t$  колеблется вокруг параметра  $b$ . Таким образом, модель Васичека определяет характер изменения индекса обменного курса как процесс с возвратом к среднему (англ. *mean reversion*).

Если текущее значение эффективного обменного курса выше долгосрочного ориентира ( $r_t > b$ ), то в дальнейшем этот курс будет иметь тенденцию к снижению, поскольку в данном случае  $a(b - r_t) < 0$ . Если текущий эффективный обменный курс  $r_t > b$ , то произойдет обратный процесс увеличения текущего курса для возврата к долгосрочному уровню  $b$ . Таким образом, коэффициент  $a$  можно трактовать как скорость возврата рассматриваемого обменного курса валюты к долгосрочному значению. Параметр  $\sigma$ , который принято называть волатильностью, определяет степень влияния случайной составляющей в процессе изменения рассматриваемого эффективного обменного курса. Чем больше волатильность, тем, очевидно, больше отклонения значений эффективного обменного курса от текущей тенденции, определяемой первым слагаемым в соотношении (3).

Модификацией модели (1) является также уравнение Дж. Огдена, в котором при случайной переменной — приращении винеровского процесса — принимается во внимание и текущее значение рассматриваемого обменного валютного курса [Ogden, 1987]. При этом уравнение Дж. Огдена с учетом сделанных выше обозначений для описания динамики эффективных обменных курсов можно записать так:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_k r_t dw_t. \quad (4)$$

Уравнение Кокса — Ингерсолла — Росса незначительно отличается от уравнения Огдена тем, что при случайной переменной учитывается корень из текущего значения эффективного обменного курса [Cox, Ingersoll, Ross, 1985]. Его можно представить в следующем виде:

$$dr_t = \beta(\mu - r_t)dt + \sigma_k \sqrt{r_t} dw_t. \quad (5)$$

Определенная модификация модели Васичека (3) и модели Кокса — Ингерсолла — Росса (5), связанная с представлением параметра  $\mu$  как функции времени, была предложена Дж. Халлом и К. Уайтом [Hull, White, 1990].

Уравнения Васичека, Огдена и Кокса — Ингерсолла — Росса, которые используются для анализа динамики ставок процента на рынке облигаций, представляют собой определенные модификации условий случайного процесса Орнштейна — Уленбека с возвратом к нулевому среднему. Их основное отличие состоит, во-первых, в том, что вводится преобразование коэффициента при случайной переменной, а, во-вторых, среднее значение предполагается отличным от нуля.

Построенные уравнения (2)—(5) представляют собой линейные варианты однофакторных стохастических дифференциальных уравнений. В литературе предлагаются также другие варианты соответствующих стохастических уравнений. Например, логнормальная модель Досена [Dothan, 1975] или многофакторные модели, учитывающие несколько случайных переменных, например двухфакторные модели Бреннана и Шварца [Brennan, Schwartz, 1985]. Эти модели в данной статье не рассматриваются.

### 3. Дискретная аппроксимация стохастических уравнений в форме рекуррентных соотношений

Основная проблема непрерывных моделей связана с необходимостью использования достаточно сложного математического аппарата, исходные предположения

которого при этом играют часто более важную роль, чем содержательные условия конкретных рынков капитала. Определенное упрощение задачи анализа и прогнозирования тенденций динамики показателей на финансовых рынках связано с применением дискретной аппроксимации уравнений (2)—(5) в режиме имитации. Для уравнений можно построить дискретную аппроксимацию в форме рекуррентных соотношений.

Случайные процессы, учитываемые в уравнениях (2)—(5), представляют собой приращения винеровских процессов, распределенных по нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией  $\sigma_k^2 dt$ , пропорциональной длительности учитываемого временного интервала  $dt$ . Исходя из этой предпосылки, рассмотрим возможности проведения дискретной аппроксимации анализируемых уравнений и построения рекуррентных соотношений [Воронцовский, 2010б, с. 115–116]. Поясним это на примере преобразования стохастического уравнения О. Васичека (3).

Используя указанное свойство приращений винеровских процессов, построим его возможную дискретную аппроксимацию в форме рекуррентного соотношения. Для простоты записи опустим индекс  $t$  и обозначим через  $\Delta$  — шаг временной решетки, в соответствии с которым будем проводить расчеты в режиме имитации. Возьмем интеграл от правой и левой частей этого уравнения по заданному промежутку, который начинается в момент  $t$  и заканчивается в момент  $t + \Delta$ .

$$\int_t^{t+\Delta} dr_t = \int_t^{t+\Delta} a(b-r_t)dt - \int_t^{t+\Delta} \sigma_k dw_t. \quad (6)$$

Аппроксимация соотношения (6) прежде всего определяется тем, что значения всех двух интегралов, которые не содержат случайную переменную, определим просто как разность значений подинтегральной функции в начале и в конце рассматриваемого промежутка. Левую часть соотношения (6) преобразуем так:

$$\int_t^{t+\Delta} dr_t = r_{t+\Delta} - r_t. \quad (7)$$

Аналогичные преобразования сделаем для первого интеграла в правой части равенства (6):

$$\int_t^{t+\Delta} a(b-r_t)dt = ab(t+\Delta-t) - a(r_{t+\Delta} - r_t) = ab\Delta - a(r_{t+\Delta} - r_t). \quad (8)$$

Рассмотрим возможности построения приближенной формы второго интеграла в правой части равенства (6). Для этого, учитывая указанные выше свойства приращения винеровского процесса, представим его в следующем виде:

$$dw_t = \sqrt{\Delta}v_t,$$

где  $v_t$  — стандартный винеровский процесс, распределенный по нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице. Будем считать, что дискретная разность реализаций исходного случайного винеровского процесса  $w$  для двух соседних моментов времени представляет собой случайную величину, которая распределена по стандартному нормальному закону в следующей форме:

$$(w_{t+\Delta} - w_t) \approx \sqrt{\Delta} N(0, 1).$$

Учитывая полученное соотношение, приближенную формулу для интеграла, который содержит приращение винеровского процесса, можно записать так:

$$\sigma_k \int_t^{t+\Delta} dw_t = \sigma_k (w_{t+\Delta} - w_t) = \sigma_k \sqrt{\Delta} \xi_t, \quad (9)$$

где  $\xi_t$  — реализация случайной величины, подчиняющейся стандартному нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице.

Окончательно рекуррентное соотношение, которое представляет собой дискретную аппроксимацию рассматриваемой траектории потребления, представим так:

$$r_{t+\Delta} = r_t + ab\Delta - a(r_{t+\Delta} - r_t) + \sigma_k \sqrt{\Delta} \xi_t, \quad (10)$$

откуда получаем дискретное рекуррентное соотношение для соответствующего обменного курса в следующей форме:

$$r_{t+\Delta} = r_t + \frac{ab}{1+a} \Delta + \frac{\sigma_k}{1+a} \sqrt{\Delta} \xi_t. \quad (11)$$

Можно показать, используя подход, основанный на интегрировании правой и левой частей приведенных уравнений, что для уравнения Мертона эта линейная аппроксимация принимает более простой вид

$$r_{t+\Delta} = r_t + a\Delta + \sigma_k \sqrt{\Delta} \xi_t, \quad (12)$$

где  $\xi_t$  — реализация случайной величины, подчиняющейся стандартному нормальному закону и описывающей влияние случайного фактора на обменные курсы валют на промежутке  $[t, t + \Delta]$ ;  $\Delta$  — шаг временной решетки в процессе расчетов в режиме имитации<sup>8</sup>.

Дискретная аппроксимация уравнения Огдена (4) в форме рекуррентного соотношения может быть аналогичным образом записана так:

$$r_{t+\Delta} = r_t + \frac{\beta\mu}{1+\beta} ab\Delta + \frac{\sigma_k r_t}{1+\beta} \sqrt{\Delta} \xi_t. \quad (13)$$

Аналогичным путем, анализируя правую и левую части уравнения Кокса — Ингерсолла — Росса (5), получим следующее рекуррентное соотношение, представляющее собой его дискретную аппроксимацию:

$$r_{t+\Delta} = r_t + \frac{\beta\mu}{1+\beta} ab\Delta + \frac{\sigma_k \sqrt{r_t}}{1+\beta} \sqrt{\Delta} \xi_t. \quad (14)$$

Уравнения (13) и (14) похожи на приведенную выше дискретную аппроксимацию уравнения Васичека, т.е. отражают по-прежнему процесс с возвратом к среднему. Существенным отличием от уравнения Васичека является то, что соответствующий коэффициент уравнения (14) при случайной переменной учитывает параметр в форме  $\sqrt{r_t}$ .

<sup>8</sup> Примеры реализации данного подхода см. в работах: [Моделирование экономического роста..., 2011, с. 164–173; Воронцовский, Вьюненко, 2014].

Условия (11)—(14) можно использовать для прогнозирования изменения рассматриваемого эффективного курса обмена в процессе имитационных расчетов. При этом были решены две основные задачи. Во-первых, построена средняя расчетная траектория, которая позволяет прогнозировать тенденции изменения рассматриваемых обменных курсов валют отдельных стран. Во-вторых, сделан вывод об оценке границ доверительной области для рассматриваемых индексов реальных эффективных обменных курсов валют. Если такая оценка является конечной целью расчетов, то для ее получения можно ограничиться нахождением выборочных квантилей заданного порядка относительно выбранных моментов времени.

Использование для прогнозирования реальных эффективных обменных курсов отдельных валют соотношений (11)—(14) в режиме имитации опирается на учет только текущих или начальных значений этих показателей. Это позволяет преодолеть ряд формальных трудностей, которые возникают в том случае, когда прогнозирование осуществляется на основе обработки динамических рядов указанных показателей с помощью эконометрических методов и предполагает построение уравнений регрессии [Davidson, 1994; Dougherty, 2011; Stock and Watson, 2010]. Во-первых, при этом не принимается во внимание предпосылка инерционности, которая означает сохранение прошлой тенденции в будущих периодах, поскольку в нашем случае учитывается только начальное или текущее значение. Во-вторых, в принципе становятся ненужными проверки статистических гипотез о стационарности ряда, автокорреляции, гипотез о равенстве нулю коэффициентов уравнений регрессии и др. В-третьих, появляется возможность гибко менять формируемые прогнозы макроэкономических показателей в зависимости от изменений их значений хотя бы в одном периоде, корректируя используемые числовые параметры. Но существенную роль играют условия калибровки модели и определения тех моментов времени, точек поворота, когда возникает резкая смена тенденции развития рассматриваемых макроэкономических показателей. Соответствующие изменения определяются в процессе корректировки числовых параметров.

Наибольшие трудности применения модели связаны с ее калибровкой, которая включает в себя как определение значений параметров, отсутствующих в статистике, так и обнаружение «точек поворота» — тех моментов времени, когда резко меняется тенденция динамики рассматриваемых обменных курсов. При проведении имитационных экспериментов значения параметров уравнений (11)—(14) рассчитывались таким образом, чтобы обеспечить соответствие 50 %-ной доверительной области относительно среднего значения моделируемого случайного процесса и фактических траекторий макроэкономических показателей. Точная дата каждой «точки поворота» определялась путем анализа статистических данных о рассматриваемых индексах. Представленный в данной статье метод прогнозирования в режиме имитации позволяет корректировать прогноз с учетом только намечающейся точки поворота. При использовании модели полиномиальных остатков определенное представление об ожидаемых точках поворота позволяют получить изменения средней расчетной траектории, например, как это показано на рис. 4а в конце рассматриваемого промежутка времени.

При наличии необходимой информации могут быть использованы другие подходы к калибровке модели, например, основанные на статистических методах ана-

лиза соответствия теоретических и расчетных траекторий индексов эффективных обменных курсов или иных макроэкономических показателей.

Далее рассмотрим возможности построения траекторий динамики обменных курсов на основе уравнений (11)—(14) в процессе экспериментальных расчетов в режиме имитации, выполненных по данным ряда европейских и азиатских стран. Будет показана возможность заключения фактических траекторий этих курсов в пределы 50 %-ного доверительного интервала, построенного в режиме имитации, но только для выбранных периодов времени. Это позволяет обеспечить определенное соответствие фактической динамики рассматриваемого обменного курса и средней расчетной траектории в пределах выделенного временного периода.

Использование в процессе моделирования эффективных обменных курсов или процентных ставок процессов типа Орнштейна — Уленбека, обеспечивающих возврат к среднему или применение процессов, которые отражают рост рассматриваемого показателя во времени, во многом определяется общей тенденцией изменения рассматриваемого показателя во времени в течение изучаемого периода.

#### 4. Модель полиномиальных остатков

Для моделирования динамики текущего значения обменного курса и обоснования краткосрочного прогноза может быть применена модель полиномиальных остатков, идея которой основывается на методе последовательных (переменных) разностей, предназначенном для сглаживания временных рядов, и состоит в следующем. Если динамический ряд содержит случайную составляющую и детерминированную (систематическую), которая описывается полиномом степени  $p$ , то можно построить соответствующий ему ряд из последовательных разностей порядка  $p + 1$ , которые определяются по формуле

$$\Delta^{p+1} r_t = \Delta^p r_t - \Delta^p r_{t-1}, \quad (15)$$

где  $\Delta^p r_t$  — разность порядка  $p$  для наблюдаемого ряда значений  $r_t$ . В рамках этого метода предполагается, что разность (15) будет содержать только случайную составляющую  $\varepsilon_t$ . Как показано в работе [Андерсон, 1976], в этом случае разность порядка  $p + 1$  записывается в виде

$$\Delta^{p+1} r_t = \varepsilon_t - C_{p+1,t-1}^1 + C_{p+1,t-2}^2 - \dots + (-1)^{p+1} \varepsilon_{t-p-1},$$

где  $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ .

Математическое ожидание и дисперсия ряда, составленного из разностей вида (15), определяются следующим образом:

$$E \Delta^{p+1} r_t = 0, \quad D \Delta^{p+1} r_t = \sigma^2 C_{2(p+1)}^{p+1},$$

оценка для выборочной дисперсии случайной составляющей исходного ряда:

$$s^2 = \frac{1}{n-p-1} \frac{\sum_{t=1}^{n-p-1} (\Delta^{p+1} r_t)^2}{C_{2(p+1)}^{p+1}}. \quad (16)$$

Таким образом, для моделирования подобного ряда необходимо определить степень полинома  $p$ , получить оценки коэффициентов многочлена  $Q^p$ , описывающего детерминированную составляющую, и оценить дисперсию  $s^2$  случайной составляющей.

Модель полиномиальных остатков предполагает, что каждая разность вида  $r_{t+1} - r_t$  содержит случайную составляющую и детерминированную (систематическую), описываемую полиномом порядка  $p$ . Тогда уровни ряда при заданном значении  $r_1$  могут быть получены по рекуррентной формуле:

$$r_{t+1} = r_t + Q_t^p + s\xi_t, \quad (17)$$

где  $\xi_t$  — реализация случайной величины, подчиняющейся стандартному нормальному закону.

Анализ данных о среднемесячных реальных эффективных обменных курсах показал, что на временных промежутках, примерно равных 12 месяцам, с приемлемой точностью может быть применена модель квадратичных остатков, т. е. модель полиномиальных остатков со степенью многочлена  $p = 2$ :

$$r_{t+1} = r_t + \beta_0 t + \beta_1 t^2 + s\xi_t. \quad (18)$$

Параметры модели (18) могут быть определены как коэффициенты многочлена наилучшего среднеквадратического приближения 2-й степени. В соответствии с исследованием [Амосов, Дубинский, Копченова, 1994, с. 347] такая задача сводится к решению систем линейных уравнений вида

$$\begin{cases} n\beta_0 + \left(\sum_{i=1}^n t_i\right)\beta_1 + \left(\sum_{i=1}^n t_i^2\right)\beta_2 = \sum_{i=1}^n dr_i \\ \left(\sum_{i=1}^n t_i\right)\beta_0 + \left(\sum_{i=1}^n t_i^2\right)\beta_1 + \left(\sum_{i=1}^n t_i^3\right)\beta_2 = \sum_{i=1}^n t_i dr_i \\ \left(\sum_{i=1}^n t_i^2\right)\beta_0 + \left(\sum_{i=1}^n t_i^3\right)\beta_1 + \left(\sum_{i=1}^n t_i^4\right)\beta_2 = \sum_{i=1}^n t_i^2 dr_i \end{cases} \quad (19)$$

Оценка дисперсии  $s^2$  случайной составляющей вычисляется в соответствии с (16). Найденные таким образом параметры модели (18) позволяют строить траектории процесса изменения эффективного обменного курса и получать оценки прогнозных значений.

Принципиальные возможности использования аппроксимации динамики индексов эффективных обменных курсов валют разных стран с помощью приведенной выше модели полиномиальных остатков (18) были проверены в процессе расчетов в режиме имитации для различных временных промежутков. В частности, в качестве примера на рис. 4 приведены результаты расчетов в режиме имитации индексов реального эффективного обменного курса евро за период с декабря 2014 до декабря 2015 г. (рис. 4а) и для доллара США за период с декабря 2015 до декабря 2016 г. (рис. 4б) на основе модели полиномиальных остатков. По результатам имитации были построены средние траектории и определены границы 50%-ных доверительных интервалов.

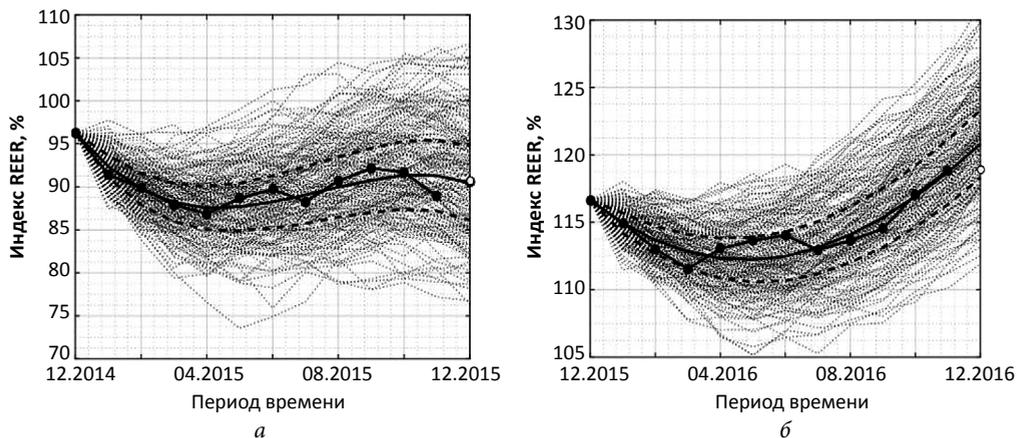


Рис. 4. Моделирование динамики индексов реальных эффективных обменных курсов валют: для евро за декабрь 2014 — декабрь 2015 г. (а), для доллара США за декабрь 2015 — декабрь 2016 г. (б)  
 Обозначения: — средняя траектория; -- границы 50%-ной доверительной области, рассчитанные на основе модели полиномиальных остатков; -•- фактические значения индексов реального эффективного обменного курса; о фактическое значение индекса в конце промежутка.

Полученные результаты расчетов показывают, что на выделенном временном интервале фактическая траектория индексов эффективных обменных ставок для обоих видов валют располагается в пределах 50%-ного доверительного интервала, построенного по результатам имитации для обоих видов валют (см. рис. 4). Хотя этот результат существенно зависит от выбранного периода времени, тем не менее он позволяет сделать вывод о том, что метод полиномиальных остатков, несмотря на формальный характер полученных уравнений, при определенных условиях можно рассматривать как вполне допустимую аппроксимацию динамики индексов эффективных обменных курсов валют. В одном случае прогноз по средней расчетной траектории почти совпадает с фактическим значением индекса в декабре 2015 г. для евро (см. рис. 4а), в другом случае для доллара США очевидны определенные расхождения полученного прогноза рассматриваемого индекса и фактического его значения (см. рис. 4б). Преимущества и недостатки данного подхода с точки зрения построения прогнозов анализируемых макроэкономических показателей покажем ниже.

## 5. Сравнительные экспериментальные расчеты

В процессе экспериментальных расчетов по уравнениям (11)—(14) выяснилось, что для всех уравнений, кроме дискретной аппроксимации уравнения Кокса — Ингерсолла — Росса, на выбранном промежутке времени результаты расчетов в режиме имитации оказались неудовлетворительными, поскольку средняя траектория обменных курсов не соответствовала фактическим значениям индекса обменного курса валюты в конце рассматриваемого периода. Кроме того, в течение этого времени фактические значения выходили за пределы 50%-ного доверительного интервала, построенного в режиме имитации. В качестве одного из полученных примеров использования уравнений (11)—(14) приведены результаты расчетов в режиме имитации на основе дискретной аппроксимации уравнений Васичека

и Мертона; показаны прогнозы индекса реального эффективного обменного курса фунта стерлингов (рис. 5а) и евро (рис. 5б) по средней расчетной траектории на апрель 2017 г.

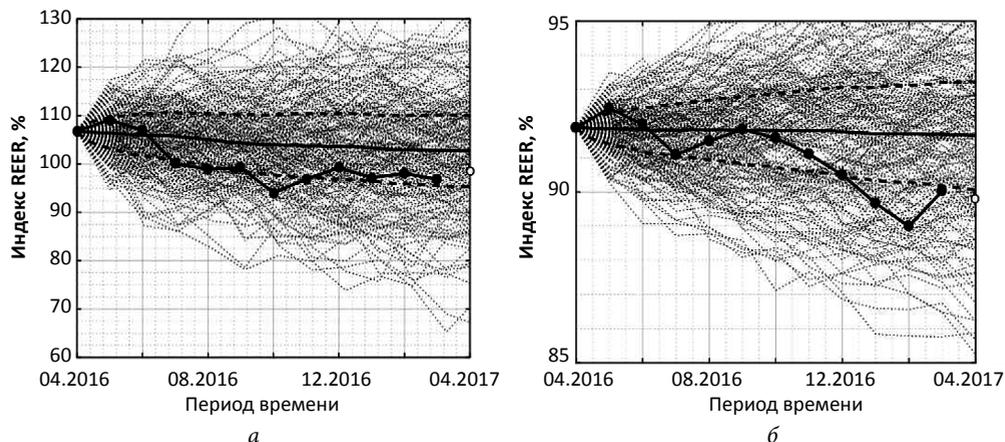


Рис. 5. Моделирование динамики индексов реальных эффективных обменных курсов: для фунта стерлингов на основе модели Васичека (а); для евро на основе модели Мертона (б)

Обозначения: — средняя траектория; -- границы 50%-ной области; •— фактические значения индексов; о фактическое значение индекса в апреле 2017 г.

Для рассматриваемого периода фактическая траектория индекса обменного курса существенно отклоняется от средней расчетной траектории с мая 2016 г. при использовании и уравнения Васичека (см. рис. 5а), и уравнения Мертона (см. рис. 5б) только в одну сторону. Фактическая траектория индекса обменного курса каждой валюты выходит за пределы 50%-ного доверительного интервала в обоих случаях. Очевидно существенное отклонение фактического значения индекса в апреле 2017 г. от средней расчетной траектории, определенной по модели Васичека для фунта стерлингов (см. рис. 5а) и по модели Мертона для евро (см. рис. 5б). Все это резко снижает качество и надежность прогнозов данного индекса по указанным моделям. Аналогичные результаты были получены при прогнозировании индексов обменных курсов валют других стран на основе уравнений (11)—(14).

Поэтому далее подробнее проанализируем результаты расчетов прогнозируемых значений индексов эффективного обменного курса данных валют, которые были выполнены только с использованием двух моделей: во-первых, стохастического уравнения Кокса — Ингерсолла — Росса (5), дискретная аппроксимация которого записывается так:

$$r_{t+\Delta} = r_t + \frac{\beta\mu}{1+\beta} ab\Delta + \frac{\sigma_k \sqrt{r_t}}{1+\beta} \sqrt{\Delta} \xi_t;$$

и, во-вторых, соответствующей аппроксимации модели полиномиальных остатков в форме:

$$r_{t+h} = r_t + \beta_0 t + \beta_1 t^2 + \sigma_k \xi_t, \quad (20)$$

где  $\xi_t$  — реализация случайной величины, подчиняющейся стандартному нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице.

В качестве инструментальной среды для проведения расчетов использована система MATLAB, предоставляющая удобные средства моделирования и визуализации результатов расчетов.

Параметры модели (19) были рассчитаны по алгоритму Нелдера — Мида, известному как алгоритм поиска по деформируемому многограннику [Банди, 1988; Nelder, Mead, 1965]. В качестве оценок искоемых параметров ( $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_k$ ) выбирался набор значений, обеспечивающий минимум среднеквадратического отклонения между расчетными и наблюдаемыми значениями обменного курса на промежутке: апрель 2016 — март 2017 г. Под расчетными понимались значения, полученные в результате имитации на основе соотношения (19) и последующего усреднения 1000 траекторий индексов реального эффективного обменного курса. Значения параметров модели Кокса — Ингерсолла — Росса, найденные указанным выше способом и использованные для оценки прогнозного значения обменного курса на апрель 2017 г., приведены в табл. 2.

**Таблица 2. Параметры дискретной аппроксимации модели Кокса — Ингерсолла — Росса, использованные в расчетах эффективного обменного курса**

| Страна                  | Параметры модели КИР |        |            |
|-------------------------|----------------------|--------|------------|
|                         | $\beta$              | $\mu$  | $\sigma_k$ |
| Великобритания          | 1,84                 | 98,32  | 3,14       |
| США                     | 2,66                 | 114,95 | 1,32       |
| Страны еврозоны в целом | 1,25                 | 90,46  | 0,63       |
| Япония                  | 1,05                 | 70,55  | 1,34       |
| Швейцария               | 4,93                 | 108,94 | 0,76       |

Параметры модели полиномиальных остатков определялись с использованием численных методов построения многочлена наилучшего среднеквадратического приближения 2-й степени. Полученные значения параметров модели полиномиальных остатков приведены в табл. 3.

**Таблица 3. Параметры модели полиномиальных остатков, использованные в расчетах эффективного обменного курса**

| Страна                  | Параметры модели полиномиальных остатков |           |           |            |
|-------------------------|--|-----------|-----------|------------|
|                         | $\beta_2$                                | $\beta_1$ | $\beta_0$ | $\sigma_k$ |
| Великобритания          | 0,04                                     | -0,55     | 0,42      | 3,12       |
| США                     | -0,04                                    | 0,62      | -1,41     | 1,26       |
| Страны еврозоны в целом | 0,03                                     | -0,51     | 1,90      | 0,64       |
| Япония                  | 0,10                                     | -2,09     | 9,65      | 2,08       |
| Швейцария               | -0,01                                    | 0,26      | -1,19     | 0,78       |

Для обеих моделей была построена 1000 расчетных траекторий моделируемого случайного процесса в режиме имитации (рис. 6).

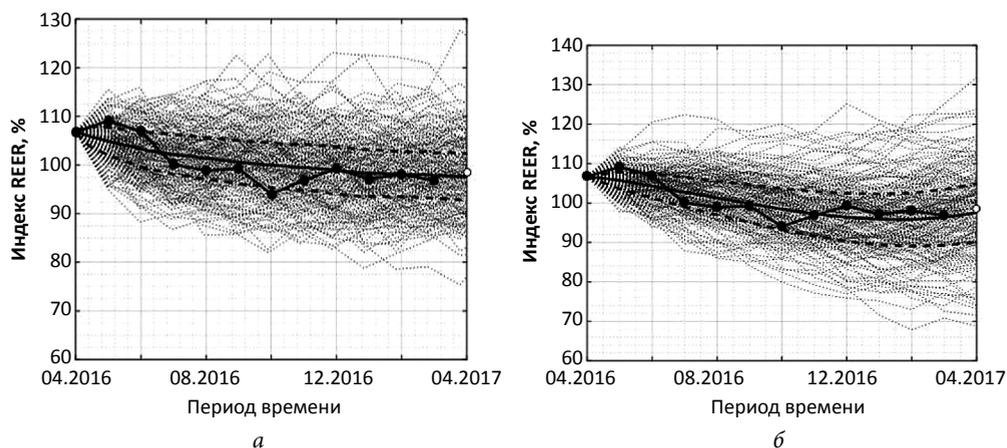


Рис. 6. Моделирование динамики индексов реальных эффективных обменных курсов фунта стерлингов на основе моделей Кокса — Ингерсолла — Росса (а); полиномиальных остатков (б)  
 Обозначения: — средняя траектория; -- границы 50 %-ной области; -•- фактические значения индексов; о фактическое значение индекса эффективного обменного курса в апреле 2017 г. для Великобритании.

Результаты моделирования представлены в виде расчетных траекторий индексов реального эффективного обменного курса валюты на промежутке времени: апрель 2016 г. — март 2017 г.; средней расчетной траектории индекса и границ 50 %-ной доверительной области вместе со статистическими данными за указанный период. Прогноз индекса реального эффективного обменного курса построен по средней расчетной траектории на апрель 2017 г.

Анализируя графики, представленные на рис. 6а, можно сделать вывод о том, что при использовании дискретной аппроксимации уравнения Кокса — Ингерсолла — Росса удалось почти всю фактическую траекторию реального эффективного обменного курса фунта разместить в пределах 50 %-ного доверительного интервала. Только в начале рассматриваемого периода за май и июнь 2016 г. наблюдается незначительный выход за пределы этого интервала (рис. 6а). Средняя траектория индекса, полученная в режиме имитации, обеспечивает почти полное совпадение с контрольным значением за апрель 2017 г. Прогноз индекса обменного курса на апрель 2017 г. по средней расчетной траектории чуть выше фактического значения индекса в данный месяц.

Применение метода полиномиальных остатков (рис. 6б) показало примерно такой же результат. Основное отличие расчетов по рассмотренной модели состоит в том, что 50 %-ный доверительный интервал чуть лучше соответствует фактической динамике индекса реального эффективного обменного курса фунта стерлингов за рассматриваемый период. Это находит свое отражение в немного более плавном снижении и возрастании границ 50 %-ных доверительных интервалов. Полученное прогнозное значение индекса данного обменного курса на апрель 2017 г. по средней расчетной траектории немного меньше фактического значения индекса этого обменного курса в данный месяц.

На рис. 7 представлены аналогичные графики для доллара США, полученные в режиме имитации. Для дискретной аппроксимации уравнения Кокса — Ингерсолла — Росса (рис. 7а) очевидно, что фактическая траектория индекса реального

эффективного обменного курса доллара США выходит за пределы 50 %-ного доверительного интервала в декабре 2016 г. и в январе 2017 г. Полученная в режиме имитации средняя траектория начиная с сентября 2016 г. имеет почти плоский вид. В первую половину анализируемого периода эта траектория устойчиво превышает фактические значения эффективного обменного курса, а во второй — наоборот, гораздо ниже. Средняя расчетная траектория плохо отражает динамику данного обменного курса.

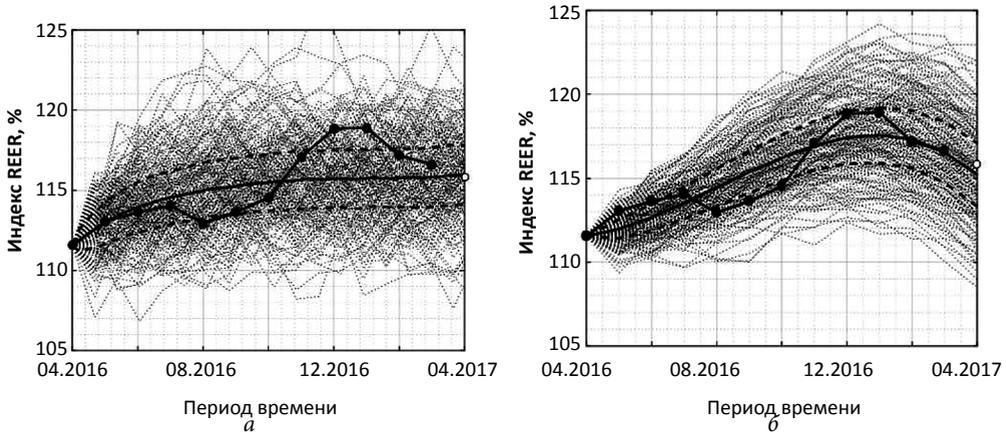


Рис. 7. Моделирование динамики индексов реальных эффективных обменных курсов доллара США на основе моделей Кокса — Ингерсолла — Росса (а); полиномиальных остатков (б)

Обозначения: — средняя траектория; -- границы 50 %-ной области; -.- фактические значения, о фактическое значение эффективного обменного курса в апреле 2017 г. для доллара США

Использование модели полиномиальных остатков (рис. 7б) позволяет построить 50 %-ный доверительный интервал, который гораздо лучше отражает динамику рассматриваемого эффективного обменного курса доллара США, причем это можно наблюдать на разных участках фактической траектории данного курса. Его прогноз на апрель 2017 г. отличается от средней траектории, и он чуть хуже, чем по средней траектории, построенной в режиме имитации по уравнению Кокса — Ингерсолла — Росса. При этом средняя траектория, полученная по методу полиномиальных остатков, отражает гораздо лучше как общую тенденцию изменения фактического индекса обменного курса начиная с апреля 2016 г., так и динамику этого индекса на отдельных временных интервалах в течение этого периода. С точки зрения построения прогнозов очевидны преимущества применения модели полиномиальных остатков в данном случае.

При анализе прогнозов реального эффективного обменного курса евро (рис. 8) и японской иены (рис. 9) можно сделать ряд похожих выводов. Во-первых, очевидно, что при использовании модели Кокса — Ингерсолла — Росса фактическая траектория индекса рассматриваемого обменного курса как для евро (рис. 8а), так и для японской иены (рис. 9а) выходит за пределы построенного 50 %-ного доверительного интервала. Для индекса обменного курса евро подобные отклонения наблюдаются также при использовании метода полиномиальных остатков.

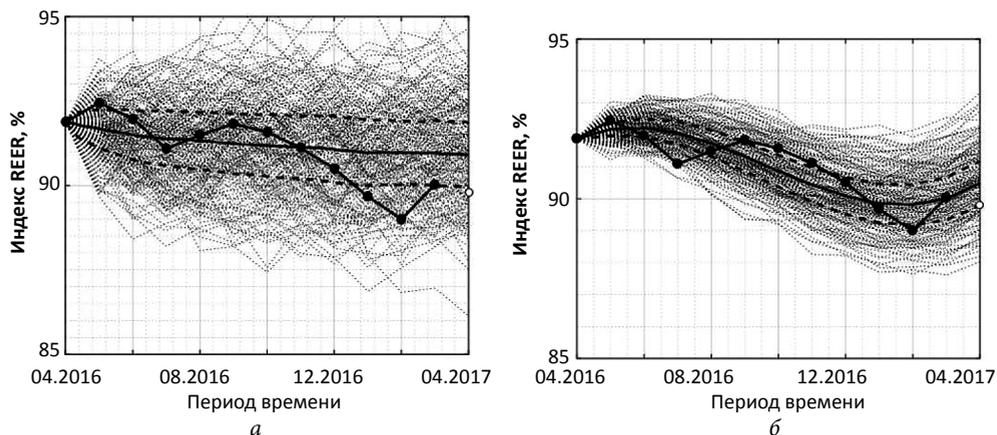


Рис. 8. Моделирование динамики индексов реальных эффективных обменных курсов евро на основе моделей Кокса — Ингерсолла — Росса (а); полиномиальных остатков (б)

Обозначения: — средняя траектория; -- границы 50%-ной области; -•- фактические значения; о фактическое значение индекса эффективного обменного курса евро в апреле 2017 г. для стран зоны евро.

Во-вторых, средняя расчетная траектория, построенная по методу полиномиальных остатков для индекса обменного курса как евро, так и иены, гораздо лучше отражает динамику соответствующих индексов за рассматриваемый период, чем средняя траектория, соответствующая уравнению Кокса — Ингерсолла — Росса. В-третьих, прогноз индекса обменного курса на апрель 2017 г. для японской иены чуть лучше, чем для евро, как по уравнению Кокса — Ингерсолла — Росса, так и по методу полиномиальных остатков. Полученные результаты существенно зависят от выбранного периода времени и могут значительно поменяться при выборе другого периода.

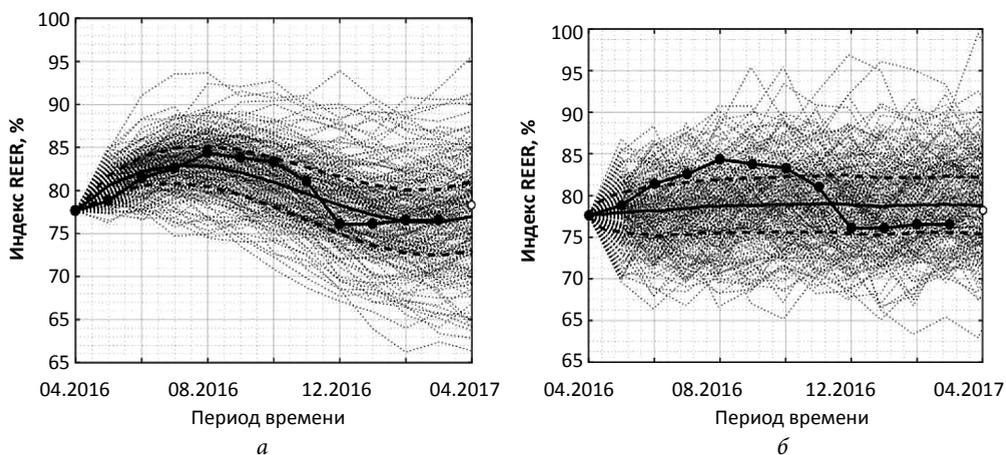


Рис. 9. Моделирование динамики индексов реальных эффективных обменных курсов японской иены на основе моделей полиномиальных остатков (а); Кокса — Ингерсолла — Росса (б)

Обозначения: — средняя траектория; -- границы 50%-ной области; -•- фактические значения индексов; о фактическое значение индекса эффективного обменного курса иены в апреле 2017 г. для Японии.

При анализе динамики индекса реального эффективного обменного курса швейцарского франка (рис. 10) можно отметить, что средние расчетные траектории, полученные в режиме имитации по дискретной аппроксимации уравнения Кокса — Ингерсолла — Росса и модели полиномиальных остатков, почти совпадают. Но при этом прогноз на апрель 2017 г., который построен по средней траектории, полученной по методу полиномиальных остатков (рис. 10б), немного лучше соответствует фактическому значению индекса эффективного обменного курса швейцарского франка на этот месяц, чем прогноз по средней траектории по модели Кокса — Ингерсолла — Росса (рис. 10а). Средняя расчетная траектория, полученная в режиме имитации по методу полиномиальных остатков, в большей степени соответствует фактической динамике реального эффективного обменного курса швейцарского франка в рассматриваемый период.

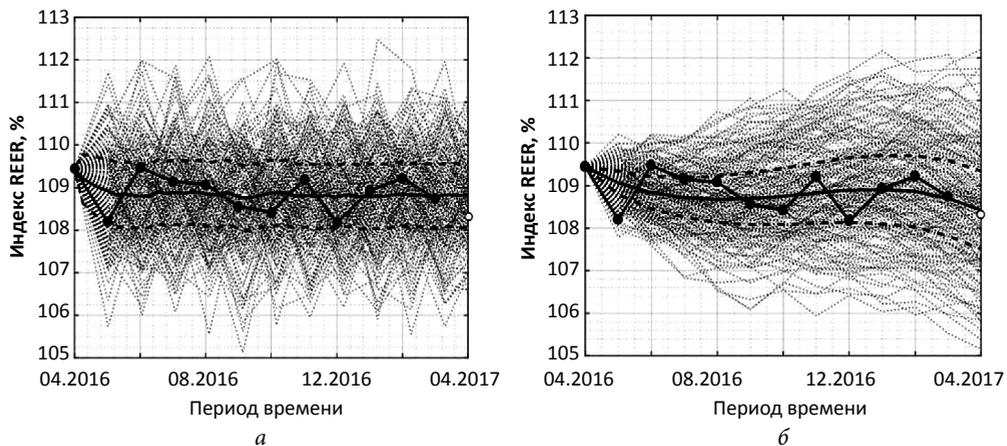


Рис. 10. Моделирование динамики индексов реальных эффективных обменных курсов швейцарского франка на основе моделей Кокса — Ингерсолла — Росса (а); полиномиальных остатков (б)  
 Обозначения: — средняя траектория; -- границы 50%-ной области; -•- фактические значения индексов; о фактическое значение индекса эффективного обменного курса в апреле 2017 г. для Швейцарии.

Анализируя графики, отражающие условия применения модели полиномиальных остатков (представленные на рис. 6б — 10б), можно сделать вывод о том, что средняя траектория, построенная по методу полиномиальных остатков в режиме имитации, лучше отражает динамику индекса соответствующего обменного курса, чем подобная траектория, соответствующая модели Кокса — Ингерсолла — Росса. В определенной степени это может быть связано с тем, что при расчетах числовых параметров уравнения (18) учитываются данные по всей рассматриваемой выборке (19), а не только начальные значения.

## Заключение

1. Реальные эффективные обменные курсы валют отражают устойчивость, укрепление или ослабление национальной валюты с учетом ее внешнеторгового оборота и перспективы развития конкурентной способности данной страны на внешних рынках. В процессе анализа динамики данных обменных курсов применяются индексы, сопоставимость значений которых для разных стран достигается

на основе единого периода отсчета. В базе данных банка BIS в качестве точки отсчета учитываются данные 2010 г.

2. Реальный эффективный обменный курс не является фактором, который прямо и непосредственно влияет на перспективы развития экономики. Его можно рассматривать как своеобразный индикатор сложившейся в стране макроэкономической ситуации в области обменных курсов по сравнению со странами — внешнеторговыми партнерами. Его изменение в определенном смысле обращает внимание на то, как изменяется конкурентоспособность рассматриваемой страны в результате проводимой денежно-кредитной политики.

3. Полностью нашла свое подтверждение гипотеза о том, что для индексов реальных эффективных обменных курсов валют различных стран возможно построение только краткосрочных надежных прогнозов: анализ динамики индексов обменных курсов валют различных стран показал, что невозможно выделить какие-либо устойчивые тенденции этих индексов на достаточно длительном периоде. Индексы реальных эффективных обменных курсов валют имеют разную динамику, которая отражает характерные особенности для каждой страны. Эта динамика может быть по-разному переменчивой для разных временных интервалов. Это предполагает построение прогнозов данных индексов с учетом фактических тенденций изменения индекса реального эффективного обменного курса валюты конкретной страны только на такой период времени, когда можно четко наблюдать складывающуюся тенденцию изменения индекса реального эффективного обменного курса. Гипотеза о том, что эти прогнозы могут носить только относительно краткосрочный характер, оказалась справедливой.

4. Учитывая колебания индексов эффективных обменных курсов валют, их прогнозирование в режиме имитации целесообразно осуществлять на основе дискретной аппроксимации стохастических вариантов процесса Орнштейна — Уленбека или модели полиномиальных остатков.

5. Выполненные экспериментальные расчеты в режиме имитации показали, что использование дискретной аппроксимации стохастических уравнений Васичека, Мертона, Досена и Огдена для прогнозирования индексов реальных эффективных обменных курсов валют для исследуемых стран на выбранном временном интервале приводит к тому, что фактическая динамика этих индексов на данном интервале не соответствует динамике средней расчетной траектории индекса, полученной в режиме имитации, что существенно снижает качество прогнозирования указанных индексов обменных курсов в данном случае. Гипотеза о возможности построения надежных прогнозов указанных индексов, созданных на основе дискретной аппроксимации указанных уравнений, оказалась невыполненной на временном интервале с апреля 2016 по март 2017 г.

6. Расчеты в режиме имитации на основе дискретной аппроксимации стохастического уравнения Кокса — Ингерсолла — Росса показали, что удалось обеспечить для индексов эффективных обменных курсов валют Великобритании, США, стран еврозоны, Японии и Швейцарии попадание в 50 %-ный доверительный интервал, построенный по результатам имитационных расчетов, почти на всем рассматриваемом промежутке времени, что существенно повышает качество прогноза в форме средней расчетной траектории. В части использования этого уравнения указанная гипотеза получила свое подтверждение.

7. Модель полиномиальных остатков предполагает формальное разложение исследуемого показателя в форме полинома заданной степени и использование первых или вторых разностей полиномов для дискретной аппроксимации рассматриваемых макроэкономических показателей. Ее применение позволило построить прогнозы траекторий индексов реального эффективного обменного курса валют в режиме имитации. Для анализируемых стран фактическая траектория данного индекса располагалась в пределах 50 %-ного доверительного интервала на выбранном промежутке времени, что позволяет построить краткосрочный прогноз на основе средней расчетной траектории. Гипотеза о возможности построения надежных прогнозов рассматриваемых индексов обменных курсов в данном случае нашла свое подтверждение.

8. Полученные выводы относительно построения краткосрочных прогнозов индексов реальных эффективных обменных курсов с помощью дискретной аппроксимации уравнения Кокса — Ингерсолла — Росса или модели полиномиальных остатков верны на выбранном промежутке времени и при использовании указанных методов расчета числовых параметров соответствующих уравнений. Изменение рассматриваемого временного интервала потребует проведения всех расчетов заново и может привести к тому, что представленные в данной статье выводы и результаты существенно изменятся. Это послужит для авторов предметом дальнейшего исследования.

## Литература

- Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров: уч. пособие. М.: Высшая школа, 1994. 544 с.
- Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов / пер. с англ. М.: Мир, 1976. 155 с.
- Банди Б. Д. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988. 128 с.
- Воронцовский А. В. Современные теории рынка капитала. М.: Экономика, 2010а. 714 с.
- Воронцовский А. В. Современные подходы к моделированию экономического роста // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 5: Экономика. 2010б. Вып. 3. С. 105–119.
- Воронцовский А. В., Вьюненко Л. Ф. Построение траекторий развития экономики на основе аппроксимации условий стохастических моделей экономического роста // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 5: Экономика. 2014. Вып. 3. С. 123–147.
- Евдокимова Т. В., Зубарев А. В., Трунин П. В. Влияние реального обменного курса рубля на экономическую активность в России. М.: Изд-во Ин-та Гайдара, 2013. URL: [http://iep.ru/files/text/working\\_papers/Nauchnie\\_trudi-165.pdf](http://iep.ru/files/text/working_papers/Nauchnie_trudi-165.pdf) (дата обращения: 21.02.2016).
- Кудрин А. Л. Реальный эффективный курс рубля: проблемы роста // Вопросы экономики. 2006. № 10. С. 4–18.
- Люу Ю.-Д. Методы и алгоритмы финансовой математики / пер. с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 751 с.
- Моделирование экономического роста в условиях современной экономики / А. В. Воронцовский, А. Ю. Дикарев, Т. Д. Ахобадзе, А. Л. Дмитриев, В. Г. Шеров-Игнатъев; отв. ред. А. В. Воронцовский. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2011. 284 с.
- Панфилов М. А. Расчет и анализ динамики эффективного обменного курса рубля // Аудит и финансовый анализ. 2009. № 2. С. 90–95.
- Трунин П., Князев Д., Кудюкина Е. Анализ факторов динамики обменного курса рубля. М.: Изд-во Ин-та Гайдара, 2010. 68 с.
- Anderson G. H., Karamouzis N. V., Skaperdas P. D. A New Effective Exchange Rate for the Dollar and Its Implications for U. S. Merchandise Trade. Federal Reserve Bank of Cleveland Economic Review, 1987. Quarter 2. P. 2–23.
- Brennan M., Schwartz E. Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds // Journal of Banking and Finance. 1979. P. 133–135.

- Chinn M. D. A primer on Real Effective Exchange Rates: Determinants, Overvaluation, Trade flows and Competitive Devaluation // *Open economies review*. 2006. Vol. 17. P. 115–143.
- Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. Theory of the Term Structure of Interest Rates // *Econometrica*. 1985. Vol. 53, N 2. P. 385–407.
- Davidson J. *Stochastic Limit Theory: An Introduction for Econometricians*. London: Oxford University Press, 1994. 539 p.
- Dosse T. Real Exchange Rate Misalignment and Economic Growth in Developing Countries // *South-Western Economic Review*. 2007. Vol. 3. P. 57–72.
- Dothan M. On the Term Structure of Interest Rates // *Financial Economics*. 1978. Vol. 6, N 1. P. 59–69.
- Dougherty C. *Introduction to Econometrics*. 5<sup>th</sup> ed. London: Oxford University Press, 2016. 608 p.
- Eichengreen B. The Real Exchange Rate and Economic Growth. Paper prepared for the Growth Commission, 2007. World Bank. Working paper no. 4. URL: <http://documents.worldbank.org/curated/en/868701468152077108/pdf/577040NWP0Box31UBLIC10gc1wp10041web.pdf> (accessed: 15.06.2017).
- Higham D. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*. 2001. Vol. 43, N 3 (Sep. 2001). P. 525–546. Stable. URL: <http://www.jstor.org/stable/3649798> (accessed: 10.06.2017).
- Hull J., White A. Pricing interest rate derivative securities // *Review of Financial Studies*. 1990. Vol. 3, No 5. P. 573–595.
- Hutzenthaler M., Jentzen A., Kloeden P. E. Divergence of the multilevel Monte Carlo Euler method for nonlinear stochastic differential equations // *Annals of Applied Probability*. 2013. Vol. 23, No 5. P. 1913–1966 [Peer Reviewed Journal].
- Kloeden P., Neuenkirch A., Pavani R. Multilevel Monte Carlo for stochastic differential equations with additive fractional noise // *Annals of Operations Research*. 2011. Vol. 189, N 1. P. 255–276.
- Maeso-Fernandez F., Osbat Ch., Schnatz B. Pitfalls in estimating equilibrium exchange rates for transition economies // *Economic Systems*. 2005. Vol. 29, N 2. P. 130–143.
- Maeso-Fernandez F., Chiara O., Schnatz B. Determinants of the euro real effective exchange rate: a BEER/PEER approach // *Australian Economic Papers*. 2002. Vol. 41 (4). P. 437–461.
- Merton R. C. Theory of rational option pricing // *Bell Journal of Economics and Management Science*. 1973. No 4. P. 141–183.
- Nelder J. A., Mead R. A Simplex Method for Function Minimization // *The Computer Journal*. 1965. Vol. 7, Iss. 4. P. 308–313. URL: <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308> (accessed: 15.10.2017).
- Ogden J. P. An Analysis of Yield Curve Notes // *Journal of Finance*. 1987. Vol. 42, N 1. P. 99–110.
- Spilimbergo A., Vamvakidis A. Real Effective Exchange Rate and the Constant Elasticity of Substitution Assumption // *Journal of International Economics*. 2003. Vol. 60, N 2. P. 337–354.
- Stock J. H., Watson M. W. *Introduction to Econometrics*. Update. 3<sup>rd</sup> ed. Pearson Addison-Wesley, 2010. 827 p.
- Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure // *Journal of Financial Economics*. 1977. Vol. 5. P. 177–178.
- Wu F., Mao X., Kloeden P. E. Almost sure exponential stability of the Euler–Maruyama approximations for stochastic functional differential equations // *Random Operators and Stochastic Equations*. 2011. Vol. 19, N 2. P. 165–186.

**Для цитирования:** Воронцовский А. В., Вьюненко Л. Ф. Прогнозирование индексов реальных эффективных обменных курсов валют с учетом случайного фактора // *Вестник СПбГУ. Экономика*. 2017. Т. 33. Вып. 4. С. 522–549. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu05.2017.401>.

## References

- Amosov A. A., Dubinskii Iu. A., Kopchenova N. V. *Vychislitel'nye metody dlia inzhenerov: uch. posobie [Computational Methods for Engineers]*. Moscow, Vysshiaia shkola Publ., 1994. 544 p. (In Russian)
- Anderson G. H., Karamouzis N. V., Skaperdas P. D. A New Effective Exchange Rate for the Dollar and Its Implications for U.S. Merchandise Trade. *Federal Reserve Bank of Cleveland Economic Review*, 1987, Quarter 2, pp. 2–23.
- Anderson T. *Statisticheskii analiz vremennykh riadov [The Statistical Analysis of Time Series]*. Transl. from engl. Moscow, Mir Publ., 1976. 155 p. (In Russian)
- Bandi B. D. *Metody optimizatsii. Vvodnyi kurs [Basics of Optimisation Methods]*. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1988. 128 p. (In Russian)
- Brennan M., Schwartz E. Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds. *Journal of Banking and Finance*, 1979, pp. 133–135.

- Chinn M.D. A primer on Real Effective Exchange Rates: Determinants, Overvaluation, Trade flows and Competitive Devaluation. *Open economies review*, 2006, vol. 17, pp. 115–143.
- Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 1985, vol. 53, no. 2, pp. 385–407.
- Davidson J. *Stochastic Limit Theory: An Introduction for Econometricians*. London, Oxford University Press, 1994. 539 p.
- Dosse T. Real Exchange Rate Misalignment and Economic Growth in Developing Countries. *South-Western Economic Review*, 2007, vol. 3, pp. 57–72.
- Dothan M. On the Term Structure of Interest Rates. *Financial Economics*, 1978, vol. 6, no. 1, pp. 59–69.
- Dougherty C. *Introduction to Econometrics*. 5<sup>th</sup> ed. London, Oxford University Press, 2016. 608 p.
- Eichengreen B. *The Real Exchange Rate and Economic Growth*. Paper prepared for the Growth Commission, 2007. World Bank. Working paper no. 4. Available at: <http://documents.worldbank.org/curated/en/868701468152077108/pdf/577040NWP0Box31UBLIC10gc1wp10041web.pdf> (accessed: 15.06.2017).
- Evdokimova T.V., Zubarev A.V., Trunin P.V. *Vlianie real'nogo obmennogo kursa rublia na ekonomicheskuiu aktivnost' v Rossii* [The impact of the real exchange rate of the ruble on economic activity in Russia]. Moscow, Izdatel'stvo Instituta Gaidara, 2013. Available at: [http://iep.ru/files/text/working\\_papers/Nauchnie\\_trudi-165.pdf](http://iep.ru/files/text/working_papers/Nauchnie_trudi-165.pdf) (accessed: 21.02.2016). (In Russian)
- Higham D. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 2001, vol. 43, no. 3 (Sep. 2001), pp. 525–546. Stable. Available at: <http://www.jstor.org/stable/3649798> (accessed: 10.06.2017).
- Hull J., White A. Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies*, 1990, vol. 3, no. 5, pp. 573–595.
- Hutzenthaler M., Jentzen A., Kloeden P.E. Divergence of the multilevel Monte Carlo Euler method for nonlinear stochastic differential equations. *Annals of Applied Probability*, 2013, vol. 23, no. 5, pp. 1913–1966 [Peer Reviewed Journal].
- Kloeden P., Neuenkirch A., Pavani R. Multilevel Monte Carlo for stochastic differential equations with additive fractional noise. *Annals of Operations Research*, 2011, vol. 189, no. 1, pp. 255–276.
- Kudrin A.L. Real'nyi effektivnyi kurs rublia: problemy rosta [The real effective ruble rate: growth problems]. *Voprosy ekonomiki*, 2006, no. 10, pp. 4–18. (In Russian)
- Liuu Iu.-D. *Metody i algoritmy finansovoi matematiki* [Financial engineering and Computation Principles, Mathematics Algorithms]. Transl. from engl. Moscow, BINOM. Laboratoriia znaniia Publ., 2007. 751 p. (In Russian)
- Maeso-Fernandez F., Osbat Ch., Schnatz B. Pitfalls in estimating equilibrium exchange rates for transition economies. *Economic Systems*, 2005, vol. 29, no. 2, pp. 130–143.
- Maeso-Fernandez F., Chiara O., Schnatz B. Determinants of the euro real effective exchange rate: a BEER/PEER approach. *Australian Economic Papers*, 2002, vol. 41 (4), pp. 437–461.
- Merton R.C. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973, no. 4, pp. 141–183.
- Nelder J.A., Mead R. A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal*, 1965, vol. 7, iss. 4, pp. 308–313. Available at: <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308> (accessed: 15.10.2017).
- Ogden J.P. An Analysis of Yield Curve Notes. *Journal of Finance*, 1987, vol. 42, no. 1, pp. 99–110.
- Panfilov M.A. Raschet i analiz dinamiki effektivnogo obmennogo kursa rublia [Calculation and analysis of the dynamics of the effective exchange rate of the ruble]. *Audit i finansovyi analiz* [Audit and financial analysis], 2009, no. 2, pp. 90–95. (In Russian)
- Spilimbergo A., Vamvakidis A. Real Effective Exchange Rate and the Constant Elasticity of Substitution Assumption. *Journal of International Economics*, 2003, vol. 60, no. 2, pp. 337–354.
- Stock J.H., Watson M.W. *Introduction to Econometrics*. Update, 3<sup>rd</sup> ed. Pearson Addison-Wesley, 2010. 827 p.
- Trunin P., Kniazev D., Kudrukina E. *Analiz faktorov dinamiki obmennogo kursa rublia* [Analysis of factors of the dynamics of the exchange rate of the ruble]. Moscow, In-t Gaidara Publ., 2010. 68 p. (In Russian)
- Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 1977, vol. 5, pp. 177–178.
- Vorontsovskiy A.V. Sovremennyye podkhody k modelirovaniu ekonomicheskogo rosta [Modern approaches to modeling of economic growth]. *Vestnik SPbSU. Economics*, 2010b, iss. 3, pp. 105–119. (In Russian)
- Vorontsovskiy A.V. *Sovremennyye teorii rynka kapitala* [Modern theories of the capital market]. Moscow, Ekonomika Publ., 2010a. 714 p. (In Russian)
- Vorontsovskiy A.V., Dikarev A.Iu., Akhobadze T.D., Dmitriev A.L., Sherov-Ignat'ev V.G. *Modelirovanie ekonomicheskogo rosta v usloviakh sovremennoi ekonomiki* [Modeling of economic growth in a modern economy]. Ed. A.V. Vorontsovskii. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press, 2011. 284 p. (In Russian)

Vorontsovskiy A. V., Vyunenko L. F. Postroenie traektorii razvitiia ekonomiki na osnove approksimatsii uslovii stokhasticheskikh modelei ekonomicheskogo rosta [Constructing of Economic Development Trajectories by Approximating Conditions of Stochastic Models of Economic Growth]. *Vestnik SPbSU. Economics*, 2014, iss. 3, pp. 123–147. (In Russian)

Wu F., Mao X., Kloeden P. E. Almost sure exponential stability of the Euler–Maruyama approximations for stochastic functional differential equations. *Random Operators and Stochastic Equations*, 2011, vol. 19, no. 2, pp. 165–186.

**For citation:** Vorontsovskiy A. V., Vyunenko L. F. Forecasting real effective exchange rate indices of currencies using a stochastic factor. *St Petersburg University Journal of Economic Studies*, 2017, vol. 33, issue 4, pp. 522–549. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu05.2017.401>.

Статья поступила в редакцию 12.08.2017

Статья рекомендована в печать 27.09.2017